2005 한국경영과학회/대한산업공학회 춘계공동학술대회
2005년 5월 13일~14일, 충북대학교

외판원문제(TSP)를 위한 실용적인 근사해법

백관호
충남 아산시 탕정면 갈산리 선문대학교 경영학부

A Practical Approximation Method for TSP

Gwan-Ho Paek
Department of Business Administration, Sun Moon University, Asan, Chungnam

초 록

외판원문제(TSP)는 아직까지도 쉽게 풀리지 않는 NP-complete군에 속하는 어려운 문제이다. TSP의 결정적인 난점은 {0,1}의 정수해를 보장하면서 동시에 부분순환(sub-tour)을 피해야 한다는 점이다. 우리는 TSP를 두 단계로 나누어 탐색한다. 첫째, 초기해는 2개의 마디로 이루어진 최소단위의 부분순환에 가장 적은 비용의 마디를 하나씩 추가적으로 더하여 모든 마디가 포함될 때까지 반복하여 만든다. 둘째, 선택된 초기해의 마디를 임의의 단위로 잘라내어 그 개선비용이 음수인 경우 다른 마디 자리에 삽입함으로서 새로운 전체순환(grand tour)을 만들어 해를 개선한다. 우리는 최적해가 알려진 TSPLIB에 적용하여 그 결과를 비교하고 또한 랜덤하게 생성된 마디 200개까지의 TSP문제에 대하여 실험을 하였다. 대부분의 해는 최적해로부터 1% 이내의 결과로서 30분 이내에 얻을 수 있었다. 우리의 방법은 실용적인 문제에 적용할 수 있을 것으로 판단된다.

주제어: 외판원문제

Abstract

TSP(Traveling Salesman Problem) has been a nagging NP-complete problem to test almost every algorithmic idea in combinatorial optimization in vain. The main bottleneck is how to get the integer results {0,1} and to avoid sub-tours. We suggest simple and practical method in two steps. Firstly for every node, an initial Hamiltonian cycle us produced on the nearest neighbour concept. The node with nearest distance is to be inserted to form a increased feasible cycle. Secondly we improve the initial solution by exchanging 2 cuts of the grand tours. We got practical results within 1 from the optimum in 30 minutes for up to 200 nodes problems. TSP of real world type might be tackled practically in our formulation.

Keyword: TSP, Traveling Salesman Problem

1. 시작하며

외판원문제(TSP: Traveling Salesman Problem)는 가지(i,j)의 비용이 Cij로 주어진 네트워크 G(N,A)에서 모든 마디 n개를 한번씩만 방문하고 출발점으로 돌아오는 최소비용의 해밀튼순환(Hamiltonian Cycle)을 찾아내는 문제이다(김헌태 외 2003).

TSP는 조합최적화문제 중에서도 가장 대표적인 순서문제(sequencing problem)로서 분할문제, 승무원문제, 차량경로문제, 일정계획, 조합라인 밸런싱 등 스케쥴링문제와 배달문제에서 다양하게 응용될 수 있는 전형적인 네트워크문제이다(Greiner 1999, Ozgur 1995, Reinelt 1994).

해를 발견하기 위한 방법은 최적해를 위한 것과 근사해를 위한 것으로 대별되는데 현실적인 크기의 문제에 대한 최적해법은 아직 발견되지 않았다. 클레이연구소는 이 문제의 해결에 백만불의 현상금을 걸고 있으나 아직까지 그대로 남아있다. 지금으로서는 큰 문제에 대한 일반적인 최적해법이 거의 불가능한 것으로 여겨지고 있다(Barford 1998). 최근에는 유전자 알고리즘 등을 이용한 방법들이 모색되고 있다(백시현 외 2001, Jung S., Moon B. 2000).

TSP는 일반적으로 다음과 같은 조건을 가지는 할당문제로 정형화하고 이를 반복하여 풀어 점진적으로 최적해를 탐색함으로서 해결할 수 있다(Fischetti 1997, Christofides 1979).

Min: $Z=\sum C_{ij} \cdot X_{ij}$ for i,j (i,j=1 to n)......... (1)
s.t. $\sum X_{ij}=1$ for i ($i \neq j$, i=1 to n) .... (2)
$\sum X_{ij}=1$ for j ($j \neq i$, j=1 to n) .... (3)
$\sum X_{ij} \leq |S|-1$ for i,j (i,j=1 to n)..... (4)

여기에서 Xij는 마디(node)간의 연결을 나타내는 가지(arc)이고, Cij는 비용, n은 마디의 크기이다. 그리고 S는 전체순환을 이루기 전에 제자리로 되돌아오는 부분순환의 집합, |S|는 그 집합의 크기(마디수)이다.

그러나 TSP는 지금까지 거의 모든 아이디어로부터의 도전을 무색하게 하고 있는 실정이다. 그 주요원인은 바로 위의 식(4)에 있다. 부분순환을 방지하기 위해 이 식이 추가되면서 문제의 크기가 폭발적으로 커지며 모든 해가 {0,1}라는 것을 보장받지 못하게 된다. 지금까지 TSP를 위한 수많은 방법들이 최적해를 찾는데 실패한 결정적인 이유는 바로 이러한 문제크기의 급격한 팽창(exponential explosion) 때문이었다(Paek 2002).

근사해법은 초기해의 경로구성방법(initial solution)과 그것을 개선하는 과정(improving process)으로 구분할 수 있다. 초기해를 구하는 방법은 최근거리법(nearest neighbour), 삽입법(insertion) 등이 있으며 개선방법에는 *k*-opt, Lin-Kernighan 알고리즘 등이 있다(Fowler 1999, Tassiulas 1997, Beran 1994).

우리도 TSP를 두 단계로 나누어 탐색한다. 첫째, 초기해는 2개의 마디로 이루어진 최소단위의 부분순환에 가장 적은 비용의 마디를 하나씩 추가적으로 더하여 모든 마디가 포함될 때까지 반복하여 만든다. 둘째, 선택된 초기해의 마디를 임의의 단위로 잘라내어 그 개선비용이 음수인 경우 다른 마디 자리에 삽입함으로서 새로운 전체순환(grand tour)을 만들어 해를 개선한다.

2. 초기해의 구성

초기해의 구성은 임의의 마디로부터 시작하여 부분순환을 형성하여 가되, 최소비용으로 기존의 순환에 추가되는 마디를 하나씩 골라서 새로운 순환을 형성하여 간다.

이 과정은 물론 최종적인 전체순환 즉 해밀튼순환이 이루어질 때까지 반복한다. 모든 마디에 대하여 이러한 해밀튼순환을 찾아내고 그 중에서 가장 작은 거리(비용)의 순환을 초기해로 한다.

아래와 같이 마디가 6개인 TSP사례를 살펴보기로 하자. 사례는 편의상 대칭 TSP를 다루고 있으나 비대칭문제도 접근방법은 전혀 동일하다.

<표 1> TSP 사례(거리)

	1	2	3	4	5	6
1	0	70	45	84	240	120
2	70	0	32	109	214	76
3	45	32	0	114	218	79
4	84	109	114	0	162	186
5	240	214	218	162	0	290
6	120	76	79	186	290	0

위의 <표 1>과 같은 문제에서, 마디 1로부터 출발하면 최초의 부분순환은 가장 비용이 작은 순환 1-3-1이 되며 그 비용은 90 (45+45)이 된다.

다음으로 이 부분순환에 추가되는 마디는 최소추가비용 57(70+32-45)을 가지는 마디2가 되어 1-2-3-1의 새로운 부분순환을 형성한다.

참고로 부분순환 1-3-1에 대한 남은 마디의 순환(추가비용)은 다음과 같다. 우리는 이 중에서 가장 작은 추가비용인 마디2를 선택한 것이다. 우리의 경우는 처음 출발하는 작은 규모의 순환이기 때문에 모든 추가마디가 첫째 마디와 둘째 마디 사이에 삽입되었으나 반드시 그런 것은 아니다. 마디가 늘어나면 당연히 그 사이의 모든 추가(삽입)비용을 고려하여야 한다.

마디2: 1-2-3-1(57)
마디4: 1-4-3-1(153)
마디5: 1-5-3-1(413)
마디6: 1-6-3-1(154)

이와 같은 과정을 반복하면 마디1로부터 형성되는 전체순환 1-4-5-2-3-6(비용 691)이 얻어진다. 각 마디로부터 얻어지는 전체순환(비용)은 다음과 같다.

마디1: 1-4-5-2-3-6 (691)
마디2: 2-5-4-1-3-6 (660)

마디3: 3-1-4-5-2-6 (660)
마디4: 4-5-2-3-1-6 (759)
마디5: 5-3-6-2-1-4 (689)
마디6: 6-3-2-1-4-5 (717)

따라서 위의 사례에 대한 초기해는 마디2나 마디3으로부터 출발하는 총비용 660의 해밀튼순환이 된다.

3. 초기해의 개선

초기해의 개선은 임의의 부분절단을 서로 교환하여 보아 그 개선비용이 음수이면 교환을 실행하여 점차적으로 최적해를 탐색해 나아간다.

부분절단(Partial Cut)이란 시작마디와 종료마디사이에 연속적으로 연결된 마디로 이루어진 경로(path)의 집합을 말한다. 부분절단 Pij(마디i-마디j)와 Pmn(마디m-마디n)을 교환하는 추가비용은 다음과 같이 된다.

$$C(i-1)m+Cn(j+1)-C(i-1)i-Cj(j+1)+ \\ C(m-1)i+Cj(n+1)-C(m-1)m-Cn(n+1)$$

예를 들어 위의 사례에서 마디2로부터 출발하는 2-5-4-1-3-6의 초기해에서 절단2-5와 절단1-3을 교환하면 1-3-4-2-5-6의 새로운 해밀튼순환이 얻어지는데 그 개선비용은 다음과 같다.

$$C42+C56-C62-C54+C61+C34-C41-C36= \\ 109+290-76-162+120+114-84-79= \\ 232$$

따라서 이 교환은 총비용을 232만큼 증가시키므로 시행하지 않는다.

위와 같은 과정을 반복하여 점차 해를 개선하여 나간다. 이와 같이 부분절단의 모든 조합(가능성)을 점검하면 최적해를 얻을 수 있을 것이다. 그러나 앞에서 이야기 한 바와 같이 문제의 크기가 커지면서 계산량이 폭발적으로 증가하게 되므로 현실에서는 다음과 같은 방법으로 탐색을 제한하게 된다.
첫째, 절단되는 마디의 선택을 확률변수로 바꾸어 고르는 방법(이 경우 기준은 대부분 비용이 된다)
둘째, 마디에 우선순위를 두어 선택가능한 가지의 수를 제한하는 선택알고리즘을 따로 활용하는 방법(김헌태 외 2003)
셋째, 마디가 골고루 선택되도록 순환의 구조를 만드는 방법

이중에서 우리는 셋째의 방법을 사용하기로 한다. 순차적인 마디의 연결로 표현한 초기해의 순환을 출발마디의 오름차순으로 정리하면 마디의 선택과 연산이 간편해진다. 예를 들어 위의 사례에서 초기해 2-5-4-1-3-6을 출발마디에 따라 오름차순으로 정리하면 다음과 같다.

<표 2> TSP사례 초기해의 출발마디별 표현

출 발	1	2	3	4	5	6
도 착	3	5	6	1	4	2

위와 같이 표현하면 절단마디의 선택이 한쪽으로 치우치지 않게 된다. 예를 들어 출발마디1~2의 선택은 1-3-6-2를 의미하게 된다. 즉 출발마디의 거리와 순환에 포함되는 마디의 개수가 반드시 일치하지 않고 유연성을 갖게 된다.

4. 실험과 비교

우리의 알고리즘은 현실에서 쓰일 수 있는 실용적인 해를 찾는 것이 주 목적이므로 이미 최적해가 알려진 TSPLIB의 문제에 적용하여 보았다. 그 결과는 다음과 같다.

초기해로부터 인접 출발마디만을(예를 들어 위와 같이 출발마디 1과 2사이의 마디, 실제 마디는 1-3-6-2) 교환한 1단계 개선한 해는 모두 최적해로부터 평균 5%의 범위 내, 시간은 3분 이내에서 발견되었다.1

표에서 보는 바와 같이 ftv33과 같이 작은 문제는 바로 최적해의 5%, 3%, 1%범위내에 도달하는데 거의 차이가 없이 바로 해결이 되었지만 문제의 크기(마디수)가 증가할수록 처리시간이 급속하게 증가하였다. 마디수 170개 까지의 문제에 대하여 1% 범위내의 해를 얻는데 최대 30분 정도의 시간이 걸렸다.

<표 3> TSPLIB문제의 해결시간(초)

문 제	마디	5%	3%	1%
ftv33	34	1	1	3
ftv47	48	3	8	14
ftv55	56	6	15	22
ftv64	65	9	22	42
ftv70	71	12	30	43
ftv90	91	22	51	155
ftv100	101	24	53	274
ftv110	111	32	175	466
ftv120	121	60	281	654
ftv130	131	71	466	743
ftv140	141	84	651	813
ftv150	151	127	824	1152
ftv160	161	182	953	1665
ftv170	171	236	1320	1813

또한 마디수 200개 까지의 다양한 크기의 TSP문제를 랜덤하게 생성하여 처리하여 1차개선하여(TSPLIB의 5%에 상응) 본 결과는 다음과 같이 처리속도에 큰 차이가 없었다.

<표 4> 랜덤문제의 1차개선 평균시간(초)

마디수	~50	~100	~150	~200
시 간	3	17	72	221

5. 맺음말

우리는 외판원문제의 실용적인 해를 구하는 가능성을 살펴보았다. 우리는 초기해의 설정과 이의 개선이라는 두 단계로 나누어 문제에 접근하였다. 우리의 알고리즘은 적절한 시간 내에(우리의 경우 30분) 마디수 200개 내외의 문제에 대하여 최적해 대비 1% 이내의 실용적인 해를 찾을 수 있음을 보여 주었다.

다만 싸이즈가 큰 문제에 대한 최적해를 찾는 과정은 아직도 많은 연구가 필요하며, 해의 개선과정에 대한 검토가 더 필요할 것으로 생각된다.

참 고 문 헌

[1] 김헌태, 권상호, 지영근, 강맹규(2003), “비대칭 외판원문제에서 호의 후보집합 결정문제”, 한국경영과학회지, 28권2호, pp.129-138.

[2] 백시현, 방인홍, 김내헌(2001.4), “경로문제상에서의 유전자알고리즘 성능분석”, 한국경영과학회/대한산업공학회 춘계공동학술대회, pp.524-527.

[3] Anily S. and Mosheiov G. (1994), "The travelling salesman problem with delivery and backhauls", *Operations Research Letters 16*, pp11-18.

[4] Barford(1998) et al, " Generating representative workloads for network and server performance evaluation", Proceedings of ACM SIGMETRICS '98, pp.151-160.

[5] Bianco L., Mingozzi A. and Ricciardelli S. (1993), "The Travelling Salesman Problem with Cumulative Costs", *Networks*, Vol.23, pp81-93.

[6] Christofides N. (1979), "The travelling salesman problem", Christofides et al.(eds), *Combinatorial Optimization*, Wiley & Sons, Chichester, pp131-149.

[7] Dantzig G.D., Fulkerson D.R. and Johnson S.M. (1954), "Solution of a large-scale traveling salesman problem", Operations Research 2, pp393-410.

[8] Deineko V.G., Rudolf R. and Woeginger G. (1998), "Sometimes Travelling is easy: The Master Tour Problem", *SIAM J, Discrete Math Vol. 11. No,1*, pp81-93.

[9] Fischetti M., Toth P. (1997), "A Polyhedral Approach to the Asymmetric Traveling Salesman Problem", *Management Science Vol.43 No.11*, pp1520-1536.

[10] Fowler T.B. et al(1999), "A Short tutorial on fractals and internet traffic", *Telecommunications Review, Vol.10(1999),* pp.1-15.

[11] Garfinkel R.S. (1985), "Motivation of Modeing", in Lawler et al (ed.), *Traveling Salesman Problem*, Wiley & Sons, Chichester, pp17-36.

[12] Greiner M.(1999), "The importance of power-tail distributions for modeling queuing system", *Operations Research,* Vol.47, pp313-326.

[13] Hoffman A.J. and Wolfe P. (1985), "History", *The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization*, Lawler et al eds., Wiley & Sons, Chichester, pp1-16.

[14] Krishnamoorthy M., (1990), *Contributions to the solution of the symmetric Travelling Salesman Problem*, Ph.D. Thesis, Imperial College, London, U.K.

[15] Jung S., Moon B.(2000), *Toward Minimal Restriction of Genetic Encoding and Crossovers for the 2D Euclidian TSP,* Manuscript.

[16] Laporte G., Asef-Vaziri and Sriskandarajah C. (1996), "Some Applications of the Generalized Travelling Salesman Problem", *Journal of Operational Research Society Vol.47,* pp1461-1467.

[17] Lawler E.L., Lenstra J.K., Rinooy Kan A.H.G, and Shmoys D.B. eds. (1985), *The Traveling Salesman Problem: A Guided Tour of Combinatorial Optimization*, Wiley & Sons, Chichester.

[18] Lin S. (1965), "Computer solutioms of the travelling salesman problem", Bell System Tech. J. 44, pp2245-2269.

[19] Little J.D.C., Murty K.G., Sweeny D.W. and Karel C. (1963), "An algorithm for the travelling salesman problem", *Operations Research 11*, pp972-989.

[20] Ozgur C.O. and Brown J.R., (1995), "A Two-Stage Traveling Sales Procedure for the Single Machine Sequence-Dependent Scheduling

Problem", *Omega*, Vol.23 No.2, pp205-219.

[21] Padeberg M.W. and Rinaldi G. (1987), "Optimization of a 532-city travelling salesman problem by branch and cut", *Operations Research Letters 6*, pp1-8.

[22] Paek G. (2002) *Polynomial constraints to eliminate the sub-tours for the Taveling Salesman Problem,* Sun Moon Journal of Social Sciences, Vol.3, pp.221-242.

[23] Paek G. (1992) *Contributions to the Solution of the Crew Scheduling Problem,* Ph.D. Thesis, Imperial College, London, U.K.

[24] Reinelt G. (1994), *The Traveling Salesman Problem, Springer Verlag.*

[25] Tassiulas L., (1997), "Worst Case Length of Nearest Neighbor Tours for the Euclidean Traveling Salesman Problem", *SIAM Journal on Discrete Mathematics, Vol.10. No.2*, pp171-179.