

Particle Swarm Optimization을 이용한 블랙 숄츠 옵션가격 결정모형 (Black-Scholes Option Pricing with Particle Swarm Optimization)

이주상, 이상욱, 장석철, 석상문, 안병하
광주 북 오룡 1 광주과학기술원 기전공학과
{jusang, yashin96, stniron, soakbong, bayhay@gist.ac.kr}

Abstract

The Black-Scholes (BS) option pricing model is a landmark in contingent claim theory and has found wide acceptance in financial markets. However, it has a difficulty in the use of the model, because the volatility which is a nonlinear function of the other parameters must be estimated. The more accurately investors are able to estimate this value, the more accurate their estimates of theoretical option values will be. This paper proposes a new model which is based on Particle Swarm Optimization (PSO) for finding more precise theoretical values of options in the field of evolutionary computation (EC) than genetic algorithm (GA) or calculus-based search techniques to find estimates of the implied volatility.

1. 서론

피셔 블랙과 마이론 솔츠가 제시한 주식옵션가격 결정모형 (블랙-숄츠 모형)[1]은 거래자들이 옵션의 가치를 평가하고 헤지하는 방식에 큰 영향을 미쳤다. 본 논문에서는 무배당 주식에 대한 유로피언 콜옵션과 풋옵션의 가치를 평가하기 위한 블랙숄츠 모형을 소개하고 그중 추정으로부터 구할 수 밖에 없는 내재 변동성을 보다 정확히 구하는 방법에 대해 연구하였다. 계산 방법으로 현재 많은 분야에서 그 성능을 인정받고 있는 Particle Swarm Optimization (PSO) 을 사용하였다.

PSO는 1995년 Kennedy와 Eberhart [2] 에 의하여 개발된 진화이론의 한 방법으로 아직까지 10년이 채 안 되어 국내에서는 아직까지 활발한 연구가 이루어지지 않고 있고 세계적으로 약 10여개국 정도에서 연구가 이루어지고 있다. 진화 계산을 기반으로 한 방법으로 유전 알고리즘과 비슷하나 교배, 돌연변이 등을 하지 않아 보다 간편한 장점을 가지고 있다[3].

내재변동성은 시장에서 관측 가능한 옵션가격과 나머지 옵션가격 결정요인으로부터 역으로 산출해 낸 변동성으로서 옵션의 시장가격에 내재된 변동성으로 현재 시장참가자들이 인식하고 있는 변동성이라고 할 수 있다. 다수의 옵션거래자들은 내재변동성을 옵션가격과 동일시하여 거래의 지표로 사용하는데 특정 옵션의 내재변동성이 높다는 것은 그만큼 해당 옵션이 높은 가격에 거래가 된다는 것을 의미한다. 하지만 내재 변동성의 값은 추정에 의한 계산으로 구할 수 밖에 없다

는데 어려움이 있다. 때문에 내재 변동성에 대한 연구가 오래전부터 계속되어 왔다(Manaster and Koehler [4], Krausz [5], Corrado and Miller [6], Chu and Freund [7]).

2. 블랙 숄츠 모형과 내재변동성

블랙 숄츠 옵션가격 결정모형의 식은 다음과 같다.

$$c = SN(d_1) - Xe^{rT} N(d_2) \tag{1}$$

where

$$d_1 = (\ln(S/X) + r_f T) / (\sigma T^{1/2}) + 0.5\sigma T^{1/2} \tag{2}$$

and

$$d_2 = d_1 - \sigma T^{1/2} \tag{3}$$

여기서 c 는 콜 옵션의 가격, S 는 주식의 가격, X 는 행사가격, T 는 만기일까지의 기간, r_f 는 무위험 이율, σ 는 내재 변동성, \ln 는 자연로그, $N(\cdot)$ 는 표준 정규 누적 분포 함수이다. 이중에서 나머지 값은 쉽게 구할 수 있으나 내재 변동성의 값은 추정에 의하여 구해야만 한다.

3. Particle Swarm Optimization

PSO의 기본 개념은 사회적 시스템을 간단히 시뮬레이션 하는 과정에서 얻게 되었다. 즉, 새들이 무리를 지어 다니는 현상이 매우 질서 정연하며 방향성이 있으면서도 예측하기 힘든 특징이 있는데 바로 이러한 새들 무리의 위치 및 방향을 그래픽으로 표현하는 것을 연구하다가 기본 개념이 만들어졌다. PSO는 초기에 랜덤한 해공간(모집단)을 가지고 시작한다는 점에서 그 시스템이 유전 알고리즘과 매우 비슷하다. 그러나 입자(particle)라고 불리는 잠재해집단이 랜덤한 속력을 자기게 되는 점과 이 입자들이 전체 해집합의 공간을 탐색한다는 점이 유전 알고리즘과는 다르다.

각 입자들은 해 공간 상에서 그들 좌표의 자취를 기억하고 있으며 지금까지의 자취 중 최선의 해(fitness)를 가지고 있는데 이를 pbest라고 부른다. 또 하나의 ‘최선의 해’는 전역해의 개념인데 지금까지 입자들이 가지고 있는 최선의 해의 집합중에서

가장 최선의 해이고 이를 gbest라고 한다. PSO의 개념은 각 단계에서 각각의 입자들은 그들의 pbest와 gbest를 향하여(pbest와 gbest의 벡터합) 그들의 움직임 속도를 바꾼다는 것이다.

PSO의 연산 과정은 다음과 같다.

1. d 차원의 해 공간상에서 위치와 속도를 랜덤하게 가진 입자들의 모집단을 구한다(초기화).
2. 각 입자들에 대해 적합도를 평가한다.
3. 각 입자들의 적합도를 그 입자의 pbest와 비교한다. 만일 현재의 적합도가 pbest보다 낮다면 pbest에 현재값을 할당한다.
4. 각 입자들의 적합도를 지금까지 모집단의 해 중 best와 비교한다. 만일 현재값이 gbest보다 낮다면 gbest에 현재값을 할당한다.
5. 다음의 식에 따라서 각 입자들의 속도와 위치를 계산한다.

$$v_{i+1} = w * v_i + c_1 * rand() * (p - x_i) + c_2 * rand() * (g - x_i) \quad (1)$$

$$x_{i+1} = x_i + v_i \quad (2)$$

6. 의사결정기준에 부합되거나 충분히 좋은 적합도를 가진 해를 얻거나 충분히 많은 세대를 거치게 될 때까지 2단계부터 루프를 계속 돌린다.

4. 실험

유전 알고리즘과 PSO의 성능을 비교하기 위해서 2005년 2월 27일부터 2005년 3월 10일까지의 356개의 KOSPI 200 관련 옵션 종가를 사용하였고 무위험 이율은 3개월 만기 국채를 사용하였다. 주요 관심사는 블랙 솔즈 모델의 내재변동성 σ 의 추정치 $\hat{\sigma}$ 을 구하는 것이다. σ 의 값을 변화시켜 가면서 실제 콜 옵션 값과 블랙 솔즈의 이론값의 차이를 최소화 시키는, 즉 평균 제곱근 오차의 최소화가 목적함수가 된다.

유전 알고리즘은 Whitley [8]가 제시한 서열기반의 일반적인 유전 알고리즘 기법을 사용하였다. 두 점 (two point) 교배 연산자와 단일 돌연변이 연산자를 설정하였고 그 값은 각각 0.6과 0.05이다. 또한 내재변동성의 값으로 30차원의 이진 코드를 사용

하였다. PSO는 유전 알고리즘과 같은 차원의 해집단을 구성하였고 파라미터 w, c_1, c_2, v_{max} 에 대해서 이전 연구를 참고하여 [9] 각각 1, 2, 2, 6의 값을 사용하였다.

5. 결과

표 1.에 나타나듯이 PSO가 유전 알고리즘보다 우월한 결과를 보여주었다.

Variable	Number	Mean	Std.Dev.	Min	Max
GA- $\hat{\sigma}$	356	0.252165	0.122227	0.033467	0.99491
PSO- $\hat{\sigma}$	356	0.218271	0.120411	0.03253	0.994935
Actual Call	356	10.057612	9.036544	0.01	35.2
GA-Call	356	10.098946	9.08217	0.008925	35.19932
PSO-Call	356	10.097488	9.087701	0.01	35.199389
Diff GA	356	0.041334	0.051673	0	1.752164
Diff PSO	356	0.039876	0.051157	0	1.752161

표 1. 유전 알고리즘과 PSO를 이용해 구한 내재 변동성 결과 비교

GA- $\hat{\sigma}$: 유전 알고리즘을 이용한 내재 변동성

PSO- $\hat{\sigma}$: PSO로 구한 내재 변동성

GA-Call: GA- $\hat{\sigma}$ 를 이용해 구한 블랙 솔즈 이론 값

PSO-Call: PSO- $\hat{\sigma}$ 를 이용해 구한 블랙 솔즈 이론 값

Diff GA: 실제 콜 옵션 값과 유전 알고리즘 콜 옵션 값의 차이

Diff PSO: 실제 콜 옵션 값과 PSO 콜 옵션 값의 차이.

PSO의 내재 변동성을 이용하여 얻은 블랙 솔즈 값과 실제 콜 옵션 값의 평균 편차는 0.039876이다. 이것은 유전 알고리즘으로 구한 평균 편차 0.041334보다 적은 값이다. PSO로 구한 값의 표준편차도 역시 유전 알고리즘으로 구한 값보다 적다. 특히, PSO로 구한 콜 옵션 값의 최대값과 최소값은 실제값과 일치한데 반해 유전 알고리즘은 오차를 가졌다. 마지막으로, 유전 알고리즘에 의해 추정된 내재 변동성의 값과 PSO에 의해 추정된 내재 변동성의 값은 3% 이상 차이가 났다.

6. 결과

이 논문은 블랙 솔즈 옵션가격 결정모형에서 PSO가 GA보다 내재 변동성을 구하는데 유용하다는 것을 보여 주었다. 그 이유 중 한가지는 아주 적은 수의 파라미터를 사용한다는 것이다. 어떤 상황에서는 아주 적은 수의 변수가 광대한 영역에서 좋은 성과를 올리기도 한다. Particle swarm optimization은 특별히 세분화된 요구에 부합되는 특정 응용분야에

도 잘 맞지만 광대히 넓은 분야의 응용분야에 유용하게 쓰일 수 있는 접근 방법이다. 아직까지 널리 쓰이고 있지는 않지만 그 적용분야는 널리 확대 될 수 있을 것이다.

7. 참고 문헌

1. Black, F. and Scholes, M. "The pricing of options and corporate liabilities", *Journal of Political Economy*, Vol.81, (1973) pp.637~653.
2. James Kennedy, Russell Eberhart, "Particle Swarm Optimization" *IEEE* (1995).
3. Daniel W. Boeringer, Douglas H., Werner, "Particle Swarm Optimization Versus Genetic Algorithms for Phased Array Synthesis", *IEEE Transaction on Antennas and Propagation*, Vol.52, No.3, (2004).
4. Manaster, S. and Koehler, G. "The calculation of implied variances from the Black- Scholes model: a note", *The Journal of Finance*, Vol.37, (1982), pp.227~230.
5. Krausz, J. "Option parameter analysis and market efficiency tests: A simultaneous solution approach", *Applied Economics*, Vol.17, (1985), pp. 885~897.
6. Corrado, C. J. and Miller, T. W. "Optimal volatility estimates based on Black- Scholes implied standard deviations" Working Paper, University of Missouri (1993).
7. Chu, Shin-Herng and Freund, S. "Volatility estimation for stock index options: a GARCH approach", *Quarterly Review of Economics and Finance*, Vol.36, (1996), pp.431~450.
8. Whitley D. "The GENITOR Algorithm and Selection Pressure: Why Rank-based Allocation of Reproductive Trials is Best". In: Schaffer D.J (Ed.) *Proceedings of the Third International Conference on Genetic Algorithms*, Morgan Kaufmann, San Mateo, (1989), pp.116-121.
9. R.C.Eberhart, Y.shi, "Particle swarm optimization: developments, applications and resources", *Evolutionary Computation*, Vol.1, 2001.