

# 공명기 분포에 따른 공명기 배열형 패널의 공명주파수 변화 Resonance frequency shifts of Helmholtz resonator array panel brought by change in resonator arrangements

김상렬\*·김양한\*\*

SangRyul Kim and Yang-Hann Kim

**Key Words :** Helmholtz resonator array panel(헬름홀쯔 공명기 배열형 패널), Absorption coefficient(흡음률), Resonator arrangement(공명기 분포), Radiation impedance(방사임피던스)

### ABSTRACT

Precise prediction of resonance frequency has been the subject of numerous papers related to Helmholtz resonator design because of its high performance at the frequency. The resonance frequency is dependent upon not only the internal dimensions of resonator but also the external boundary conditions such as the existence of other resonators in Helmholtz resonator array panel. However, the latter effect, which changes the external end correction of resonator, has not been well studied. We propose a formula to calculate the radiation impedance (or external end correction) of Helmholtz resonator array panel. Any distance between adjacent resonators and any angle of incidence can be allowed in the method. Numerical examples show how and how much the distance affects the resonance frequency of the panel. It is also found that the maximum absorption of the panel varies with the resonator arrangement.

## 1. 서 론

헬름홀쯔 공명기는 공명주파수에서의 높은 소음제어 성능을 가지기 때문에 공명주파수의 정확한 예측은 공명기 설계분야에서 중요한 연구주제의 하나로 인식되어 왔다. 헬름홀쯔 공명기에서 공명주파수  $f_r$  은 일반적으로 다음과 같은 식으로 예측된다.<sup>(1),(2)</sup>

$$f_r = \frac{c}{2\pi} \sqrt{\frac{S_n}{l_{eq}V}} \quad (1)$$

여기서  $S_n$  은 공명기 목의 단면적,  $l_{eq}$  는 목의 유효길이,  $V$  는 공동의 체적이다. 목의 유효길이는 다음과 같이 목의 길이  $l$  에 보정길이들이 더해진 형태로 나타난다.<sup>(1),(2)</sup>

$$l_{eq} = l + \delta_m + \delta_{ex} + \delta_v(2 + l/a) \quad (2)$$

여기서  $\delta_m$  는 내부보정길이,  $\delta_{ex}$  는 외부보정길이,  $\delta_v$  는 공기의 점성경계층두께(viscous boundary layer thickness)를 나타낸다. 식(2)에서 우변의 네 번째 항은 다른 항들에 비하여 매우 작기 때문에 보통 무시된다.

헬름홀쯔 공명기의 공명주파수 예측과 관련된 많은 연구[예를 들면 참고문헌 (2)-(6)]에서 내부보

정길이는 공동의 형상, 공명기 목의 위치 등에 따라 고찰되었으나 외부 보정길이는 무한 강체평면으로 배열된 원형 피스톤에서의 외부 보정길이 ( $\delta_{ex} \approx 8a/3\pi$ ) 값을 사용하여 왔다. 그러나 이 값을 사용하는 것은 단일공명기 해석에서는 유효하나 Fig. 1과 같이 다수의 공명기가 배열된 패널형태의 흡음시스템(공명기 배열형 패널)에서는 공명주파수에서의 큰 오차를 야기하게 된다.<sup>(7),(8)</sup> 이러한 원인으로서는 공명기간의 상호작용에 의한 공명기 입구에서의 방사임피던스 변화를 들 수 있다.

외부보정길이의 예측방법과 관련하여 Allard *et al.*<sup>(9)</sup>은 동일한 간격으로 공명기가 분포되어 있을 때 사용할 수 있는 공식을 제안하였다. 그러나 이 공식은 입사파의 파장( $\lambda$ )이 배열간격( $L$ ) 및 입사각도 ( $\theta_e$ )와 특별한 관계( $\lambda/\sin\theta_e = ND$ , 여기서  $N$  은 양의 정수)에 있을 경우에 이용될 수 있다. 또한 Kim *et al.*<sup>(10)</sup>은 방사체간의 상호 방사 임피던스를 다룬 Mechel<sup>(7)</sup>의 연구결과를 방사임피던스 계

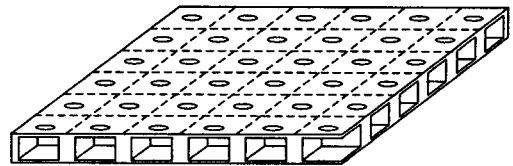


Fig. 1. Schematic sketches of Helmholtz resonator array panels. Its elementary cell corresponds to the rectangular area bordered with dotted lines on the respective top surface.

\* 정희원, 한국기계연구원 음향그룹  
E-mail : srkim@kimm.re.kr  
Tel : (042) 868-7466, Fax : (042) 868-7440

\*\* 정희원, 한국과학기술원 기계공학과

산에 적용함으로써 임의의 입사각도에 대하여 외부보정길이를 계산할 수 있음을 보였다. 그러나 이 방법은 공명기간의 간격이 공명기 입구 직경에 비하여 매우 큰 경우에만 유효하다.

본 논문에서는 공명기 배열형 패널에서 공명기간의 간격에 관계없이 임의의 입사각도에 대하여 외부보정길이를 계산할 수 있는 방법을 제시하고자 한다. 이는 무한 공명기 배열형 패널을 가정하고 공명기 입구간의 상호방사임피던스로부터 전체 방사임피던스를 적분함으로써 얻을 수 있다. 제안된 수식을 이용한 수치예제는 공명기 분포에 따른 공명주파수 변화를 정량적으로 고찰할 수 있음을 보여줄 것이다.

## 2. 이론적 해석

### 2.1 이론모델에 대한 기본가정

먼저 공명기 배열형 패널의 윗면은 Fig. 2와 같이 공명기 입구가 무한히 반복되는 무한 평면으로 간주한다. 여기서 공간적으로 반복되는 면적(단위셀)의 크기는  $L_x * L_y$  라고 하자. 공명기 입구를 제외한 모든 표면은 강체로 가정한다. 또한 공명기 입구는 원형이며 공명기 목에서의 속도는 공명기 입구면적 내에서 균일하다고 가정한다. 즉 공명기 목에서의 공기층은 강체 피스톤처럼 거동한다고 가정한다.

### 2.2 방사임피던스를 이용한 흡음률 표현

Fig. 2(a)와 같이 공명기 배열형 패널의 표면(xy-평면)위로 평면파  $p_e$  가 입사하는 경우를 생각해 보자.

$$p_e = P_e e^{-j(k_x x + k_y y - k_z z)} \quad (3)$$

여기서  $k_x = k \sin \theta_e \cos \phi_e$ ,  $k_y = k \sin \theta_e \sin \phi_e$ ,  $k_z = k \cos \theta_e$ ,  $k$  는 파수(wavenumber)이다. 또한 시간인자(time factor)로는  $e^{j\omega t}$  가 사용되었다. 이때 xy-평면 위에 있는 공명기 입구 위에서의 음압  $p_i$  는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$p_i = 2p_{e,i} + \rho c \zeta_{rad,i} u_i \quad (4)$$

여기서 아래첨자  $i$  는 공명기입구의 인덱스(index)를 나타내고,  $p_{e,i}$  는 구멍 중심에서의 입사파성분,  $\rho c \zeta_{rad,i}$  는 방사임피던스,  $u_i$  는 표면에 수직한 공명기 입구속도이다.  $u_i$  의 양의 방향은 Fig. 2에서

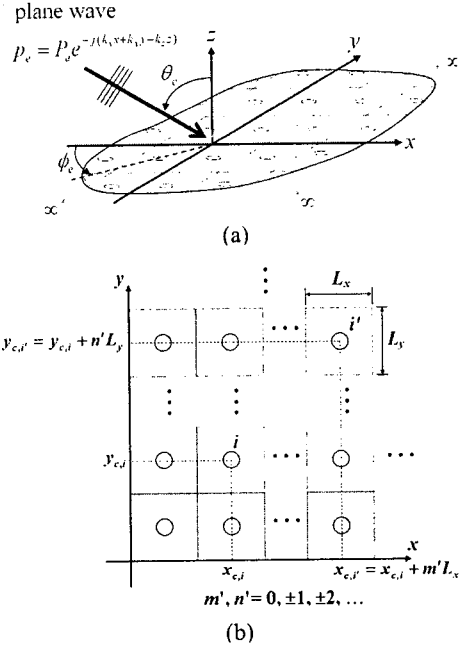


Fig. 2. Geometric configuration of a theoretical model: (a) incidence angles of a plane wave; (b) xy-coordinates of orifice centers.

양의 z 축 방향으로 선정하였다. 또한 공명기 입구에서의 경계조건은 표면 임피던스( $\rho c \zeta_i$ )로부터  $p_i = -\rho c \zeta_i u_i$  로 표현되므로 식 (4)에 대입하면 다음과 같이 공명기 입구속도를 얻을 수 있다.

$$u_i = -2p_{e,i} / \rho c (\zeta_{rad,i} + \zeta_i) \quad (5)$$

한편 공명기 배열형 패널의 표면이 주기적이므로 흡음률  $\alpha$  는 단위셀 면적내에서 흡음된 에너지에 대한 입사하는 입사에너지의 비로 정의될 수 있다.

$$\alpha = \frac{\text{Re}(\rho c \zeta_i) |u_i|^2 S_i / 2}{(L_x L_y / 2 \rho c) |P_e|^2 \cos \theta_e} = \frac{\pi a_i^2}{L_x L_y} \frac{\text{Re}(\zeta_i)}{\cos \theta_e} \left| \frac{\rho c u_i}{P_e} \right|^2 \quad (6)$$

여기서  $S_i = \pi a_i^2$  는 공명기 입구면적을,  $a_i$  는 공명기 입구의 반경을 나타낸다. 또한 식(6)에 식(5)를 대입하면 흡음률은 공명기 입구에서의 방사임피던스와 표면임피던스의 항으로 표현된다.

$$\alpha = \frac{\pi a^2}{L_x L_y} \frac{1}{\cos \theta_e} \frac{4 \text{Re}(\zeta)}{|\zeta_{rad} + \zeta|^2} \quad (7)$$

여기서, 모든 공명기는 동일하기 때문에 편의상 모든  $i$  에 대하여  $a_i = a$ ,  $\zeta_i = \zeta$ ,  $\zeta_{rad,i} = \zeta_{rad}$  로 표

현하였다.

### 2.3 방사임피던스의 유도

방사임피던스는  $xy$ -평면이 공명기 입구를 제외하고는 모두 강체이므로 공명기 입구간의 상호 방사임피던스를 이용하면 다음과 표현할 수 있다.<sup>(11)</sup>

$$\zeta_{rad,i} = \sum_{i'=-\infty}^{\infty} \zeta_{ii'} u_{i'} / u_i \quad (8)$$

여기서  $\rho c \zeta_{ii'}$ 는 공명기 입구  $i$ 와  $i'$ 간의 상호 방사임피던스를 나타내며 다음과 같이 표현된다.

$$\rho c \zeta_{ii'} = \frac{jk\rho c}{S_i} \iint_{S_i} \iint_{S_{i'}} G_N dS_{i'} dS_i \quad (9)$$

$$G_N = \frac{e^{-jkR}}{2\pi R} \quad \text{with } R = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} \quad (10)$$

한편 경계면이 주기적이고 무한하기 때문에 각각의 공명기 입구에서의 음향학적 거동은 입사파에 의한 가진항만 다를 뿐 동일하여야 한다. 즉  $u_r / u_i = p_r / p_i$ 의 관계가 만족한다. 이를 식(9)와 함께 식(8)에 대입하여 베셀함수의 적분표현<sup>(12)</sup>과 푸리에-베셀 적분식<sup>(13)</sup>을 이용하면 다음과 같은 무한급수형태의 방사임피던스를 얻을 수 있다.

$$\zeta_{rad} = \frac{\pi a^2}{L_x L_y} \cdot \frac{1}{\cos \theta_c} + \frac{\pi a^2}{L_x L_y} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{jk}{\sqrt{\beta_{mn}^2 - k^2}} \left( \frac{2J_1(a\beta_{mn})}{a\beta_{mn}} \right)^2 \quad (11)$$

여기서  $\beta_{mn} = \sqrt{(2\pi m/L_x - k_x)^2 + (2\pi n/L_y - k_y)^2}$ 이다. 식(11)에서  $\beta_{00}$ 을 제외한 모든  $m, n$ 에 대하여  $\beta_{mn} > k$ 인 경우를 생각해 보자. 즉

$$(m\lambda/L_x - \sin \theta_c \cos \phi_c)^2 + (n\lambda/L_y - \sin \theta_c \sin \phi_c)^2 > 1 \quad (12)$$

여기서  $\lambda = 2\pi/k$ 는 파장을 나타낸다. 이 때 식(11)의 우변 두번째항은 순허수가 된다. 즉  $jk\delta_{\alpha}$ 가 되고 이를 식(7)에 대입하면 평균임피던스를 이용한 흡음률 예측방법<sup>(9),(10)</sup>과 동일한 형태의 수식을 얻을 수 있다.

$$\alpha = \frac{4\text{Re}(\zeta)\cos \theta_c / \varepsilon}{|1 + (jk\delta_{\alpha} + \zeta)\cos \theta_c / \varepsilon|^2} \quad \text{with } \varepsilon = \frac{\pi a_1^2}{L_x L_y} \quad (13)$$

식(13)의 표현이 타당하기 위해서는 식(12)의 조건

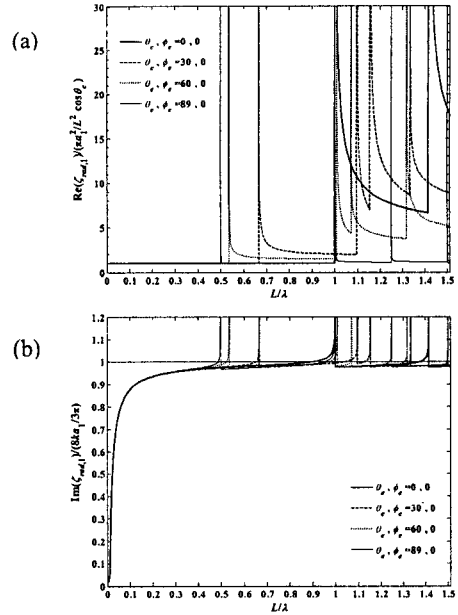


Fig. 3 Net radiation impedance  $\zeta_{rad,i}$  of Helmholtz resonator array panel: (a) real part; (b) imaginary part.  $L_x = L_y = L$ ,  $ka_1 = 0.01\pi$ .

이 만족되어야 한다. 여기서 식(12)가 만족되는  $L_x$ 와  $L_y$ 는 입사각도에 따라 달라지기 때문에 전체 입사각도에 대하여 식(13)의 표현이 유효하기 위해서는  $\max(L_x, L_y) / \lambda < 0.5$ 가 만족되어야 한다.

### 3. 수치계산에

Fig. 3은  $ka_1 = 0.01\pi$ ,  $L_x = L_y = L$ 인 공명기 배열형 패널에 대하여 계산된 방사임피던스의 실수부와 허수부를 보여주고 있다. 그림에서 방사임피던스의 실수부[Fig. 3(a)]는 식(12)가 만족하는 구간에서는 항상 식(11)에서 우변의 첫번째 항이 됨을 볼 수 있다. 그러나  $\beta_{mn} = k$ 가 되는 지점(예를 들면 수직입사에서  $L/\lambda = 1$ )에서 피크형태의 특이점을 가진다. 이 특이점이 발생하고 난 후에는 실수부가 식(11)의 우변 첫번째 항보다 증가하게 되는데 이 현상은 식(13)의 표현이 더 이상 만족될 수 없음을 말하고 있다.

허수부의 경우[Fig. 3(b)], 특이조건이 발생하기 전에는 공명기 배열간격이 증가함에 따라 급격히 증가하여  $8ka_1/3\pi$ 에 수렴함을 볼 수 있다. 이 그림은 방사임피던스의 허수부와 외부보정길이와의 관계를 고려하여 생각해 보면 외부보정길이의 변화

를 나타냄을 알 수 있다. 즉  $L/\lambda < 0.1$ 인 경우, 공명기 패널의 외부보정길이는  $8a/3\pi$ 에 비하여 10%이상 작은 값을 가지며 공명기의 간격이 줄어들수록 그 차이는 더욱 커지게 된다.

Fig. 4는 공명기간의 간격에 따른 흡음률 변화를 비교한 것이다. 여기서 공명기 입구에서의 표면임피던스는 참고문헌 (8)에서 사용했던 식을 사용하였다. 그림에서 공명기간의 간격의 변화는 공명주파수의 변화 뿐만 아니라 최대흡음률 값도 변화시킴을 확인할 수 있다.

#### 4. 결론

헬름홀쯔 공명기 배열형 패널에서의 방사임피던스를 계산할 수 있는 수식을 제안하였다. 이 방법은 공명기 입구간의 상호 방사임피던스를 고려하여 직접 적분함으로써 유도되었다. 이 방법은 공명기간의 간격과 입사각도에 관계없이 계산할 수 있는 장점이 있다.

방사임피던스의 허수부와 관련된 외부보정길이는 공명기간의 간격에 따라 매우 급격하게 변화함을 수치계산으로부터 확인할 수 있었으며 이는  $L/\lambda < 0.1$ 인 경우 흔히 사용되는 값  $8a/3\pi$ 에 비하여 10%이상의 변화를 야기하게 됨을 확인할 수 있었다. 그 차이는 공명기간의 간격이 줄어들수록 커짐을 확인하였다. 또한 실제 공명기 구조에 대한 흡음률 계산결과로부터 공명기간의 간격은 최대흡음률 값에도 영향을 미침을 확인하였다.

#### 후 기

본 논문은 교육인적자원부의 BK21사업에 의한 연구지원으로 수행되었습니다.

#### 참 고 문 헌

- (1) U. Ingard, 1953, "On the theory and design of acoustic resonators," J. Acoust. Soc. Am. **25**, pp. 1037~1061.
- (2) L.L. Beranek and I.L. Ver, 1992, Noise and Vibration control engineering, John Wiley & Sons, Inc., Chap. 8
- (3) R. C. Chanaud, 1994, "Effects of Geometry on the resonance frequency of Helmholtz resonators," J. Sound Vib. **178**, pp.337-348.
- (4) 하상태, 김양한, 1994, "1 자유도 등가 진동계로 이해하는 헬름홀쯔 공명기 특성의 한계점과 응용," 한국소음진동공학회논문집, 제 4 권, 제 2 호, pp.209~219.
- (5) 서상현, 김양한, 2004, "공명기 배열을 이용한 소음기의 음향학적 특성", 한국소음진동공학회논문집, 제 14 권, 제 10 호, pp. 975~982.

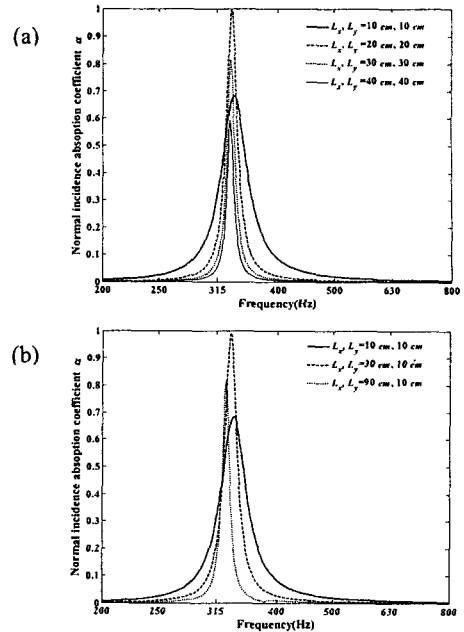


Fig. 4. Normal incidence absorption coefficient of 'N=1' resonator array panel with various cell sizes. All the resonators have a neck of 5 mm radius and 5 mm length, and an air cavity of 25 mm radius and 80 mm length.

- (6) A. Selamet and Z. L. Ji, 2000, "Circular asymmetric Helmholtz resonators," J. Acoust. Soc. Am. **107**, pp. 2360~2369.
- (7) F. P. Mechel, 1988, "Note on the radiation impedance, especially of piston-like radiators," J. of Sound and Vibration, **123**(3), pp. 537~572.
- (8) 김상렬, 김양한, 2005, "저주파수흡음을 위한 헬름홀쯔 공명기 배열형 패널," 한국소음진동공학회논문집, 제 15 권, 제 8 호, pp.924~930.
- (9) J. F. Allard, *Propagation of sound in porous media* (Elsevier, London, 1993), Chap. 10.
- (10) S.R. Kim, M.-S. Kim, Y.-H. Kim, and Y.-W. Kim, 2000, "Absorptive Characteristics of Resonator Panel for Low Frequency Noise Control, and its Applications," Proc. of Intnoise2003, paper no. N932.
- (11) R. L. Prichard, 1960, "Mutual Acoustic impedance between radiators in an infinite rigid plane," J. Acoust. Soc. Am. **32**, pp.730~737.
- (12) G.N.Watson, 1966, A Treatise on the theory of Bessel functions, second edition, Cambridge university press, Chapter II, pp.20~22.
- (13) G.N.Watson, 1966, A Treatise on the theory of Bessel functions, second edition, Cambridge university press, Chapter XIV, pp.453~453