

디지털 제어기법에 의한 체인드시스템의 제어

남택근*, 노영오*, 안병원*, 허광석**

Chained systems control using digital state steering

Taek-Kun Nam*, Young-Oh Roh*, Byong-Won Ahn*, Gwang-Seok Heo**

*목포해양대학교 기관시스템공학부

**선박검사기술협회

Abstract : In this paper, a state steering strategy using digital control method for chained system is presented. The chained system can be derived from the velocity or acceleration constraints that cannot be integrable. Especially, the chained system derived from an acceleration constraints is called the high order chained system. Such a system classified as a nonholonomic systems and cannot be controlled to its equilibrium points by continuous and time-invariant controller. Therefore discontinuous and time varying controller should be applied to control nonholonomic system. Using variable transformation, two sub system can be obtained from the chained or high order chained system. Deadbeat control and iterative state steering methods are proposed to control the systems that obtained from the variable transformation. Simulation results are given to show the effectiveness of the proposed control scheme.

Key words: nonholonomic system(비 홀로노믹 시스템), high order chained system(고차체인드 시스템), digital control(디지털제어), deadbeat control(데드비트제어)

1. 서론

본 연구에서는 체인드 시스템(chained system)의 안정화 제어기법에 대해 살펴보고자 한다. 체인드 시스템은 비 홀로노믹 시스템으로 구분되고 이러한 비 홀로노믹 시스템은 적분 불가능한 구속조건으로부터 도출된다¹⁾. 엄밀하게는 비 홀로노믹적인 구속조건으로부터 좌표변환을 통하여 체인드 시스템을 얻을 수 있고, 속도 구속조건과 가속도의 구속조건으로부터 각각 체인드 시스템, 고차 체인드 시스템을 유도할 수 있다. 이러한 비 홀로노믹 시스템은 시 불변의 연속적인 제어기로는 평형점에서의 안정화 제어가 불가능하다²⁾. 이러한 특성은 제어기 설계관점에서는 대단히 흥미있는 부분이라 할 수 있다.

체인드 시스템에 대한 종래의 연구를 살펴보면 불변매니폴드(invariant manifold)를 이용한 제어³⁾, 시변피드백제어에 의한 제어^{4)~6)}, 반복적인 디지털제어기법을 이용한 결과⁷⁾ 등이 발표되었다.

한편 가속도의 구속조건으로부터 도출되는 고차 체인드 시스템에 있어서 Imura⁸⁾ 등은 비 구동관절을 가지는 3링크 매니플레이터의 고차 체인드 시스템으로의 변환 및 안정화제어기를 제안하였

다. Astolfi¹⁰⁾⁻¹¹⁾ 등도 불연속적인 피드백제어에 의한 고차 체인드 시스템의 제어법을 제안하였다.

하지만 고차 체인드시스템은 체인드 시스템에 비하여 연구결과가 부족하고 일반화된 해석법 등의 체계화가 필요한 분야라 할 수 있다.

본 논문에서는 먼저 속도구속조건으로부터 도출되어지는 체인드시스템에 대해 멀티레이트디지털제어기법을 적용하여 시스템의 상태변수를 원점에 안정화시키는 제어기법에 대해 살펴본다.

다음으로 고차 체인드 시스템에 대해서는 Oriolo 등이 체인드시스템에 적용한 제어기법⁷⁾을 적용하고자 한다. 제어기설계에 있어서는 체인드시스템 및 고차 체인드 시스템에 대해 변수변환을 행하여 두 개의 서브시스템으로 분리하고 각각의 시스템에 대해 데드비트제어와 반복제어기를 설계하여 안정화 제어를 행한다. 아울러 시물레이션을 통하여 제안한 제어기법의 유용성을 검증한다.

2. 제어대상

본 연구에서의 제어대상은 다음과 같다.

먼저 속도구속조건으로부터 도출되는 체인드시스템의 일반형은

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_2 u_1 \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= x_{n-1} u_1 \end{aligned} \quad (1)$$

과 같고 본 논문에서는 계산을 간단하게 하기 위하여 $n = 4$ 인

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= u_1 \\ \dot{x}_2 &= u_2 \\ \dot{x}_3 &= x_2 u_1 \\ \dot{x}_4 &= x_3 u_1 \end{aligned} \quad (2)$$

의 체인드 시스템을 제어대상으로 한다. 다음으로 가속도의 구속조건으로부터 도출되는 고차체인드 시스템¹⁰⁾에 있어서는

$$\begin{aligned} \ddot{x}_1 &= u_1 \\ \ddot{x}_2 &= u_2 \\ \ddot{x}_3 &= x_2 u_1 \end{aligned} \quad (3)$$

을 제어대상으로 한다.

3. 제어기 설계

3.1 디지털제어기법을 이용한 체인드 시스템의 제어

본 절에서는 (2)와 같이 표현되는 체인드 시스템에 대하여 시스템의 모든 상태변수를 원점에 안정화시키는 제어기를 설계하고자 한다.

먼저 (2)의 시스템에 대하여 $z = (x_1, x_4, x_3, x_2)^T$ 와 같은 좌표변환을 행하면

$$\begin{aligned} \Sigma_1 : \dot{z}_1 &= u_1 \\ \Sigma_2 : \begin{bmatrix} \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & u_1 & 0 \\ 0 & 0 & u_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 := AZ + bu_2 \end{aligned} \quad (4)$$

의 시스템이 얻어진다. 단, $Z = (z_2, z_3, z_4)^T$ 이다.

(4)에 있어서 Σ_1 의 상태변수인 z_1 은 제어입력 u_1 과 직결되어 있어서 초기값으로부터 원점까지 안정화시키는 방법은 간단하다. 하지만 Σ_2 는 제어입력 u_1 이 Σ_2 의 상태변수와 결합하게 되고 제어입력이 시변이 되면 Σ_2 또한 시변시스템이 되게 된다. 즉, 제어입력 u_1 이 Σ_2 에 영향을 주어 Σ_2 의 상태변수를 안정화시키는 u_2 를 설계하는 문제는 단순하게 취급하기가 곤란하다.

본 논문에서는 이러한 문제점을 해결하기 위하여 u_1 이 일정샘플시간동안 0이 아닌 일정한 값을 유지할 수 있는 디지털제어 기법을 모색하였다. Σ_1 은 1차원, Σ_2 는 3차원이므로 T 초 이후에 모든 상태변수가 원점에 수렴할 수 있도록 그림 1과 같이 제어입력 u_1 을 T 초간 일정하게 유지하도록 하고 u_2 의 제어입력을 $T/3$ 초 간격으로 3회에 걸쳐 갱신하도록 한다.

일반적으로 선형 시불변 시스템

$$\dot{z}(t) = Az(t) + bu(t) \quad (5)$$

에 대해 $z[i] = z(iT)$ 라 하고, $u(t)$ 가 $iT \sim (i+1)T$, $i \geq 0$ 구간에서 일정값으로 주어진다면,

$$z[i+1] = e^{AT}z[i] + \int_0^T e^{A\tau} d\tau bu[i] \quad (6)$$

가 같은 이산시간 시스템으로 표현할 수 있다.

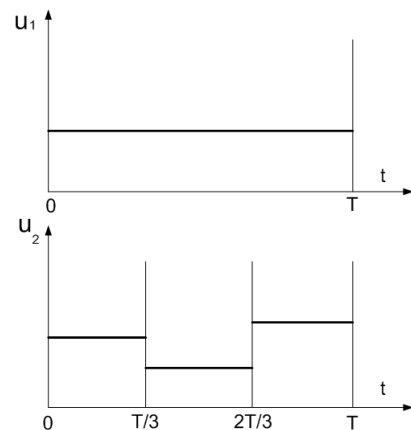


그림 1 체인드 시스템의 제어 입력
Fig. 1 Control inputs for chained system

또한 n 차의 이산시간 시스템에 있어서는 페루프의 극을 전부 원점에 지정하면, 임의의 $z[0] = z(0)$ 에 대해 $z[n] = z(nT) = 0$ 이 되고 이것을 데드비트 제어(deadbeat control)라고 한다.

이하에서는 이와 같은 데드비트제어기법을 (4)의 시스템에 적용하고자 한다. 먼저, Σ_1 에 대해 샘플링 주기 T 로 이산화 한 후

$$u_1 = -z_1(0)/T \quad (7)$$

의 제어입력을 적용하여 $z_1(T) = 0$ 를 달성시킨다.

Σ_2 에서는 샘플링 주기 $T/3$ 으로 이산화를 시키면

$$Z(k+1) = A_d Z(k) + b_d u_2(k) \quad (8)$$

가 얻어진다. 단, $A_d = e^{AT/3}, b_d = \int_0^{T/3} e^{Ar} dr b$

이다. (8)에 대한 제어입력을

$$u_2(k) = -f Z(k) \quad (9)$$

와 같이 결정하고, (9)의 제어입력을 (8)에 피드백 시킨 페루프 시스템

$$Z(k+1) = (A_d - b_d f) Z(k) \quad (10)$$

의 고유치가 0 이 되도록 하는 데드비트제어를 행하는 것이다. 즉,

$$\lambda(A_{k1} - b_{k1}f) = 0 \quad (11)$$

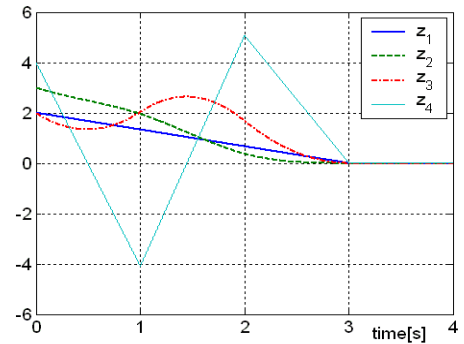
을 만족하는 피드백게인 f 를 구하여 (9)이 제어입력을 활용하는 것이다.

제어기법의 유용성을 검증하기 위하여 체인드 시스템($n=4$)에 대한 제어를 행하였고 그 결과를 그림 2에 나타내었다.

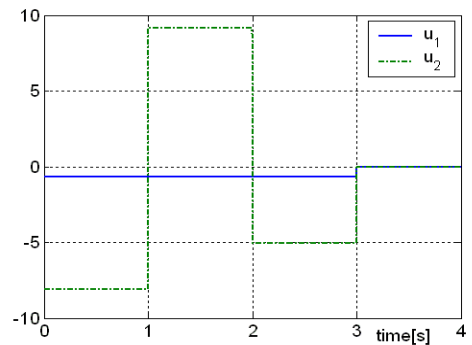
상태변수를 $X = (z_1, z_2, z_3, z_4)^T$ 로 하여 초기값을 $X(0) = (2, 3, 2, 4)^T$ 로 하였고 목표치는 $X(t_f) = 0$ 으로 하였다. 제어시간은 4[s], Σ_1, Σ_2 에 대한 샘플링시간은 각각 3[s], 1[s]로 하였다.

그림 2 (a)와 그림 2 (b)는 각각 시간에 따른 상태변수의 값과 제어입력을 나타내고 있으며 제어주기 $T=3[s]$ 에서 모든 상태 변수값이 0에 수렴하고 있

음을 알 수 있다.



(a)



(b)

그림 2 상태변수의 출력값 및 제어입력

Fig. 2 State variables output and control inputs

3.2 고차 체인드 시스템의 제어

앞 절에서는 (2)의 체인드시스템에 대한 제어기법을 살펴보았고 본 절에서는 (3)과 같이 표현되는 고차체인드 시스템의 안정화 제어기법에 대해 논의하고자 한다. 먼저, 고차 체인드 시스템에 대하여 변수변환

$$z = (x_1, \dot{x}_1, x_3, \dot{x}_3, x_2, \dot{x}_2)^T \quad (12)$$

를 행하면

$$\begin{aligned} \Sigma_1 : \dot{z}_1 &= z_2 & \Sigma_2 : \dot{z}_3 &= z_4 \\ \dot{z}_2 &= u_1 & \dot{z}_4 &= z_5 u_1 \\ & & \dot{z}_5 &= z_6 \\ & & \dot{z}_6 &= u_2 \end{aligned} \quad (13)$$

이 얻어진다. 제어문제는 Σ_1, Σ_2 로 표현되는 시스템의 안정화 제어이다. 해석을 용이하게 하기 위

하여 우선 (13)의 시스템을 다음과 같이 표현한다.

$$\Sigma_1 : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_1 \\ \dot{z}_a = A_a z_a + b_a u_1 \end{cases} \quad (14.1)$$

$$\Sigma_2 : \begin{cases} \begin{bmatrix} \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \\ \dot{z}_5 \\ \dot{z}_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & u_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_3 \\ z_4 \\ z_5 \\ z_6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_2 \\ \dot{z}_b = A_b z_b + b_b u_2 \end{cases} \quad (14.2)$$

단, $z_a = (z_1, z_2)^T$, $z_b = (z_3, z_4, z_5, z_6)^T$ 을 의미한다.

(14)의 시스템 구성을 살펴보면 체인드 시스템 (4)와 유사한 구조를 가지고 있음을 알 수 있다.

(14.1)은 선형시스템의 가제어 표준형 (controllable canonical form)시스템이므로 널리 알려져 있는 제어기법을 적용하여 제어할 수 있다. 하지만 Σ_1 에 대한 제어입력 u_1 을 결정하더라도 u_1 이 $A_b(u_1)$ 의 형태로 Σ_2 에 영향을 미치게 되어 제어입력 u_2 를 설계하는 문제는 단순하게 취급하기가 곤란하다.

이처럼 고차 체인드 시스템의 제어에 있어서도 앞서 살펴 본 체인드 시스템의 제어에서와 마찬가지로 제어문제가 발생함을 알 수 있다. 한편, Oriolo 등은 체인드 시스템에 대하여 그림 3과 같은 제어입력을 제안하였다⁷⁾. 단, 그림 3은 (1)이 일반형에서 $n = 3$ 인 경우의 제어입력을 나타내고 있다.

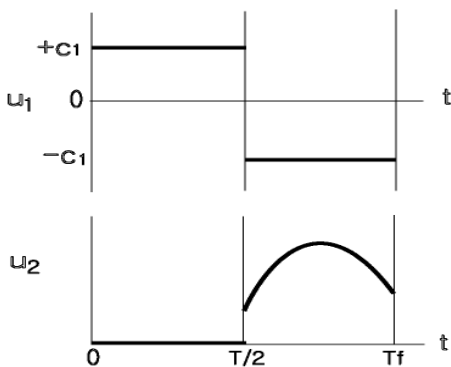


그림 3 Oriolo의 제어 입력⁷⁾
Fig. 3 Control inputs⁷⁾

그림 3의 제어입력은

$$u_1 = \begin{cases} -c_1 - 2x_{10}, & t \in [0, T/2), \\ c_1, & t \in [T/2, T_f) \end{cases}$$

$$u_2 = \begin{cases} 0, & t \in [0, T/2), \\ c_2 + c_3(t - 1/2), & t \in [T/2, T_f) \end{cases} \quad (15)$$

와 같이 표현된다. 즉, u_1 에 $\pm c_1$ 의 제어입력을 가해 x_1 을 제어하고 x_2, x_3 에 대해서는 반 주기동안 시변(time-varying)의 제어입력 $u_2(t)$ 를 설계하여 제어를 행하고 있다. 단, c_1 은 상수이다.

본 절에서의 제어대상인 시스템 (4)에 대하여 디지털제어기법을 적용한다면 그림 4와 같은 제어를 생각할 수 있을 것이다. 즉, 2차 시스템인 Σ_1 에 대하여 2회의 샘플링을 행하는 데드비트제어를 행하고 u_1 이 일정한 제어입력을 취하는 시간 ($0 < t < T$)에 4차인 Σ_2 에 대해 4회의 샘플링을 취하는 데드비트제어를 행하면 모든 상태변수를 안정화시킬 수가 있다. 하지만 샘플링 시간 T 이후 제어입력 u_2 는 제어목적에 아무런 영향을 미치지 못하고 있음을 알 수 있다.

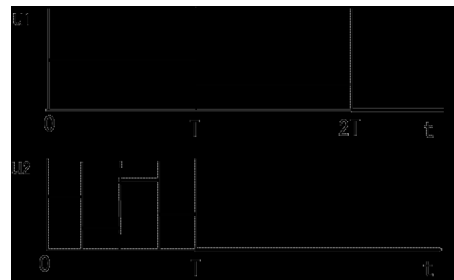


그림 4 데드비트제어 입력
Fig. 4 Deadbeat control inputs

본 연구에서는 이러한 점을 개선할 수 있는 제어입력을 그림 5와 같이 제안한다.

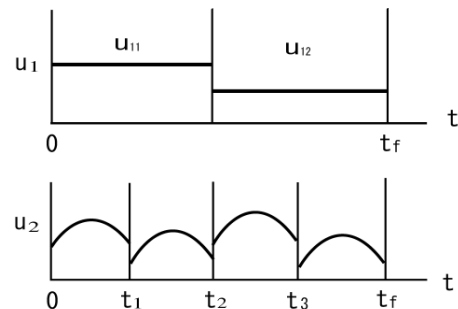


그림 5 반복제어 입력
Fig. 5 Iterative control inputs

먼저 2차 시스템인 Σ_1 에 대하여 2번의 샘플링 주기로 데드비트제어를 행한다. 아울러 Σ_2 에 대해서는 Oriolo ⁷⁾의 체인드 시스템에 대한 제어기 설계법을 적용하여 4번의 샘플링주기로 제어를 행하는 것이다. 제어입력을 정리하면 다음과 같다.

$$u_1(t) = \begin{cases} u_{11}, & 0 \leq t \leq t_2 \\ u_{12}, & t_2 < t \leq t_f \end{cases} \quad (16)$$

$$u_2(t) = \sum_{j=1}^4 c_j \lambda_j(t), c_j \in R$$

먼저 Σ_1 의 시스템에 대해서는

$$z_a(k+1) = \begin{bmatrix} 1 & T \\ 0 & 1 \end{bmatrix} z_a(k) + \begin{bmatrix} T^2/2 \\ T \end{bmatrix} u_1(k) \quad (17)$$

$$:= A_{k1} z_a(k) + b_{k1} u_1(k)$$

과 같이 이산화를 하고 제어입력을

$$u_1(k) = -f z_a(k) \quad (18)$$

와 같이 결정한다. 아울러 (18)의 제어입력을 (17)에 피드백시킨 폐루프 시스템

$$z_a(k+1) = (A_{k1} - b_{k1}f) z_a(k) \quad (19)$$

의 고유치가 0 이 되도록 하는 데드비트제어를 행한다.

다음으로 Σ_2 의 제어에 대해서 살펴본다. (16)의 제어입력 u_2 를 (4.2)에 가하면 z_b 의 해석은 다음과 같이 할 수 있다. u_{11} 의 제어입력하에서는

$$z_b(t_1) = V_1 z_b(t_0) + W_1 c \quad (20)$$

$$z_b(t_2) = V_2 z_b(t_1) + W_2 c$$

가 된다. 단, $V_2 = V_1 = \exp(A_b T)$,

$$W_2 = W_1 = \int_0^T e^{A_b(T-\sigma)} B [\lambda_1 \cdots \lambda_4] d\sigma,$$

$A_b = A_b(u_{11})$, $c = (c_1, c_2, c_3, c_4)^T$ 을 의미하고 W_2 는 적분구간을 $t_1 \sim t_2$ 로 하여 W_1 과 같은 방법으로 계산한 것이다.

u_{12} 의 제어입력 하에서 z_b 는

$$z_b(t_3) = V_3 z_b(t_2) + W_3 c \quad (21)$$

$$z_b(t_4) = V_4 z_b(t_3) + W_4 c$$

와 같다. 단, $V_2 = V_1 = \exp(A_b(u_{11})T)$,

$$W_2 = W_1 = \int_0^T e^{A_b(T-\sigma)} B [\lambda_1 \cdots \lambda_4] d\sigma,$$

$A_b = A_b(u_{12})$ 을 의미하고 W_4 는 적분구간을 $t_3 \sim t_4$ 로 하여 W_3 과 같이 계산한 것이다.

(20)과 (21)로부터 최종제어시간 t_f 에서의 z_b 는

$$z_b(t_f) = V z_b(t_0) + W c \quad (22)$$

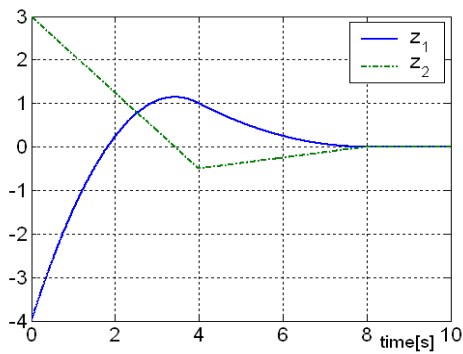
과 같이 해석되고 c 는 (22)로부터

$$c = W^{-1}(z_b(t_f) - V z_b(0)) \quad (23)$$

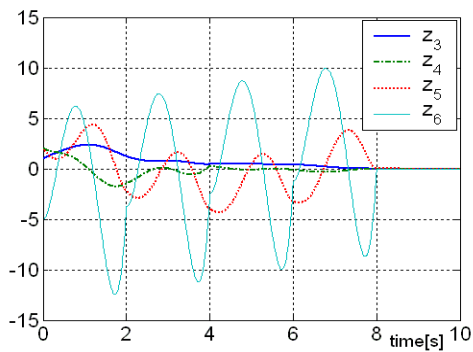
과 같이 계산된다. 여기에서 $V = V_4 V_3 V_2 V_1$, $W = V_4 V_3 V_2 W_1 + V_4 V_3 W_2 + V_4 W_3 + W_4$ 이다.

적용한 제어기법의 유용성을 검증하기 위하여 고차 체인드 시스템에 대한 제어를 행하였다. 그림6, 그림7은 시뮬레이션의 결과를 나타내고 있다. 상태변수를 $X = (z_1, z_2, z_3, z_4, z_5, z_6)^T$ 로 하여 초기값을 $X(0) = (-4, 3, 3, 2, 2, -5)^T$ 로 하였고 목표치는 $X(t_f) = 0$ 으로 하였다. 제어시간은 10[s], Σ_1 , Σ_2 에 대한 샘플링시간은 각각 4[s], 2[s]로 하였다. u_2 제어입력 설계 시 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = t, \lambda_3 = t^2, \lambda_4 = t^3$ 로 설정하였다.

그림 6 (a)는 Σ_1 의 상태변수 z_1, z_2 의 시간에 따른 추이를 나타낸다. 그림 6 (b)는 Σ_2 의 상태변수 z_3, z_4, z_5, z_6 의 시간에 따른 변화를 나타낸다. 시뮬레이션 결과로부터 모든 상태변수가 8[s]에 원점에 안정화됨을 알 수 있다.



(a)



(b)

그림 6 상태변수의 출력
Fig. 6 Time evolution of outputs

그림 7은 제어입력을 나타내고 있다. u_1 , u_2 는 각각 2회, 4회의 샘플링으로 제어되고 있음을 알 수 있다.

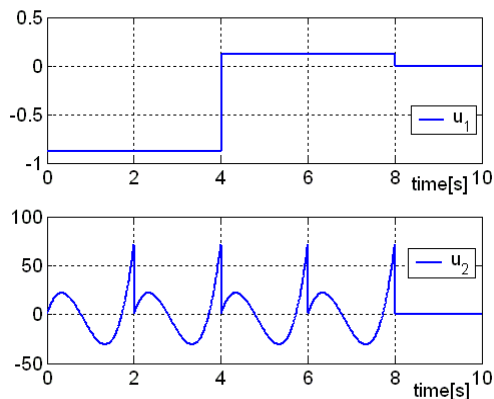


그림 7 제어입력
Fig. 7 Control inputs

4. 결론

본 논문에서는 속도의 구속조건으로부터 얻어지는 체인드 시스템과 가속도의 구속조건으로부터 얻어지는 고차 체인드 시스템에 변수변환을 행하고, 얻어진 두 개의 시스템에 대하여 데드비트 제어 및 반복제어기법을 적용하여 시스템의 초기값을 원점에 안정화시키는 제어기를 설계하였다. 아울러 시뮬레이션을 통하여 제안한 제어기법의 유용성을 확인하였다.

참고 문헌

1. Murray, 1993, "Control of nonholonomic systems using chained forms", Fields institute communications, pp. 219 ~ 245.
2. Brockett, 1983, "Asymptotic stability and feedback stabilization", Differential geometric control theory, pp. 181 ~ 191.
3. H. Khenouf, C. C. Wit, 1995, "On the construction of stabilizing discontinues controllers for nonholonomic systems, Proc. of IFAC Nonlinear Control Systems Design Symposium, pp. 747 ~ 752.
4. J. B. Pomet, 1992, "Explicit design of time-varying stabilizing control laws for a class of controllable systems without drift", Systems and control letters, vol. 18, pp. 14 ~ 158.
5. O. Egeland, E. Berglund and O. J. Sordalen, 1994, "Exponential stabilization of nonholonomic underwater vehicle with constraint desired configuration", Proc. of IEEE Robotics and Automation, pp. 20 ~ 25.
6. C. Samson, 1993, "Time-varying feedback stabilization of a car-like wheeled mobile robot", Int. J. of Robotics Research, vol. 12, no. 1, pp. 55 ~ 64.
7. P. Lucibello, G. Oriolo, 2001, "Robust stabilization via iterative state steering with an application to chained-form systems", Automatica, vol. 37, pp. 71 ~ 79.
8. J. Imura, K. Kobayashi, T. Yoshikawa, 1996, "Nonholonomic control of 3 link planar manipulator with a free joint", Proc. of IEEE CDC, pp. 1435 ~ 1436.
9. G. Oriolo, Y. Nakamura, 1991, "Control of mechanical systems with second order

- noholonomic constraints", pp. 2398 ~ 2403.
10. M. C. Laiou, A. Astolfi, 1998, "Exponential stabilizatioin of high order chained systems", Proc. of IFAC Symposium on Nonlinear Control Systems Design, pp. 649 ~ 654.
 11. M. C. Laiou, A. Astolfi, 1999, "Discontinuous control of high order chained systems", Sytems and Cotnrol Letters, pp. 309 ~ 322.
 12. H. K. Khalil, "Nonlinear systems", Prentice Hall.