수평평판의 막응축에서 전도 열저항의 영향

이 억 수+

The Effect of Heat Conduction resistance on Laminar Film Condensation along a Horizontal Plate

Euk-Soo Lee†

Abstract : The effect of heat conduction resistance on laminar film condensation of the pure saturated vapor in forced flow over a flat plate has been investigated as boundary layer solutions. A efficient numerical methods for water are proposed for its solution. The momentum and energy balance equations are reduced to a nonlinear system of ordinary differential equations with four parameters: the Prandtl number, Pr, Modified Jacob number, Ja^*/Pr, defined by an overall temperature difference, a property ratio $\sqrt{\rho_l\mu_l/\rho_v\mu_v}$ and the conjugate parameter ζ. The similarity and simplified solutions obtained reveal the effects of the conjugate parameter.

Key words : Conjugate laminar film condensation(복합 층류 막응축), Similarity solution(유사해), Simplified Solution(근사해)

1. 서 론

대부분의 층류 막응축 연구는 응축액체와 고체 경계면 사이의 온도는 등온조건으로 가정하고 미리 주어진다. 그러나 더 정확한 해석은 고체의 전도 열저항을 고려하여, 고체-유체 경계면의 온도는 주어져 있지 않고 고체벽에서 전도열전달과 유체에서의 응축열전달을 동시에 풀어야 한다. 이런 종류의 복합열전달(conjugate heat transfer) 문제를 평판위의 강제대류 열전달 문제에서 Luikov et al.[1]가 처음 해석하였으며, 단상(single phase)의 전도-대류열전달에 대하여는 많은 연구가 이루어졌다.

수평원관 내에서 막응축에 대하여는 Memory et al.[2]가 연구하였는데, 관성력과 대류항은 무시하고 근사해를 구하였다. 그리고 Honda와 Fujii[3]는 수평원관 주위를 흘러내리는 층류 막응축 문제를 전도 열저항을 고려하여 복합 열전달 문제로서 수치해석으로 연구하였는데, 응축액의 대류항과 관성력항을 무시하였지만 기존의 실험결과와 잘 일치함을 보였다.

수평평판의 강제대류 막응축 문제에서 응축 막에 작용하는 중요한 힘은 액체-증기 경계면에서 전단응력이며, 응축되는 증기의 운동량 변화가 전단응력에 영향을 준다. Cess[4]는 운동량 방정식에서 관성력항을 무시하고 에너지 방정식에서 대류항을 무시하고 해석하였으며, Koh[5]는 관성력항과 대류항을 고려하여 해석하였는데, 무차원 응축액의 두께, 프란틀 수 그리고 유체의 물성치비가 이미 주어져 있는 조건에서 수치 해석적 방법으로 유사해를 구했다. 그러나 복합열전달 문제로서 수평평판에서 강제대류 막응축에 대한 해석은 그 복잡성 때문에 매우 제한되어 있다.

본 연구에서는 수평평판에서 강제대류 층류 막응축 문제에 대하여 액체-증기 경계면의 전단응력이 존재하는 경우에, 복합열전달 문제로서 유사해를 구하고 액상의 운동량 방정식에서 관성력항과 에너지 방정식에서 대류항을 무시한 근사해를 구해서 비교해보고자 한다.

+ 이억수(부경대학교 기계공학부),E-mail:esolee@pusan.ac.kr, Tel: 051)620-1617

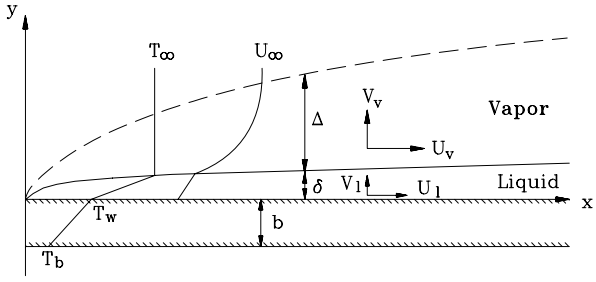

Fig. 1 Physical model and coordinates

2. 지배방정식

2.1 유동모델

Fig. 1 은 유동모델에 대한 좌표계를 나타낸다. 증기의 유동속도 U_∞ 는 평판과 나란한 방향(x)으로 흐르고, 속도분포는 그림과 같이 균일하다. T_b 는 포화증기의 온도이고 T_w 는 응축액과 두께가 b 인 평판의 경계면에서 온도이며, T_b 는 평판의 다른 면에서의 온도이다. T_b 와 T_w는 일정하고 평판의 열저항을 무시할 수 있다면, $T_b = T_w$ 가 된다. 그러나 복합열전달 문제로서T_b 가 주어진 경우에 T_w 값은 일반적으로 알려져 있지 않고 응축액의 유동과 평판의 열전도에 의존한다. T_w 는 T_s 보다는 낮아서 막응축이 일어난다고 가정한다. 또한 정상상태 층류유동이며, 파동이 없다고 가정한다. 응축액과 증기 경계층의 두께들은 응축이 일어나는 평판의 길이에 비해 상대적으로 얇기 때문에, 증기의 경계층과 마찬가지로 응축액체의 유동에 대해서도 경계층 방정식을 적용할 수 있다. 응축 액막은 얇고 찬 벽면과 인접하므로 액체의 온도분포는 응축액에 수직한 방향(y)에 따라 크게 변화하고, y-방향의 열전달량이 크기 때문에 액체와 증기, 두 상에서 x-방향의 열전달은 무시할 수 있다.

x-방향의 운동량 방정식에서 중력의 영향은 무시할 수 있고, 증기 경계층의 두께 바깥으로는 비압축성 포텐셜 유동이므로 기체의 압력분포는 일정하다. 이와 같이 유동모델은 2 차원 층류 정상유동이며, 증기의 에너지 방정식을 무시할 수 있고, 액체쪽의 운동량 방정식과 에너지 방정식에서 부력과 점성에 의한 에너지 손실을 무시한다.

2.2 지배방정식과 경계조건

먼저 평판(고체)의 열저항을 무시할 수 있는 경우, 즉, $T_b = T_w$ 인 경우에, 액상과 증기상에서 경계층 편미분 방정식과 경계조건들을 Blasius형의 유사변환을 사용하여 상미분 방정식들로 바꿀 수 있으며 아래와 같다

유사변수와 유동함수 :

$$\eta_l = y\sqrt{U_\infty / x\upsilon_1}, \quad \eta_v = (y-\delta)\sqrt{U_\infty / x\upsilon_v}$$
$$\varphi_l = \sqrt{U_\infty \upsilon_1 x} f(\eta_l), \quad \varphi_v = \sqrt{U_\infty \upsilon_v x}\ f(\eta_v) \tag{1}$$

액상 :

$$f''' + 1/2\, f f'' = 0 \tag{2}$$
$$f(0) = f''(0) = 0$$
$$\theta'' + 1/2\ Pr\theta' = 0 \tag{3}$$
$$\theta(0) = 1,\ \theta(\eta_\delta) = 0$$

증기상 :

$$F''' + 1/2\ \ F\ F'' = 0 \tag{4}$$
$$F'(\infty) = 1$$

액체-증기 경계면에서 경계조건:

$$F(0) = R\ f(\eta_\delta), \quad F'(0) = f'(\eta_\delta),$$
$$F''(0) = R\ f''(\eta_\delta) \tag{5}$$
$$\frac{C_{pl}(T_s - T_w)}{h_{fg}\ Pr} = -\frac{f(\eta_\delta)}{2\theta'(\eta_\delta)} \tag{6}$$

여기서

$$\theta = \frac{T - T_s}{T_w - T_s}, \qquad R = \sqrt{\frac{\rho_l \mu_l}{\rho_v \mu_v}}$$

이고 기호 Prime(′)은 유사변수(η)에 대한 미분을 의미한다. 응축 액체막에 관한 물성치를 평가하기 위

한 기준온도는 $T_f = T_w + 0.5(T_s - T_w)$ 를 사용하였다.

3. 복합열전달

3.1 유사해

평판의 열저항을 무시할 수 없는 일반적인 경우, 즉 $T_b \neq T_w$ 인 경우에, 일반적으로 응축열전달은 열전달량이 매우 크기 때문에, 고체벽을 따른 축(x) 방향의 열전도는 직교방향(y)의 열전도에 비하여 무시할 수 있다. 그리고 전도와 대류에 대한 에너지 보존 방정식들은 응축액과 고체의 경계면에서 열유속(heat flux)이 연속이라는 조건으로 서로 연결 된다. 이 경우에 고체 벽 내의 온도분포는 선형이고 아래와 같이 표현된다.

$$k_s(T_w - T_b)/b = k_l\left(\frac{\partial T_l}{\partial y}\right)_{y=0} \qquad (7)$$

그리고 식(7)은 응축액 온도와 고체경계면의 온도가 연속이라는 경계조건과 함께 다음과 같이 표현된다.

$$T_w = T_l(x,0) = \frac{k_l b}{k_s}\left(\frac{\partial T_l}{\partial y}\right)_{y=0} + T_b \qquad (8)$$

여기서 무차원 고체-액체 경계면 온도 θ_w 를 정의하면 아래와 같다.

$$\theta_w = \frac{T_w - T_s}{T_b - T_s} \qquad (9)$$

그러면 식(1)과 식(9)의 정의 그리고 식(3)의 경계조건을 이용해서 식(8)을 무차원 온도 $\theta(\eta)$의 함수로 변환하면 아래와 같다.

$$\theta_w - 1 = \zeta\,\theta_w\theta'(0) \qquad (10)$$

여기서 무차원 복합변수 ζ 는 아래와 같이 정의된다.

$$\zeta = \frac{k_l}{k_s}\frac{b}{x}\widetilde{Re}_x^{1/2} \qquad (11)$$

이 복합변수는 Luikov[6] 가 단상의 복합 대류 열전달 문제의 해석에서 제안한 무차원 복합 변수 $(k_f b/k_s x)Re_x^{1/2}\mathrm{Pr}^{1/3}$ 와 Char과Chang[7]가 자연대류 열전달에 제안한 변수 $(k_f b/k_s L)Gr^{1/4}$와 유사하다. 이 식에서 복합변수 ζ 는 응축액의 대류 열저항과 평판(고체)의 전도 열저항의 비(ratio)를 의미한다. 한 예로 ζ = 0, 즉 벽의 열저항 b/k_s 가 응축액의 열저항 δ/k_f 보다 매우 작을 경우에는 $T_b \cong T_w$ 가 된다. 그리고 식(10)에서 무차원 고체-액체 경계면 온도 θ_w 가 주어지면 $\theta'(0)$을 계산할 수 있음을 알 수 있다.

계산방법은 온도 T_b 이 주어지면, 무차원 액체-고체 경계면 온도 θ_w 가 가정되고 식(10)에서 무차원 온도구배 $\theta'(0)$가 구해진다. 다시 무차원 응축액 두께 η_δ 가 가정되며, 또한 $f'(\eta_\delta)$도 가정되면 경계조건으로 운동량 방정식 (2)는 풀린다. 식(5)에서 경계조건과 함께 증기의 운동량 방정식(4)를 풀어서 경계조건식 (5)의 만족여부를 판정한다. 만족하지 않으면 새로운 $f'(\eta_\delta)$ 를 가정해서 앞의 과정을 반복한다. 만족하면 $f'(\eta_l)$의 값들과 경계조건으로 에너지 방정식 (3a)를 푼다. 경계면의 에너지 평형식 (6)의 좌변과 우변을 비교하여 오차가 매우 작으면, 에너지 방정식에서 얻어진 무차원 온도구배 $\theta'(0)$을 식(10)서 구한 $\theta'(0)$값과 다시 비교하고 오차범위에 들어오면 그 값들을 해로 취하고, 오차가 클 경우에는 다시 θ_w 을 가정하여 앞의 전 과정을 다시 반복한다. 복합열전달에 대한 유사해는 4 개의 무차원 변수, 즉 수정된 Jakob수 Ja^*/Pr, 프란틀 수 Pr, 물성치비 R 그리고 무차원 복합변수 ζ 에 의해서 직접적으로 영향을 받는다. 일단 경계층 방정식들을 풀면, 경계면 온도 θ_w와 함께 상미분 방정식의 독립변수 η 의 함수로 무차원 속도분포와 무차원 온도분포등를 얻을 수 있다.

3.2 근사해

Cess 에 의하면, 액체막에서 관성력과 열대류는 무차원변수 Ja/Pr 가 3 보다 작을 때는 다른 힘에 비하여 무시할 수 있다고 보고하였다. 실제로 대부분의 강제대류 층류 막응축 문제에서 응축액은 매우 얇고 응축액의 속도는 매우 느리므로, 액체유동에서 관성력항과 대류항은 무시할 수 있을 것이다. 따라서 액체막이 얇은 경우에는, 응축액의 온도분포도 선형으로 가정할 수 있으며 식(7)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{k_s\,(T_w - T_b)}{b} = \frac{k_l(T_s - T_w)}{\delta(x)} \qquad (12)$$

여기서 $\delta(x)$는 액체막의 두께이다. 액체막(혹은 열경계층)의 두께는 유체의 물성치와 속도 그리고 표면온도 등에 의존한다.

식(3)의 에너지 방정식에서 대류항($=1/2Pr\,\theta'$)을 무시하면 $\theta'(\eta_\delta) = -(1/\eta_\delta)$이 되고, 식(2)의 운동량 방정식에서 관성력항(=$1/2\,ff''$)을 무시하면 $f(\eta_\delta) = A\eta_\delta^2$, $f'(\eta_\delta) = 2A\eta_\delta$, $f''(\eta_\delta) = 2A$ 가 된다. 여기서 A 는 임의의 상수이다. 식(6)에 이 값들을 대입하고, 식(1)에서 $\eta_\delta = \delta/x\widetilde{Re}_x^{1/2}$ 이므로 다시 $\delta(x)$에 대하여 정리하면, 아래와 같이 표현된다.

$$\delta(x) = x\left(\frac{Ja}{\mathrm{Pr}}\frac{2}{A}\right)^{1/3}\widetilde{Re}_x^{-1/2} \qquad (13)$$

여기서 $\widetilde{Re}_x^{1/2}(= U_\infty x/\nu_l)$ 는 자유유동의 증기속도와 응축액의 물성치를 사용한 이상(two-phase) Reynolds 수이고, Ja 는 $T_s - T_w$ 를 기준으로 한 Jacob 수이다. 또한 식(12)를 최대온도차 인 $T_s - T_b$ 로 나누고, 식(13)을 대입하여 정리하면 아래와 같다.

$$1 - \theta_w = \zeta\,(A\mathrm{Pr}/2Ja^*)^{1/3}\,\theta_w^{2/3} \qquad (14)$$

여기서 Ja^* 는 $T_s - T_b$ 를 기준으로 한 Jacob 수로서 $Ja^* = Ja/\theta_w$ 의 관계가 있다. 식(14)에서 $z = \theta_w^{1/3}$ 로 두면, 아래와 같이 3차 다항식으로 나타낼 수 있다.

$$z^3 + \sigma z^2 - 1 = 0 \qquad (15)$$

여기서 복합변수 $\sigma = \zeta\,(A\,\mathrm{Pr}/2Ja^*)^{1/3}$ 이고, z 는 σ 만의 함수이다. 이 식은 3 차식이므로 3개의 근이 존재하는데, $\sigma = 0$ 인 경우를 제외하고는 항상 3개의 실근이 존재한다. 그러나 물리적으로 의미가 있는 값은 $0 \le z \le 1$ 범위이고, 그 범위에서는 무차원 변수 σ 의 값에 따라 항상 1 개의 실근이 존재한다. 따라서 비선형 방정식의 근을 구하는 방법인 Newton-Raphson 방법으로 무차원 경계면 온도 θ_w 를 구할 수 있다. 경계면 온도 θ_w 는 σ 의 증가와 함께 단조 감소한다. 여기서 σ 는 ζ 와 Ja^* 그리고 상수 A 의 곱으로 이루어져 있기 때문에, 실제로 복합 층류 막응축에 대한 근사해도 Ja/Pr, Pr, R 그리고 ζ 의 함수이다.

계산방법은 먼저 유체의 종류와 무차원 변수 ζ 그리고 T_b 가 주어진다. 상수 A 가 가정되면 무차원 복합변수 σ 가 계산되며, 식(15)에서 경계면온도 θ_w 가 구해지고, T_w 을 기준으로 막온도 T_f 의 평가와 함께 η_δ 와 $f(\eta_\delta)$, $f'(\eta_\delta)$, $f''(\eta_\delta)$ 가 구해진다. 그리고 액체-증기 경계면 경계조건에서 $F(0)$, $F'(0)$를 알 수 있으며 $F'(\infty) = 1$의 조건과 함께 식(4)를 풀어서 F'' 과 Rf''의 값을 비교하고 오차가 만족스러울 정도로 아주 작을 때 해(solution)로 취한다. 오차가 큰 경우에는 상수 A 를 다시 가정하고 앞의 과정을 반복한다. 적분방법으로 4 계 Runge-Kutta method를 사용했으며, Iteration 방법으로 사격법을 사용했다

일단 복합 열전달에 대한 지배 방정식들을 풀면 $f(\eta_\delta)$, $f'(\eta_\delta)$, $f''(\eta_\delta)$, 그리고 $\theta'(0)$ 의 값들을 이용할 수 있다. 즉 액체-증기의 경계면 속도, 경계면 전단응력, 무차원 응축률 그리고 무차원 열전달율 등도 계산할 수 있다.

4. 계산결과 및 고찰

복합열전달 문제로서 응축에 대한 연구는 매우 제한되어 있다. 본 연구에서는 1 atm 에서 대표적인 유

체인 물(water)에 대하여 유사해와 근사해를 구해서, 수정된 Jacob 수가 증가함에 따른 작동유체와 무차원 복합변수 ζ 의 영향 등을 알아본다.

4.1 고체-액체 경계면 무차원 온도

Fig. 2 는 수정된 Jacob 수 Ja^*/Pr 에 대한 고체-액체 경계면 무차원 온도 θ_w 를 보여준다. 전체적으로는 무차원 복합 변수 ζ 가 증가함에 따라 θ_w 가 감소하고 있음을 알 수 있다. 그리고 Ja^*/Pr 가 증가함에 따라 θ_w 가 조금씩 증가하는데, 처음에는 변화가 큼을 알 수 있다. 이것은 Ja^*/Pr 가 작은 경우에는, 즉 응축액의 두께가 매우 얇은 경우에는, ζ 의 변화와 함께 응축액에 대한 물성치인 Pr 와 R 의 변화가 크기 때문인데, 물성치 Pr와 R은 Ja^*/Pr의 값이 약 0.01 이하의 경우에는 기준온도에 대한 물성치 평가에서 점성의 변화에 대한 영향을 많이 받아서 급격하게 변하고, Ja^*/Pr 의 값이 약 0.01 이후로는 Pr 와 R의 변화가 완만하다. 그러나 실제 물질의 물성치를 사용하지 않고 단지 복합 무차원 변수의 영향에 대하여 연구한 Luikov 는 이런 경향은 보이지 않고 무차원 경계면온도 θ_w는 일정한 값을 가진다. 그리고 1atm에서 물(water)에 대하여 근사해의 유사해에 대한 오차는 Ja^*/Pr가 증가함에 따라 증가하지만, 약 1%이내에서 잘 일치하고 있다.

4.2 응축액 두께와 응축율

Fig. 3 에서 무차원 응축액 두께, 경계면 속도 그리고 무차원 열전달 계수에 대하여 복합 무차원 변수 ζ 의 영향을 볼 수 있다. 응축액 두께 η_δ 는 수정된 Jacob 수 Ja^*/Pr의 값이 증가함에 따라 처음에는 급격하게 증가하다가 다시 완만히 증가하는데, Fig. 2 과 같이 Ja^*/Pr의 값이 작은 경우에는 무차원 복합변수 ζ 의 영향을 많이 받고 있으며, η_δ 는 ζ 가 증가함에 따라 감소한다.

무차원 응축률 $\dot{m}\widetilde{Re}_x^{0.5}/\rho_l U_\infty$ 는 무차원 변수 Ja^*/Pr의 값이 증가함에 따라 거의 선형으로 증가함

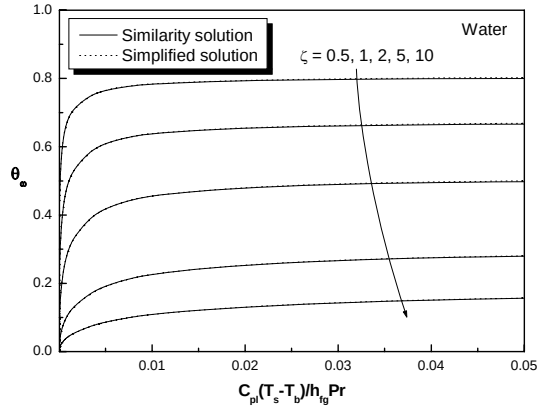

Fig. 2 Variation of interfacial temperature $\theta_w$with Ja^*/Pr

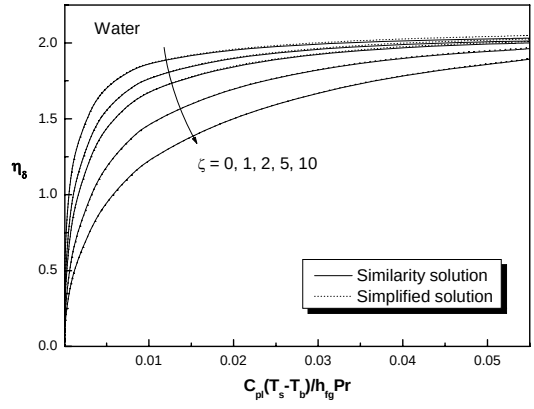

Fig. 3 Modified Jacob number Ja^*/Pr and liquid film thickness η_δ

을 Fig. 4 에서 볼 수 있는데, 무차원 복합변수 ζ 의 값이 증가함에 따라서 감소한다. 그리고 과 액체-기체 경계면 속도 U_i/U_∞ 와 경계면 전단응력 $0.5C_f\widetilde{Re}_x^{0.5}$ 에 대한 ζ 의 영향은 Fig. 4 의 경계면 전단응력과 경향이 거의 유사하므로 나타내지 않았다. 그리고 근사해의 유사해에 대한 오차는 약 4% 이내이다.

4.3 열전달 계수

Fig. 5를 살펴보면, 무차원 국소 열전달 계수

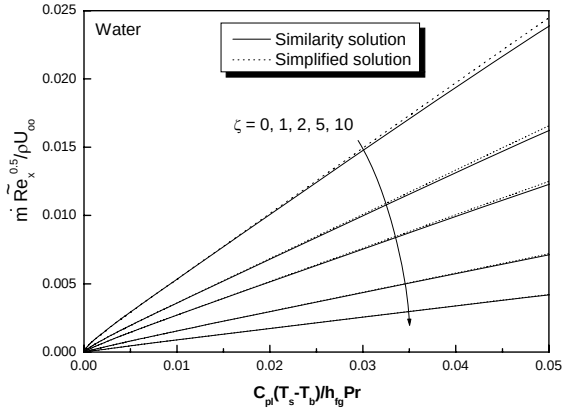

Fig. 4 Effect of conjugate parameter ζ on thecondensate flow rate

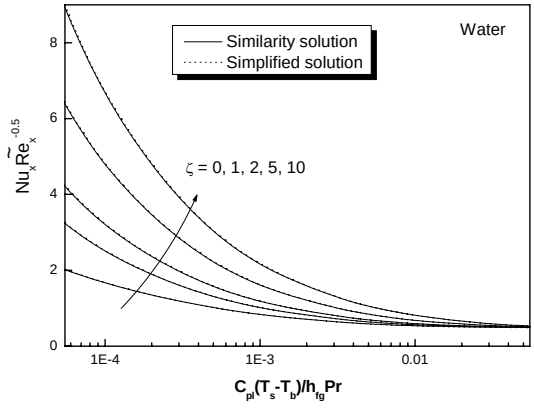

Fig. 5 Effect of conjugate parameter ζ on the local Nusselt number with Ja^*/Pr

$Nu_x\widetilde{Re}_x^{-0.5}$ 는 수정된 Jacob 수 Ja^*/Pr의 값이 증가함에 따라서 단조적으로(monotonically) 감소하고 있음을 알 수 있다. 무차원 경계면 온도 θ_w 에서 설명하였듯이 Ja^*/Pr 가 작은 경우에, 복합 무차원 변수 ζ 의 영향을 크게 받고 있음을 알 수 있다.

참고문헌

[1] A. V. Luikov, V. A. Aleksashenko and A. A. Aleksashenko, "Analytical methods of solution of conjugated problems in convective heat transfer," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.14, pp.1047-1056, 1971.

[2] S. B. Memory, W. C. Lee and J. W. Rose, "Forced convection film condensation on a horizontal tube-effect of surface temperature variation," Vol. 36, No.6, pp.1671-1676, 1993

[3] H. Honda and T. Fujii, " Condensation of flowing vapor on a horizontal tube-numerical analysis as a conjugate heat transfer problem," ASME J. Heat Transfer, Vol. 106, pp. 841-848, 1984.

[4] R. D. Cess, " Laminar film condensation on a flat plate in the absence of a body force," Z. Angew. Math. Phys., Vol.11, pp. 426-433, 1960.

[5] J.C.Y. Koh, "Film condensation in a forced convection boundary layer flow, " Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.5, pp. 941-954, .1962.

[6] A. V. Luikov, " Conjugate convective heat transfer problems," Int. J. heat Mass Transfer, Vol. 17, pp. 257-265, 1974.

[7] M. I. Chair and C. L. Chang, " Effect of wal conduction on natural convection flow of micropolar fluids along a flat plate," Int. J. Heat Mass Transfer, Vol. 40, No.15, pp. 3641-3652, 1997.