

# 위상 보정된 웨이블릿 변환을 이용한 영상 확대

\*김상수, \*\*엄일규, \*김유신

\*부산대학교 전자공학과, \*\*밀양대학교 정보통신공학부

e-mail : \*{sasokim, kimys}@pusan.ac.kr, \*\*ikeom@mnu.ac.kr

## Image Interpolation Using Phase-Shifted Wavelet Transforms

\*Sang-Soo Kim, \*\*Il-Kyu Eom, \*Yoo-Shin Kim

\*Dept. of Electronic Engineering, Pusan National University

\*\*Dept. of Info. & Comm. Engineering, Miryang National University

### Abstract

Parameter estimation for the probability model of wavelet coefficients is essential to the wavelet-domain interpolation. However, phase uncertainty, one well-known drawback of the orthogonal wavelet transforms, make it difficult to estimate parameters. In this paper, we exploit a phase shifting matrix in order to improve the accuracy of estimation. Nonlinear modeling to capture the interscale characteristics is also described. The experimental results show that the proposed method outperforms the previous wavelet-domain interpolation method as well as the conventional bicubic method.

### I. 서론

공간영역에서 사용하는 bilinear 보간이나 bicubic 보간 같은 전통적인 선형 필터링 기법들은 영상에 연속성을 가정하기 때문에 과도한 흐림 현상이나 계단 현상(staircase effect)과 같은 문제점을 지닌다. 이를 해결하기 위해 다양한 기법들이 제안되었다. [2-4]

웨이블릿 영역에서의 영상 보간은 영상에 연속성에 대한 제약을 가하지 않아 고주파 성분을 효과적으로 복구할 수 있는 장점이 있다. 또한 JPEG 2000이 웨이

블릿 변환에 기반하기 때문에 공간 영역에서의 보간보다 효율적이다. 웨이블릿 변환에 기반한 영상 보간은 저해상도 영상의 웨이블릿 밴드에 고주파 부대역을 외삽하는 문제로 볼 수 있다. 웨이블릿 영역의 영상 보간은 계수들이 가지는 잘 정의된 통계적 특성과 스케일간 의존성을 이용한다[1, 5]. 이 방법들은 스케일간 계수의 위치가 가지는 불확실성 때문에 웨이블릿 계수 모델에 대한 매개변수를 추정하는 데 어려움이 있다.

본 논문에서는 이 문제를 해결하기 위해 필터 뱅크 이론으로부터 유도한 위상보정 행렬을 이용하였다. 위상보정 행렬을 통해 복구된 계수들은 스케일간 계수 크기에 대한 선형 모델을 통해 고주파 부대역의 분산을 추정하는 데 이용된다. 모의실험에서 제안 방법은 전통적인 bicubic 보간법과 웨이블릿에 기반한 기존의 방법보다 우수한 성능을 보였다.

### II. 위상보정 행렬

위상보정은 짝수 위상의 계수로부터 홀수 위상의 계수를 구하는 문제이다. 어떤 신호를 웨이블릿 변환하면 필터링 단계 까지는 선형 위상의 특성이 유지되지만 다운 샘플링을 거치면서 선형 위상의 특성은 사라지고 위상에 대한 불확실성이 1 비트 만큼 발생하게 된다. 위상의 불확실성은 외삽할 부대역의 계수 위치를 정하는 데 어려움을 준다. 이를 해결할 수 있는 한 가지 방법은 데시메이션(decimation)이 없는 웨이블릿 변환을 이용하는 것인데 이는 웨이블릿 계수를 다시 역변환하는 과정을 필요로 한다. 필터 뱅크 이론으로부터 유도된 위상 보정 행렬을 이용하면 역변환 없이

위상 문제를 해결 할 수 있다[6]. 위상보정 행렬에 대해 간단히 요약해 보겠다.

$x(n)$ 을 입력 신호라 하고,  $s(n)$ 과  $d(n)$ 은 각각 저주파 부대역의 계수와 고주파 부대역의 계수를 나타낸다고 하자. 필터뱅크 이론으로부터 다음의 결과를 알 수 있다.

$$\begin{bmatrix} S_e(z) \\ D_e(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} H_{me}(z) \begin{bmatrix} X(z^{1/2}) \\ X(-z^{1/2}) \end{bmatrix} \quad (1)$$

$$H_{me}(z) = \begin{bmatrix} H_0(z^{1/2}) & H_0(-z^{1/2}) \\ H_1(z^{1/2}) & H_1(-z^{1/2}) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} S_o(z) \\ D_o(z) \end{bmatrix} = \frac{1}{2} H_{mo}(z) \begin{bmatrix} X(z^{1/2}) \\ X(-z^{1/2}) \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$H_{mo}(z) = \begin{bmatrix} H_0(z^{1/2}) - H_0(-z^{1/2}) \\ H_1(z^{1/2}) - H_1(-z^{1/2}) \end{bmatrix}$$

여기서  $H_0(z)$ 와  $H_1(z)$ 는 각각 웨이블릿 분해뱅크에 있는 저대역 통과 필터와 고대역 통과 필터이다. 첨자 ‘e’와 ‘o’는 짝수 위상과 홀수 위상을 나타낸다. (1)과 (2)를 결합하면,

$$\begin{bmatrix} S_o(z) \\ D_o(z) \end{bmatrix} = T_1(z) \begin{bmatrix} S_e(z) \\ D_e(z) \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{bmatrix} S_e(z) \\ D_e(z) \end{bmatrix} = T_2(z) \begin{bmatrix} S_o(z) \\ D_o(z) \end{bmatrix}$$

이때,

$$T_1(z) = T_2(z) = H_{me}(z) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} H_{me}^{-1}(z) \quad (4)$$

행렬  $T(z) = T_1(z) = T_2(z)$ 를 위상보정 행렬이라고 부른다. 만약 필터뱅크가 완벽복원(perfect reconstruction)의 조건을 만족하면  $\det(H_{me}(z)) = 2$  이고  $\det(H_{mo}(z)) = -2$ 가 되므로 위상보정 행렬을 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$T(z) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} T_{11}(z) & T_{12}(z) \\ T_{21}(z) & T_{22}(z) \end{bmatrix} \quad (5)$$

여기서,  $T_{11}(z) = H_0(z^{1/2})H_1(-z^{1/2}) + H_0(-z^{1/2})H_1(z^{1/2})$ 가 되고  $T_{12}(z) = -2H_0(z^{1/2})H_0(-z^{1/2})$ ,  $T_{21}(z) = -2H_1(z^{1/2})H_1(-z^{1/2})$  이며  $T_{22}(z) = -T_{11}(z)$  이다. 위상보정은 웨이블릿 공간의 선형 위상 특성을 되찾게 할 수 있다. 위상보정은 웨이블릿 영역에 직접 적용할 수 있으므로 데시메이션을 사용하지 않는 웨이블릿 변환보다 효율적이다.

### III. 제안 방법

웨이블릿 계수의 확률밀도함수는 라플라스 확률모델, 가우스 혼합모델 또는 일반화된 가우스 모델등으

로 표현할 수 있다. 웨이블릿 계수에 대한 가우스 혼합 모델에서 계수의 상태는 크기가 작은 비중요 계수에 해당하는 상태 0과 크기가 큰 중요 계수에 해당하는 상태 1로 나눌 수 있다. 이 때 웨이블릿 계수의 확률밀도함수는 다음과 같은 가우스 혼합 모델(GMM)로 표현된다.[7]

$$p(w_i) = P(w_i|S_i(0))P(S_i(0)) + P(w_i|S_i(1))P(S_i(1)) \quad (6)$$

$$= g(w_i;0,\sigma_{i,0}^2)P(S_i(0)) + g(w_i;0,\sigma_{i,1}^2)P(S_i(1))$$

여기서  $S_i(m)$  은  $i$  번째 계수가 상태  $m$ (0 혹은 1)에 있음을 나타낸다. 상태 확률  $P(S_i(m))$ 는  $i$  번째 계수  $w_i$ 가 상태  $m$ 에 있을 확률이고  $\sigma_{m,i}^2$ 은  $w_i$ 가 상태  $m$ 일 때의 분산이다.  $g(w_i;\mu,\sigma^2)$ 은 평균  $\mu$ (=0)와 분산  $\sigma^2$ 을 가진 가우스 확률 밀도 함수이다. 상태전이확률  $\epsilon_{i,\rho(i)}^{m,m}$ 를 이전 스케일에서  $w_i$ 에 해당하는 위치의 계수  $w_{\rho(i)}$ 가 상태  $n$ 일때,  $w_i$ 가 상태  $m$ 에 있을 확률이라 두면

$$P(S_i(m)) = \epsilon_{i,\rho(i)}^{m,0}P(S_{\rho(i)}(0)) + \epsilon_{i,\rho(i)}^{m,1}P(S_{\rho(i)}(1)) \quad (7)$$

으로 표현할 수 있다. 그러면 식(6)과 식(7)에서,

$$p(w_i) = g(w_i;0,\sigma_{i,0}^2)(\epsilon_{i,\rho(i)}^{0,0}P(S_{\rho(i)}(0)) + \epsilon_{i,\rho(i)}^{0,1}P(S_{\rho(i)}(1))) \quad (8)$$

$$+ g(w_i;0,\sigma_{i,1}^2)(\epsilon_{i,\rho(i)}^{1,0}P(S_{\rho(i)}(0)) + \epsilon_{i,\rho(i)}^{1,1}P(S_{\rho(i)}(1)))$$

이다. 만약 부모 계수의 상태가 0으로 결정된다면  $P(S_{\rho(i)}(0)) = 1$  이고  $P(S_{\rho(i)}(1)) = 0$ 이다. 따라서 식(8)은 다음과 같이 된다.

$$p(w_i) = g(w_i;0,\sigma_{i,0}^2)\epsilon_{i,\rho(i)}^{0,0} + g(w_i;0,\sigma_{i,1}^2)\epsilon_{i,\rho(i)}^{1,0} \quad (9)$$

또한 부모 계수의 상태가 1이라면 식 (8)은 다음과 같이 된다.

$$p(w_i) = g(w_i;0,\sigma_{i,0}^2)\epsilon_{i,\rho(i)}^{0,1} + g(w_i;0,\sigma_{i,1}^2)\epsilon_{i,\rho(i)}^{1,1} \quad (10)$$

이 모델을 사용하여 영상 보간을 하기 위해서는 계수의 상태 결정과 상태전이 확률의 추정 그리고 분산의 추정이 이루어져야 한다.

#### 3.1 계수의 상태 결정

본 논문에서는 웨이블릿 계수를 상태를 결정하기 위해 그레이 영상의 히스토그램에서 클래스내 분산을 최소화하면서 클래스간 분산은 최대화하여 화소값의 클래스를 구분하는 방법을 사용하였다. 웨이블릿 계수는 그레이 영상의 화소값과는 달리 큰 동적 범위를 가진다. 여기서는 웨이블릿 계수의 양자화된 히스토그램이 대칭형태를 가진다는 점을 이용하여 계수의 동적 범위를 줄였다. 계수의 상태  $m$ 은 다음과 같이 결정한다.

$$m = \begin{cases} 0 & \text{if } |w_i| < T \\ 1 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (11)$$

웨이블릿 계수의 절대치  $|w|$ 의 동적범위를  $L$ 개의 구간으로 나누었을 때,  $l$ 번째 구간에 속한  $|w|$ 의 개수를  $\psi_l$ 라 하면  $T$ 는 다음과 같이 구한다.

$$T = \arg \max_{w_k \in \mathbf{W}_c} \frac{[\mu(w_L)p(w_k) - \mu(w_k)]^2}{p(w_k)[1 - p(w_k)]} \quad (12)$$

여기서

$$p(w_k) = \sum_{l=1}^k \frac{\psi_l}{\Omega}, \quad \mu(w_k) = \sum_{l=1}^k \frac{w_l \psi_l}{\Omega} \quad (13)$$

이다.  $\Omega = \psi_1 + \psi_2 + \dots + \psi_L$ 이고  $\mathbf{W}_c$ 는 각 구간의 대푯값에 대한 오름차순 집합이며  $\forall w_l \in \mathbf{W}_c$ 이다. 그림 1은 이 방법으로 상태를 결정 한 예이다.

### 3.2 상태 천이 확률

앞에서 언급했듯이 웨이블릿 영역에서의 영상 보간은 최고주파 영역의 계수를 외삽하는 문제이다. 고주파와 부대역에서 상태 천이 확률은 다음과 같이 근사화할 수 있다.[7]

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{i,\rho(i)}^{00} & \epsilon_{i,\rho(i)}^{01} \\ \epsilon_{i,\rho(i)}^{10} & \epsilon_{i,\rho(i)}^{11} \end{pmatrix} \simeq \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \quad (14)$$

### 3.3 분산의 추정

영상의 스케일간 특성을 반영하려면 스케일간 감소를 반영할 수 있는 모델이 필요하다. 본 논문에서는 영상의 스케일간 감소율을 반영할 수 있도록 웨이블릿 계수의 절대치를 다음과 같이 선형 모델링 하였다.

$$|w_m^{j-1}| = \lambda_m^j |w_m^j|, \quad j = 1, 2, \dots \quad (15)$$

$w_m^j$ 는  $j$  번째 스케일의 상태  $m$ (0 or 1)에 해당하는 계수이다.  $j=0$ 은 LL-밴드를 제외한 가장 저주파 부대역을 가리킨다.  $j$ 가 클수록 고주파 부대역이다.  $\lambda_m^j$ 는 최소자승법을 이용하여 구할 수 있지만 이 모델은 스케일간 계수의 위치가 모호하다. 이 위치의 모호성은  $j-1$ 번째 부대역에 위상보정 행렬 연산을 적용하여 해결할 수 있다.  $\lambda_m^j$ 는 다음과 같다.

$$\lambda_m^j = \frac{N_m^j \sum_k |w_m^{j,k}| |w_m^{j-1,k}| - \sum_k |w_m^{j,k}| \sum_k |w_m^{j-1,k}|}{N_m^j \sum_k |w_m^{j,k}|^2 - (\sum_k |w_m^{j,k}|)^2} \quad (16)$$

여기서  $N_m^j$ 는  $j$ 번째 스케일에서  $m$ 상태에 있는 계수의 총 개수이고,  $w_m^{j,k}$ 는  $j$ 번째 스케일에서  $m$ 상태에 있는  $k$ 번째 계수이며  $w_m^{j-1,k}$ 는 위상이 보정된 부대역에서  $w_m^{j,k}$ 의 위치에 해당하는 계수가 된다.

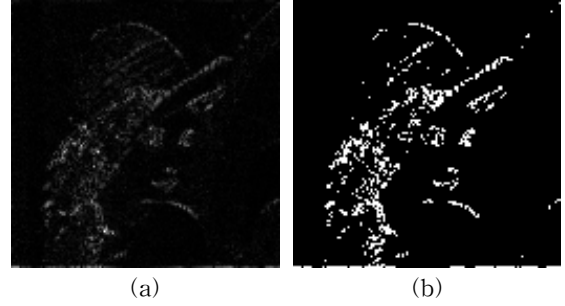


그림 1. 계수의 상태 결정 예 (Lena, LH-band)  
(a) 원 영상의 계수 크기에 대한 그레이스케일 영상 (b) 이진영상으로 나타난 상태결정 맵

저해상도 영상의 마지막 고주파 밴드  $j=J$ 에 대해, 계수 추정을 위해 최소자승법으로 구한  $\lambda$ 값들로부터  $\lambda_m^{J+1}$ 을 외삽해야 한다. 일반적으로 웨이블릿 계수는 다음 식을 만족한다

$$\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \frac{|w_m^{j-1}|}{|w_m^j|} = 2^\alpha \quad (17)$$

이 때  $\alpha$ 는  $J$ 값에 의존하게 된다. 식(15)로부터

$$\frac{1}{J} \sum_{j=1}^J \lambda_m^j = 2^\alpha \quad (18)$$

이다. 외삽을 위해서 다음과 같은 가정을 한다.

$$2^{\alpha(J)} \ln 2 = \frac{2^{\alpha(J-1)} \ln 2 + 2^{\alpha(J+1)} \ln 2}{2} \quad (19)$$

그러면,

$$\lambda_m^{J+1} = \frac{J+2}{J} S_m^J - \frac{J+1}{J-1} S_m^{J-1} \quad (20)$$

이고, 여기서  $S_m^J = \sum_{j=1}^J \lambda_m^j$ 이다. 외삽할 부대역의 분산  $\sigma_m^{J+1}$ 은  $\lambda_m^{J+1}$ 를 이용해 다음과 같이 추정할 수 있다.

$$(\sigma_m^{J+1})^2 = \frac{1}{(\lambda_m^{J+1})^2} (\sigma_m^J)^2 \quad (21)$$

외삽할 부대역의 계수는 추정된 분산을 가지고 (9)와 (10)에 주어진 GMM의 실현에 의해 생성된다. 이 때 난수 발생은 추정 부대역에 적은 확률이지만 의외의 큰 값을 발생시킬 수 있다.

이런 잡음을 제거하기 위해 두가지 방법을 고려하였다. 하나는 Wiener 필터와 같은 잡음제거 필터를 사용하는 것이고 다른 방법은 고해상도 영상을 복원할 때 웨이블릿 역변환 필터를 쓰지 않고 위상보정 필터를 사용하는 방법이다. 위상보정 필터에 의해 복원된 영상은 저대역 통과 필터를 거친 웨이블릿 역변환 영상과 같다.



(a) Bicubic (27.40dB)      (b) [1]의 방법 (29.54dB)      (c) *wi-Wiener*(31.50dB)      (d) *wi-Psfilter*(31.41dB)  
 그림 2. 주관적인 화질 비교

#### IV. 모의 실험

제안 방법의 성능 비교를 위해 lena, boat, peppers, babara 영상에 대한 PSNR를 구하였다. 저해상도 입력 영상은 고해상도 영상을 한 단계 웨이블릿 변환을 한 후 얻은 LL영상을 사용하였다. 실험에서 사용한 웨이블릿 필터는 Daubechies 쌍직교 9/7 필터이다. 부호는 부모계수의 것을 상속하였다.

표 1은 테스트 영상에 대한 PSNR 결과이다. '*wi-Wiener*'은 7×7 마스크를 이용한 Wiener 필터를 후처리로 사용한 것이고 '*wi-Psfilter*'는 웨이블릿 역변환 대신 위상보정 행렬을 사용한 방법이다. 제안 방법은 난수 발생을 사용하므로 매 실행마다 PSNR이 다르게 나온다. 따라서 표 1에서 10번의 실행에서 얻은 PSNR들의 평균값을 나타내었다. 성능 비교를 위해 전통적인 bicubic 방법과 은닉 마코프 트리 모델을 사용한 방법[1]의 PSNR을 보였다.

표 1에서 제안 방법은 전통적인 bicubic 방법 뿐 아니라, 은닉 마코프 트리 모델을 사용하는 [1]의 방법에 비해 좋은 성능을 보여 준다. 그림2 에서 흐림 현상이 나타난 (a)와 잡영이 섞인 (b)에 비해 제안방법에 의해 복구한 영상 (c)와 (d)가 선명한 것을 알 수 있다.

#### V. 결론 및 향후 연구 방향

본 논문에서는 웨이블릿 계수의 확률 모델에 대한 매개변수를 정확하게 추정하기 위해 위상보정 행렬을 사용할 것을 제안하였다. 또한 스케일간 계수 크기를 선형 모델링하여 분산을 추정하는 방법을 기술하였다. 훈련이 필요 없고 개별 영상에 맞는 분산 추정이 이루어진다는 장점이 있다.

제안 방법의 단점은 확률밀도함수의 대칭성으로 인해 부호 추정이 어렵다는 것이다. 정확한 부호 추정을

표 1. PSNR 비교(dB)

	Bicubic	HMT [1]	<i>wi-Wiener</i>	<i>wi-Psfilter</i>
Lena	30.29	32.20	34.35	<b>34.42</b>
Boat	27.40	29.54	<b>31.51</b>	31.32
Peppers	30.82	33.86	33.86	<b>33.90</b>
Babara	23.92	23.78	<b>25.53</b>	25.34

위해 바이어스된 평균값을 사용하는 가우스 모델을 이용하는 방법이 더 연구 될 것이다..

#### 참고문헌

- [1] K. Kinebuchi, D. D. Muresan, and T. W Parks, "Image Interpolation using wavelet-based hidden Markov trees," ICASSP01, vol. 3, May 2001.
- [2] X. Li and M. T. Orchard, "New edge-directed interpolation," IEEE Trans. Image Processing, vol. 10, pp. 1521-1527, Oct 2001.
- [3] T. Blu, P. Thevenaz, and M. Unser, "Linear interpolation revitalized," IEEE. Trans. Image Processing, vol. 13, pp. 710-719, May 2004.
- [4] S. Carrato, G. Ramponi, and S. Marsi, "Simple edge-sensitive image interpolation filter," ICIP96, pp. 711-714,
- [5] Dong Hun Woo, Il Kyu Eom and Yoo Shin Kim, "Image interpolation based on Interscale dependency in wavelet domain," ICIP04, pp.1687-1690,
- [6] X. Ki, "New results of phase shifting in the wavelet space," IEEE SP. lett, vol. 10, no. 7, pp. 193-195, July 2003.
- [7] J. R. Romberg, H. C. Choi, R.G. Baraniuk, " Bayesian tree-structure image modeling using wavelet-domain hidden Markov models," IEEE Trans. IP, Vol. 10, No. 7, July, 2001.