

단부 경계조건을 고려한 매설관의 동적응답 해석 (I)

Analysis of Seismic Response of the Buried Pipeline with Pipe End Conditions (I)

정진호¹⁾, Jin-Ho Jeong, 이병길²⁾, Byong-Gil Lee, 박병호³⁾, Byung-Ho Park

¹⁾ 부경대학교 공과대학 건설공학부 교수, Professor, Dept. of Civil and Construction Eng., Pukyong National Univ.

²⁾ 부경대학교 대학원 토목공학과 박사수료, Ph.D. Candidate, Dept. of Civil Engineering, Pukyong National Univ.

³⁾ 부경대학교 대학원 토목공학과 박사수료, Ph.D. Candidate, Dept. of Civil Engineering, Pukyong National Univ.

개요(SYNOPSIS) : This work reports results of our study on the dynamic responses of the buried pipelines both along the axial and the transverse directions under various boundary end conditions. We have considered three cases, i.e., the free ends, the fixed ends, and the fixed-free ends. We have studied the seismic responses of the buried pipelines with the various boundary end conditions both along the axial and the transverse direction. We have considered three cases, i.e., the free ends, the fixed ends, and the fixed-free ends for the axial direction, and three more cases including the guided ends, the simply supported ends, and the supported-guided ends for the transverse direction. The buried pipelines are modeled as beams on elastic foundation while the seismic waves as a ground displacement in the form of a sinusoidal wave. The natural frequency and its mode, and the effect of parameters have been interpreted in terms of free vibration. The natural frequency varies most significantly by the soil stiffness and the length of the buried pipelines in the case of free vibration, which increases with increasing soil stiffness and decreases with increasing length of the buried pipeline. Such a behavior appears most prominently along the axial rather than the transverse direction of the buried pipelines. The resulting frequencies and the mode shapes obtained from the free vibration for the various boundary end conditions of the pipelines have been utilized to derive the mathematical formulae for the displacements and the strains along the axial direction, and the displacements and the bending strains along the transverse direction in case of the forced vibration. The negligibly small difference of 6.2% between our result and that of Ogawa et. al. (2001) for the axial strain with a one second period confirms the accuracy of our approach in this study.

주요어(Key words) : Seismic Response, Buried Pipeline, End Conditions

1. 서론

매설관은 광범위한 지역에 걸쳐 설치되기 때문에 지진에 의한 피해를 간과할 수 없다. 특히 국부의 파괴로 전체 기능이 마비되기 때문에 지진발생에 대비한 정확한 해석이 필요하다. 따라서 본 연구는 단부의 경계조건에 따른 매설관의 동적응답을 규명하기 위해 Larbi(1995)에 의해 수행된 축방향의 양단고정과 축직각방향의 양단자유 및 양단힌지에 대한 자유진동 해석에 강제진동 해석을 추가적으로 수행하였고, 가능한 모든 관 단부 경계조건을 고려하기 위해 축방향의 일단고정-일단자유와 축직각방향의 양단고정, 일단고정-일단자유 그리고 일단힌지-일단롤러에 대해서도 자유진동과 강제진동 해석을 수행하였다. Clough 등(1979)이 제시한 자유진동에 대한 지배미분방정식을 이용하여 각 경계조건에서의 모드형상을 결정하고 고유진동수를 구하고 고유진동수에 대한 매개변수의 영향을 연구하였으며, 자유진동에 대한 모드형상과 고유진동수를 이용하여 강제진동시 발생하는 매설관의 축방향에 대해 변위, 변형률 산정식과 축직각방향에 대한 변위, 휨변형률 산정식을 유도함을 본 연구의 목적으로 하며, Ogawa 등(2001)에 의해 제안된 축방향 변형률 식과 본 연구에서 유도된 식에 의한 결과치를 비교하여 본 해석법의 정확성을 검증하였다.

2. 매설관의 자유진동 거동

2.1 축방향 자유진동

매설관을 탄성기초 위에 놓인 보로서 해석하였다. 축방향 자유 진동을 지배하는 미분방정식은 다음과 같다(Clough 등, 1975; Zerva 등, 1988, Larbi, 1995).

$$m \frac{\partial^2 v(y,t)}{\partial t^2} + C_A \frac{\partial v(y,t)}{\partial t} + K_A v(y,t) - E_p A \frac{\partial^2 v(y,t)}{\partial y^2} = 0 \quad (1)$$

여기서, v (m) : 매설관을 따라 좌표 y (m)와 시간 t (sec)의 함수인 축방향 변위

m (kg/m) : 매설관의 단위 길이당 질량, E_p (N/m²), A (m²) : 매설관의 탄성계수와 단면적

C_A (N.sec/m/m), K_A (N/m/m) : 지반과 Winkler 기초에 대한 단위 길이당 감쇠계수와 축방향 강성

매설관에서의 감쇠는 지반으로부터 발생된 감쇠보다 훨씬 낮다(Hindy 등(1979)). 따라서 구조물의 고유 진동수와 모드형상을 결정하기 위해 감쇠 개념을 고려하지 않고, 식 (1)을 정리하면 아래와 같다.

$$m \frac{\partial^2 v(y,t)}{\partial t^2} + K_A v(y,t) - E_p A \frac{\partial^2 v(y,t)}{\partial y^2} = 0 \quad (2)$$

위 식 (2)의 해 $v(y,t)$ 는 위치(y)와 시간(t)에 관한 함수이며, t 에 주기적이므로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$v(y,t) = \phi(y)e^{i\omega t} \quad (3)$$

식 (2)에 식 (3)을 대입하고 상수계수 $e^{i\omega t}$ 을 소거하여 간단하게 나타내면 다음과 같다.

$$(K_A - m\omega^2)\phi(y) - E_p A \phi''(y) = 0 \quad (4)$$

이 2계 미분방정식의 해는 다음과 같다.

$$\phi(y) = C_1 \sin(\alpha y) + C_2 \cos(\alpha y) \quad \text{여기서, } \alpha = \sqrt{\frac{m\omega^2 - K_A}{E_p A}} \quad (5)$$

$\phi(y)$ 는 모드 형상으로서 고유진동수와 함께 경계조건으로부터 계산되어지며, 단부 경계조건에 따른 모드형상과 고유진동수를 표 1에 정리하여 나타내었다. 표 1로부터 양단자유 및 양단고정 단부 경계조건에서는 모드형상이 홀수모드($k=1, 3$)에서는 관 중앙지점에서 최대값을 보이며 양측이 대칭성을 나타내며, 짝수모드($k=2, 4$)에서는 관 중앙지점에서 0값을 보이며 양측이 비대칭성을 나타낸다. 이런 양상은 관 양단부에서 경계조건이 대칭적인 구조일 경우에 일관성으로 나타남을 알 수 있다. 반면에 일단고정-일단자유 관 단부 경계조건처럼 구조적으로 비대칭적인 경우에는 모드형상이 전 모드수($k=1, 2, 3, 4$)에 대해서 비대칭적인 경향을 나타내고 있다. 이로부터 관 단부 경계조건이 다를 경우 동적응답은 달라질 수 있음을 알 수 있다.

2.2 축직각방향의 자유진동

축직각방향 자유진동에 대해 지배적인 미분방정식은 다음과 같이 표현된다.


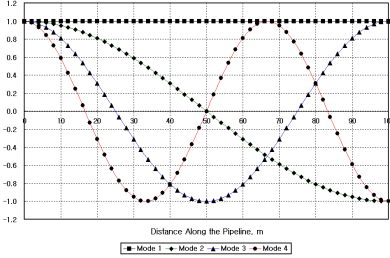

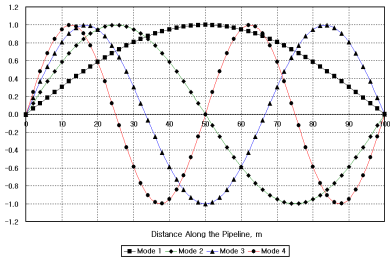
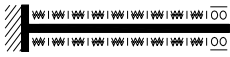
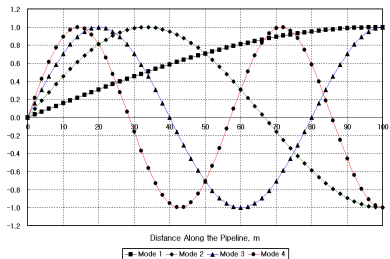
$$m \frac{\partial^2 w(y,t)}{\partial t^2} + C_T \frac{\partial w(y,t)}{\partial t} + K_T w(y,t) + E_p I \frac{\partial^4 w(y,t)}{\partial y^4} = 0 \quad (6)$$

여기서, w (m) : 매설관을 따라 좌표 y (m)와 시간 t (sec)의 함수인 축직각방향 변위

C_T (N.sec/m/m), K_T (N/m/m) : 지반과 Winkler 기초에 대한 단위 길이당 감쇠계수와 축직각방향 강성

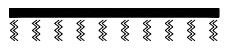
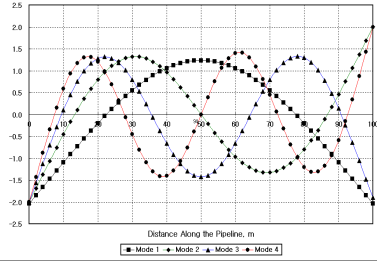

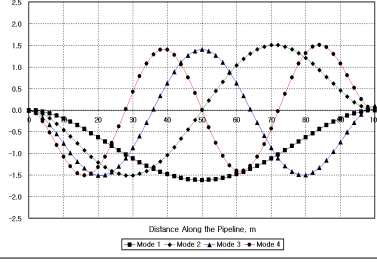

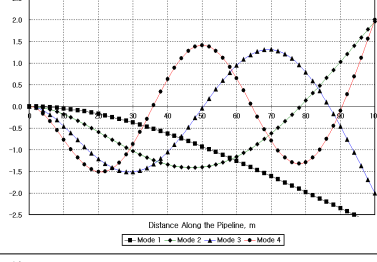
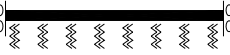
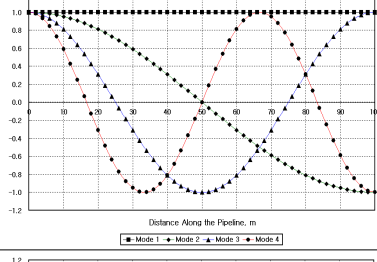

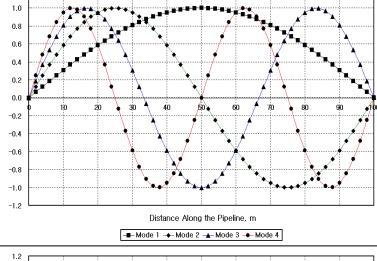

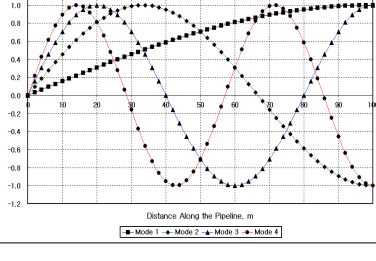
I (m^4) : 매설관의 관성모멘트

표 1. 축방향에서의 경계조건에 따른 모드형상과 고유진동수

Boundary Condition	Model	Mode Shape, $\phi_k(y)$	First Four Mode Shapes
	Boundary Value	Natural Frequency, ω_k	
Free Ends (Larbi, 1995)		$\phi_k(y) = \cos \frac{(k-1)\pi y}{L}; k = 1, 2, 3, \dots$	
	$\phi'(0) = 0, \phi'(L) = 0$	$\omega_k = \sqrt{\frac{K_A}{m} \left\{ 1 + \frac{E_p A}{K_A} \left(\frac{(k-1)\pi}{L} \right)^2 \right\}}$	
Fixed Ends (Larbi, 1995)		$\phi_k(y) = \sin \frac{k\pi y}{L}; k = 1, 2, 3, \dots$	
	$\phi(0) = 0, \phi(L) = 0$	$\omega_k = \sqrt{\frac{K_A}{m} \left\{ 1 + \frac{E_p A}{K_A} \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \right\}}$	
Fixed Free Ends		$\phi_k(y) = \sin \frac{(2k-1)\pi y}{2L}; k = 1, 2, 3, \dots$	
	$\phi(0) = 0, \phi'(L) = 0$	$\omega_k = \sqrt{\frac{K_A}{m} \left\{ 1 + \frac{E_p A}{K_A} \left(\frac{(2k-1)\pi}{2L} \right)^2 \right\}}$	

또한 축방향 자유진동과 동일한 방법으로 수식을 전개할 수 있으며 단부 경계조건에 대해서 표 2에 정리하여 나타내었다. 표 2는 양단자유, 양단고정, 일단고정-일단자유, 양단롤러, 양단힌지, 일단힌지-일단롤러 단부 경계조건에 대한 관 축직각방향에 대해 네 개의 모드수($k=1, 2, 3, 4$)에 대한 모드형상을 보이고 있다. 축방향에 대한 자유진동에서와 동일하게 즉, 양단자유, 양단고정, 양단롤러, 양단힌지 관 단부 경계조건에서는 홀수모드($k=1, 3$)일 경우 중앙지점에서 최대값을 나타내며 관 중심을 기준으로 양측이 대칭성의 모드형상을 보이며, 짝수모드($k=2, 4$)에서는 중앙지점에서 0값을 가지며 양측이 비대칭성을 보이는 일관성을 보이나 일단고정-일단자유와 일단힌지-일단롤러 단부 경계조건에서는 전 모드수 ($k=1, 2, 3, 4$)에 대해 비대칭적인 모드형상으로 나타남을 알 수 있다. Larbi(1995)는 모드형상이 동일하게 나타나는 축방향 양단자유와 축직각방향의 양단롤러 경계조건에 대해서 관 중앙부에서 가장 큰 변형률이 발생할 것으로 간주하여 관 중앙부에 대한 동적해석 결과에 주안점을 둔 연구를 수행한 바 있다. 그러나 본 연구를 수행하는 과정에서 관 단부 경계조건이 다를 경우 최대 변형률의 발생위치는 중앙부에서만 발생하는 것이 아니라 단부 경계조건에 따라 다른 지점에서 발생됨을 알 수 있었으며 특히 단부 경계조건이 비대칭인 구조, 예를 들면 일단고정-일단자유 및 일단힌지-일단롤러 경계조건과 같은 경우에는 모드형상의 비대칭성으로 동적거동이 달라질 것으로 예상할 수 있다. 이로부터 관 단부조건에 따른 동적거동은 달라질 수 있음을 알 수 있다.

표 2. 축직각방향에서의 경계조건에 따른 모드형상과 고유진동수

Boundary Condition	Model	Mode Shape, $\phi_k(y)$	First Four Mode Shapes
	Boundary Value	Natural Frequency, ω_k	
Free Ends (Larbi, 1995)		$\phi_k(y) = \frac{\sin(\beta L) - \sinh(\beta L)}{\cosh(\beta L) - \cos(\beta L)}$ $\{\cosh(\beta y) + \cos(\beta y)\} + \sinh(\beta y) + \sin(\beta y)$	
	$\phi''(0) = \phi''(L) = 0$ $\phi'''(0) = \phi'''(L) = 0$	$\omega_k = \sqrt{\frac{K_T}{m} \left\{ 1 + \frac{E_p I}{K_T} \beta_k^4 \right\}}$	
Fixed Ends		$\phi_k(y) = \frac{\sin(\beta L) - \sinh(\beta L)}{\cosh(\beta L) - \cos(\beta L)}$ $\{\cosh(\beta y) - \cos(\beta y)\} + \sinh(\beta y) - \sin(\beta y)$	
	$\phi(0) = \phi(L) = 0$ $\phi'(0) = \phi'(L) = 0$	$\omega_k = \sqrt{\frac{K_T}{m} \left\{ 1 + \frac{E_p I}{K_T} \beta_k^4 \right\}}$	
Fixed Free Ends		$\phi_k(y) = -\frac{\sin(\beta L) + \sinh(\beta L)}{\cosh(\beta L) + \cos(\beta L)}$ $\{\cosh(\beta y) - \cos(\beta y)\} + \sinh(\beta y) - \sin(\beta y)$	
	$\phi(0) = \phi''(L) = 0$ $\phi'(0) = \phi'''(L) = 0$	$\omega_k = \sqrt{\frac{K_T}{m} \left\{ 1 + \frac{E_p I}{K_T} \beta_k^4 \right\}}$	
Guided Ends (Larbi, 1995)		$\phi_k(y) = \cos\left(\frac{(k-1)\pi y}{L}\right); k = 1, 2, 3, \dots$	
	$\phi'(0) = \phi'(L) = 0$ $\phi'''(0) = \phi'''(L) = 0$	$\omega_k = \sqrt{\frac{K_T}{m} \left\{ 1 + \frac{E_p I}{K_T} \left(\frac{(k-1)\pi}{L}\right)^4 \right\}}$	
Simply Supported Ends (Larbi, 1995)		$\phi_k(y) = \sin\left(\frac{k\pi y}{L}\right); k = 1, 2, 3, \dots$	
	$\phi(0) = \phi(L) = 0$ $\phi''(0) = \phi''(L) = 0$	$\omega_k = \sqrt{\frac{K_T}{m} \left\{ 1 + \frac{E_p I}{K_T} \left(\frac{k\pi}{L}\right)^2 \right\}}$	
Supported Guided Ends		$\phi_k(y) = \sin\left(\frac{(2k-1)\pi y}{2L}\right); k = 1, 2, 3, \dots$	
	$\phi(0) = \phi''(0) = 0$ $\phi'(L) = \phi'''(L) = 0$	$\omega_k = \sqrt{\frac{K_T}{m} \left\{ 1 + \frac{E_p I}{K_T} \left(\frac{(2k-1)\pi}{2L}\right)^4 \right\}}$	

* Free Ends(양단자유), Fixed Ends(양단고정), Fixed-Free Ends(일단고정-일단자유)

* Guided Ends(양단롤러), Simply Supported Ends(양단힌지), Supported-Guided Ends(일단힌지-일단롤러)

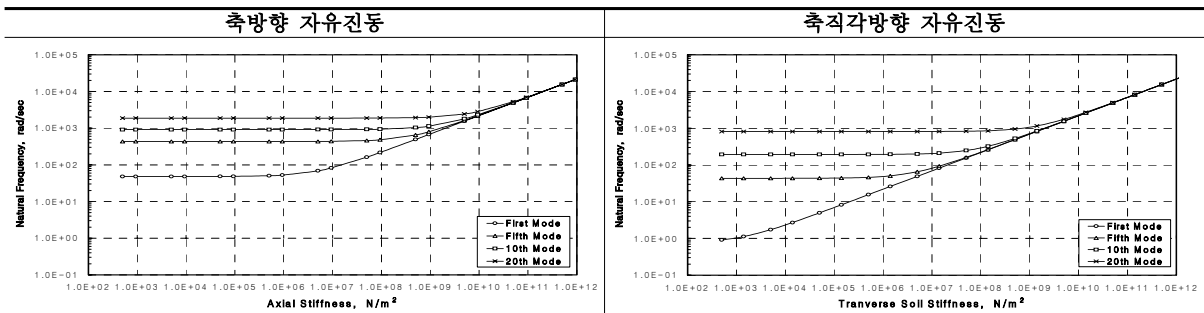
2.3 고유진동수에 대한 매개변수의 영향

구조물의 응답에 영향을 미치는 가장 중요한 변수는 고유진동수이다. 이러한 영향을 평가하기 위해 Larbi(1995)에 의해 해석된 콘크리트 매설관을 예로 수행하였다. 표 3은 매설관의 기하학적 특성과 재료적 특성을 나타내고 있다. 표 4~표 8은 일단고정-일단자유 단부 경계조건에 대하여 고유진동수에 대한 매개변수의 영향에 대해 요약하고 있다. 이러한 경향은 관 단부 경계조건의 변화에 관계없이 동일한 경향이 나타나는 것을 확인하였다.

표 3. 매설관의 기하학적 특성과 재료적 특성

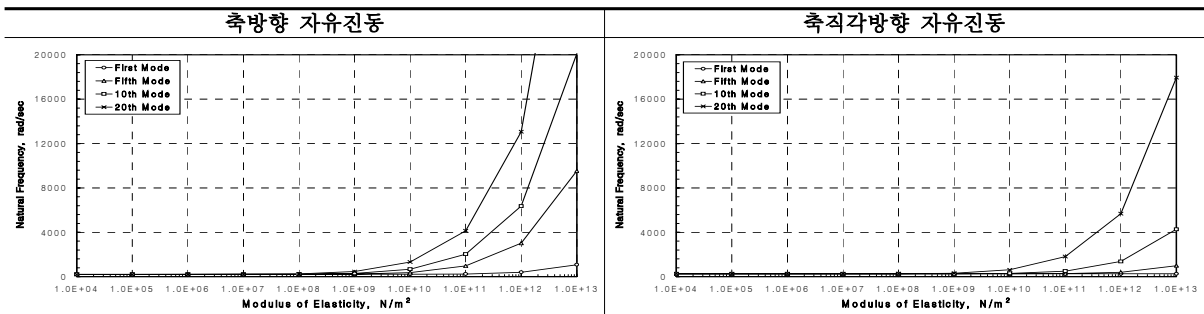
- 탄성계수 : $E_p = 2.07 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$	- 관성모멘트 : $I = 0.47389 \text{ m}^4$
- 길이 : $L = 100 \text{ m}$	- 단위체적당 질량(밀도) : $\rho = 2.2 \times 10^3 \text{ kg/m}$
- 평균반경 : $R = 1 \text{ m}$	- 단위길이당 질량 : $m = 2.0735 \times 10^3 \text{ kg/m}$
- 두께 : $t = 15 \text{ cm}$	- 축직각방향 지반 강성 : $K_T = 14.01 \times 10^7 \text{ N/m/m}$
- 횡단면적 : $A = 0.94248 \text{ m}^2$	- 축방향 지반 강성 : $K_A = 9.34 \times 10^7 \text{ N/m/m}$

표 4. 지반 강성의 영향



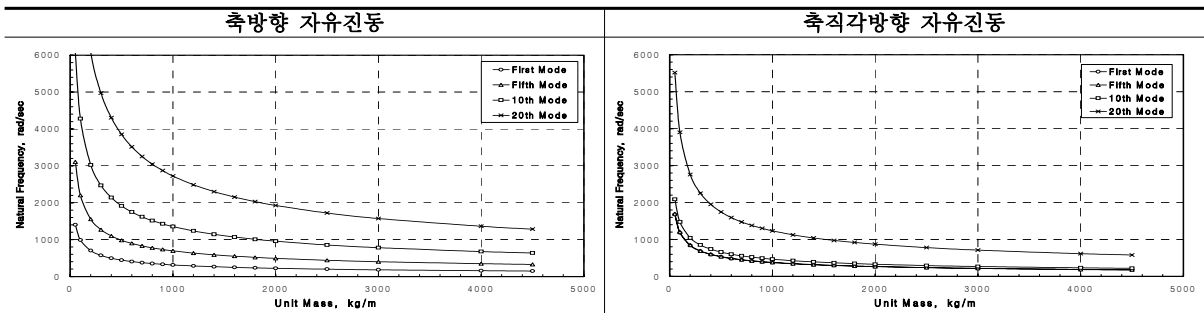
- 높은 지반강성($>1 \times 10^{10} \text{ N/m/m}$)에서 강성이 증가함에 따라 고유진동수도 증가
- 낮은 지반강성($<1 \times 10^{10} \text{ N/m/m}$)에서는 어느 한계까지 일정하게 유지되고 이러한 모드수가 증가할수록 증가
- 낮은 지반강성($<1 \times 10^{10} \text{ N/m/m}$)에서는 축방향 고유진동수가 축직각방향보다 높음

표 5. 매설관 탄성계수의 영향



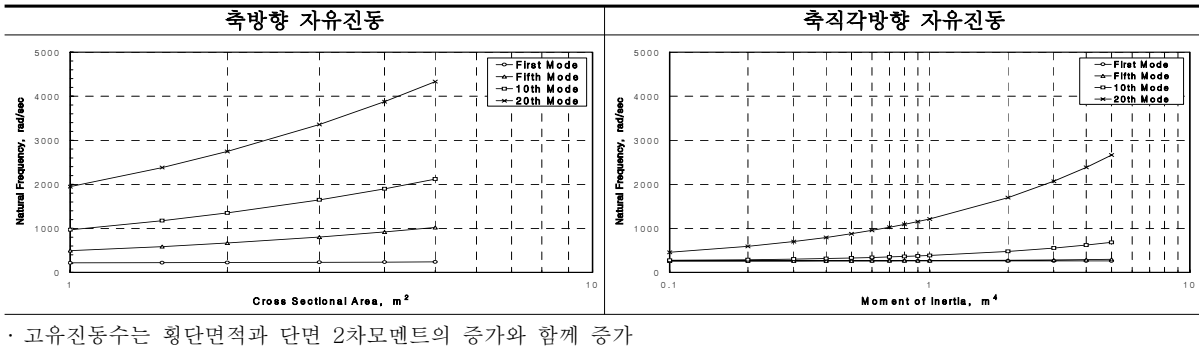
- 높은 탄성계수에서는 증가하나, 상대적으로 낮은 탄성계수($1 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$)에서는 영향이 없음
- 매설관의 탄성계수($>1 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$)와 모드수가 증가할수록 고유진동수는 급격히 증가하며 축방향 자유진동에서 뚜렷하게 나타남.

표 6. 매설관 질량의 영향



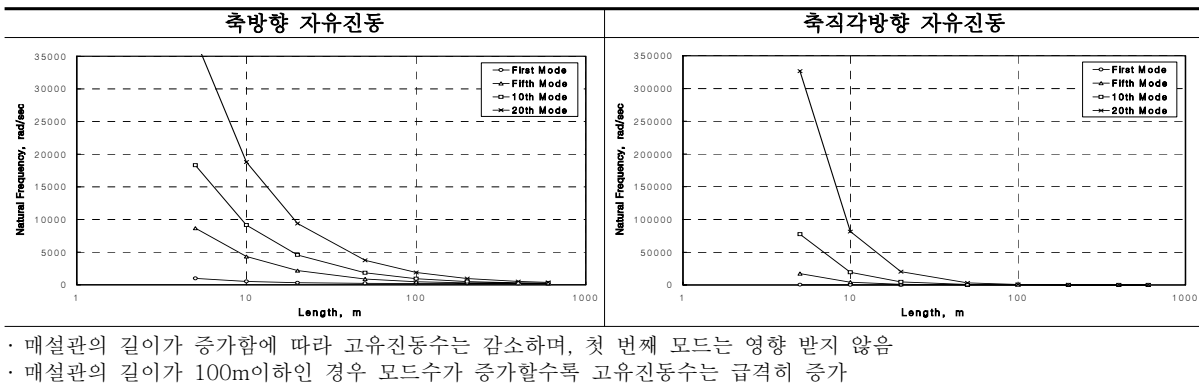
- 매설관의 질량이 클수록, 모드수가 낮을수록 고유진동수는 낮아지며, 축방향에서 뚜렷하게 나타남

표 7. 매설관 횡단면적과 관성모멘트의 영향



· 고유진동수는 횡단면적과 단면 2차모멘트의 증가와 함께 증가

표 8. 매설관 길이의 영향



· 매설관의 길이가 증가함에 따라 고유진동수는 감소하며, 첫 번째 모드는 영향 받지 않음
 · 매설관의 길이가 100m이하인 경우 모드수가 증가할수록 고유진동수는 급격히 증가

3. 매설관의 강제 진동

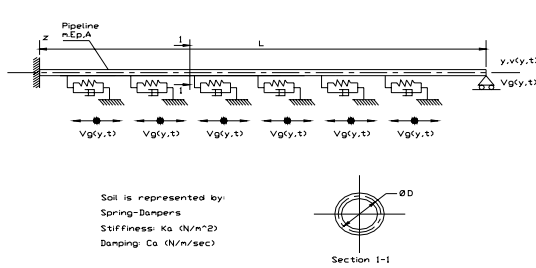


그림 1. 축방향 진동 모형

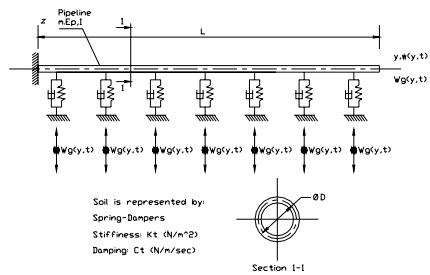


그림 2. 축직각방향 진동 모형

3.1 축방향 강제 진동

축방향 강제진동에서 매설관의 거동을 지배하는 방정식은 다음과 같다.

$$m \frac{\partial^2 v(y,t)}{\partial t^2} + C_A \frac{\partial v(y,t)}{\partial t} + K_A v(y,t) - E_p A \frac{\partial^2 v(y,t)}{\partial y^2} = C_A \frac{\partial v_g(y,t)}{\partial t} + K_A v_g(y,t) \quad (7)$$

여기서, v_g : 축방향 지반 변위 [$v_g(y,t) = H(t - y/V) \sin(\omega t - \omega y/V)$]

H(t)는 Heaviside 함수이며, $t < y/V$ 일 때 $H(t-y/V)=0$ 이고 $t > y/V$ 일 때 $H(t-y/V)=1$ 이 되며, 유사한 표현(즉, 정현파)은 축직각방향에서도 지진 지반 변위($w_g(y,t)$)을 묘사하는데 사용되었다. 그림 1과 같은 일단고정-일단자유 경계조건에 있어 모드형상과 고유진동수는 표 1에 나타내었으며 일반화된 좌표와 일반적인 모드형상으로 변위를 표현함으로써 해는 다음과 같은 형태로 얻어진다.

$$v(y,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \phi_k(y) q_k(t) \quad (8)$$

여기서, $\phi_k(y)$: 일반적인 모드형상, $q_k(t)$: 시간만의 함수로서 일반화된 좌표

식 (8)을 식 (7)에 대입하고, $\phi_k(y)$ 을 양변에 곱한 후, 매설관의 전체 길이에 대해 적분하여 모드형상의 직교성을 이용하면 다음과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$\ddot{q}_k(t) + \frac{C_A}{m} \dot{q}_k(t) + \frac{K_A}{m} q_k(t) \left\{ 1 + E_p A \left(\frac{(2k-1)\pi}{2L} \right)^2 \right\} = \frac{1}{mL_k} \int_0^L \phi_k(y) [C_A \dot{v}_g(y,t) + K_A v_g(y,t)] dy \quad (9)$$

여기서, $L_k = \int_0^L \phi_k^2(y) dy$

$C_A/m = 2\zeta_k \omega_k$ 로서, 모드수 k 에 대한 지반-구조물의 상호작용에 의한 감쇠비(ζ_k)를 다시 나타내면 다음과 같다.

$$\zeta_k = \frac{C_A}{2\sqrt{mK_A}} \left[1 + \frac{E_p A}{K_A} \left(\frac{(2k-1)\pi}{2L} \right)^2 \right]^{-1/2} \quad (10)$$

식 (9)에 ω_k 와 ζ_k 을 대입하여 정리하면 $q_k(t)$ 에 대한 다음식이 얻어진다.

$$\ddot{q}_k(t) + 2\zeta_k \omega_k \dot{q}_k(t) + \omega_k^2 q_k(t) = P_k(t) ; P_k(t) = \frac{1}{mL_k} \int_0^L \phi_k(y) [C_A \dot{v}_g(y,t) + K_A v_g(y,t)] dy \quad (11)$$

$P_k(t)$ 는 시간 t 와 모드수 k 에서 지반으로부터 매설관에 전달된 모든 힘의 합이다. 식 (9)에 지반변위를 대입하여 시간 t 에서 매설관에 작용한 힘을 산정할 수 있다.

$$P_k(t) = \frac{1}{mL_k} \int_0^L \phi_k(y) \left[C_A \bar{\omega} H\left(t - \frac{y}{V}\right) \cos\left(\bar{\omega}t - \bar{\omega} \frac{y}{V}\right) + K_A H\left(t - \frac{y}{V}\right) \sin\left(\bar{\omega}t - \bar{\omega} \frac{y}{V}\right) \right] dy \quad (12)$$

식 (9)의 해는 라플라스 변환을 통해 구할 수 있다. 변환식을 통해 얻은 해는 다음과 같다.

$$q_k(t) = \int_0^t h_k(t-\tau) P_k(\tau) d\tau \quad (\text{Duhamel 적분식}) \quad (13)$$

$h_k(t)$ 는 $H_k(s)$ 의 역변환을 통해 얻을 수 있으며, 식 (14)에 대입하여 정리하면 아래와 같다.

$$h_k(t) = \frac{1}{\omega_k \sqrt{1-\zeta_k^2} \left[\int_0^t P_k(\tau) \frac{e^{-\omega_k \zeta_k \tau}}{e^{\omega_k \zeta_k t}} \cos\left(\omega_k \sqrt{1-\zeta_k^2} \tau\right) \sin\left(\omega_k \sqrt{1-\zeta_k^2} t\right) - \int_0^t P_k(\tau) \frac{e^{-\omega_k \zeta_k \tau}}{e^{\omega_k \zeta_k t}} \sin\left(\omega_k \sqrt{1-\zeta_k^2} \tau\right) \cos\left(\omega_k \sqrt{1-\zeta_k^2} t\right) \right]} \quad (14)$$

$$A(t) = \int_0^t P_k(\tau) \frac{e^{-\omega_k \zeta_k \tau}}{e^{\omega_k \zeta_k t}} \cos\left(\omega_k \sqrt{1-\zeta_k^2} \tau\right) , \quad B(t) = \int_0^t P_k(\tau) \frac{e^{-\omega_k \zeta_k \tau}}{e^{\omega_k \zeta_k t}} \sin\left(\omega_k \sqrt{1-\zeta_k^2} \tau\right) \quad (15)$$

식 (15)에 포함된 적분을 풀기 위해 적분은 일정 시간 증분($\Delta\tau$)을 이용하여 Simpson 법칙에 따라 단계적으로 수행되었으며 A(t)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$A(t) = \frac{\Delta\tau}{3} \sum^A(t), \quad B(t) = \frac{\Delta\tau}{3} \sum^B(t) \quad (16)$$

$$\sum^A(t) = \left[\sum^A(t-2\Delta\tau) + P_k(t-2\Delta\tau) \cos(\omega_k \sqrt{1-\zeta_{k(t-2\Delta\tau)}}) e^{-\zeta_{k(t-2\Delta\tau)}} \right. \\ \left. + 4P_k(t-\Delta\tau) \cos(\omega_k \sqrt{1-\zeta_{k(t-\Delta\tau)}}) e^{-\zeta_{k(t-\Delta\tau)}} + P_k(t) \cos(\omega_k \sqrt{1-\zeta_{k(t)}}) e^{-\zeta_{k(t)}} \right] \quad (17)$$

또한, $\sum^B(t)$ 는 B(t)의 적분에 대해 사인함수를 포함하는 유사 표현으로 주어진다. 위의 계산은 Duhamel의 적분을 결정한다. 축방향에 대해서 단부 경계조건에 따른 매설관의 변위와 변형률 산정식을 표 9에 정리하여 나타내었다.

표 9. 축방향 변위와 변형률 산정식

Classification		Result
Free Ends (Larbi, 1995)	Displacement	$v_A(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{(k-1)\pi y}{L} q_k(t)$
	Strain	$\epsilon_A(y, t) = - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(k-1)\pi}{L} \sin \frac{(k-1)\pi y}{L} q_k(t)$
Fixed Ends	Displacement	$v_A(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi y}{L} q_k(t)$
	Strain	$\epsilon_A(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\pi}{L} \cos \frac{k\pi y}{L} q_k(t)$
Fixed Free Ends	Displacement	$v_A(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{(2k-1)\pi y}{2L} q_k(t)$
	Strain	$\epsilon_A(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2k-1)\pi}{2L} \cos \frac{(2k-1)\pi y}{2L} q_k(t)$

* Free Ends(양단자유), Fixed Ends(양단고정), Fixed-Free Ends(일단고정-일단자유)

3.2 축직각방향 강제진동

축직각방향 강제진동을 받는 매설관의 거동에 대한 지배방정식은 다음과 같다.

$$m \frac{\partial^2 w(y, t)}{\partial t^2} + C_T \frac{\partial w(y, t)}{\partial t} + K_{TW}(y, t) + E_p I \frac{\partial^4 w(y, t)}{\partial y^4} = C_T \frac{\partial w_g(y, t)}{\partial t} + K_{TW_g}(y, t) \quad (18)$$

축방향과 동일한 방법으로 수식유도를 하여 축직각방향에 대해 단부 경계조건에 따라 매설관의 변위 및 휨변형률 산정식을 표 10에 정리하여 나타내었으며, 여기서 D는 매설관의 직경이다.

표 10. 축직각방향 변위와 휨변형률 산정식

Classification		Result
Free Ends	Displacement	$w_T(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \left\{ \frac{\sin(\beta_k L) - \sinh(\beta_k L)}{\cosh(\beta_k L) - \cos(\beta_k L)} \{ \cosh(\beta_k y) + \cos(\beta_k y) \} + \sinh(\beta_k y) + \sin(\beta_k y) \right\}$
	Bending Strain	$\epsilon_T(y, t) = \frac{D}{2} \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \beta_k^2 \left\{ \frac{\sin(\beta_k L) - \sinh(\beta_k L)}{\cosh(\beta_k L) - \cos(\beta_k L)} \{ \cosh(\beta_k y) - \cos(\beta_k y) \} + \sinh(\beta_k y) - \sin(\beta_k y) \right\}$
Fixed Ends	Displacement	$w_T(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \left\{ \frac{\sin(\beta_k L) - \sinh(\beta_k L)}{\cosh(\beta_k L) - \cos(\beta_k L)} \{ \cosh(\beta_k y) - \cos(\beta_k y) \} + \sinh(\beta_k y) - \sin(\beta_k y) \right\}$
	Bending Strain	$\epsilon_T(y, t) = \frac{D}{2} \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \beta_k^2 \left\{ \frac{\sin(\beta_k L) - \sinh(\beta_k L)}{\cosh(\beta_k L) - \cos(\beta_k L)} \{ \cosh(\beta_k y) + \cos(\beta_k y) \} + \sinh(\beta_k y) + \sin(\beta_k y) \right\}$
Fixed Free Ends	Displacement	$w_T(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \left\{ - \frac{\sin(\beta_k L) + \sinh(\beta_k L)}{\cosh(\beta_k L) + \cos(\beta_k L)} \{ \cosh(\beta_k y) - \cos(\beta_k y) \} + \sinh(\beta_k y) - \sin(\beta_k y) \right\}$
	Bending Strain	$\epsilon_T(y, t) = \frac{D}{2} \sum_{k=1}^{\infty} q_k(t) \beta_k^2 \left\{ - \frac{\sin(\beta_k L) + \sinh(\beta_k L)}{\cosh(\beta_k L) + \cos(\beta_k L)} \{ \cosh(\beta_k y) + \cos(\beta_k y) \} + \sinh(\beta_k y) + \sin(\beta_k y) \right\}$
Guided Ends (Larbi, 1995)	Displacement	$w_T(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \cos \frac{(k-1)\pi y}{L} q_k(t)$
	Bending Strain	$\epsilon_T(y, t) = \frac{D}{2} \kappa_T(y, t) = - \frac{D}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(k-1)\pi}{L} \right)^2 \cos \frac{(k-1)\pi y}{L} q_k(t)$
Simply Supported Ends	Displacement	$w_T(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{k\pi y}{L} q_k(t)$
	Bending Strain	$\epsilon_T(y, t) = \frac{D}{2} \kappa_T(y, t) = - \frac{D}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k\pi}{L} \right)^2 \sin \frac{k\pi y}{L} q_k(t)$
Supported Guided Ends	Displacement	$w_T(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sin \frac{(2k-1)\pi y}{2L} q_k(t)$
	Bending Strain	$\epsilon_T(y, t) = \frac{D}{2} \kappa_T(y, t) = - \frac{D}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(2k-1)\pi}{2L} \right)^2 \sin \frac{(2k-1)\pi y}{2L} q_k(t)$

* Free Ends(양단자유), Fixed Ends(양단고정), Fixed-Free Ends(일단고정-일단자유)

* Guided Ends(양단롤러), Simply Supported Ends(양단힌지), Supported-Guided Ends(일단힌지-일단롤러)

3.3 해석결과의 검증

관 단부 경계조건에 대해서 유도된 축방향 변형률 산정식(표 9)의 정확성을 검증하기 위해 Ogawa 등(2001)이 제시한 매설관의 축방향 변형률과 비교를 하였다. 해석에 이용된 지진파는 1940년에 발생한 El Centro 지진 기록을 이용하였으며 그림 3은 El Centro 지진의 변위 응답 스펙트럼을 나타낸 것이다.

3.3.1 Ogawa 등(2001)의 제안식

흙입자의 거동은 파형태에 의존적이며, 파의 진행방향에 대해 축방향 성분과 축직각방향 성분으로 분리될 수 있다. 지진파를 수평방향으로 정현파 형태의 파가 전파된다고 가정하여, 최대 지반 변형률(ϵ_G)을 식 (19)와 같이 제안하였다.

$$\epsilon_G = \frac{2\pi}{L} U_h \quad \text{여기서, } L : \text{파장 } U_h : \text{지반 변위} \quad (19)$$

Ogawa 등(2001)은 매설관을 무한 지반에 놓인 양단자유 단부조건인 관으로 단순화된 모형을 사용하였으며, 매설관의 축방향에 대한 힘의 평형방정식은 D'Alembert의 원리에 근거하여 식 (20)과 같이 표현하였다.

$$\rho A \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - EA \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = K_1(u_G - u) \quad (20)$$

여기서, u : 매설관의 축방향 변위, u_G : 축방향 지반 변위, ρ : 매설관의 밀도, E : 매설관의 탄성계수, K_1 : 축방향 등가 스프링 계수

Ogawa 등(2001)은 매설관의 관성에 의한 영향을 무시하고 지반과 매설관 변위비를 나타내는 변환계수 α_0 에 의해 양단자유 단부조건을 가진 매설관의 변형률(ε_s)을 식 (21)과 같이 산정될 수 있음을 제안하였다.

$$\varepsilon_s = \alpha_0 \varepsilon_G \quad (21)$$

여기서, $\alpha_0 = 1/1 + \left(\frac{2\pi}{\lambda_1 L_a}\right)^2$, $\lambda_1 = \sqrt{K_1/EA}$, L_a : 매설관 축방향으로 전파되는 파의 파장

표 3에 제시된 매설관의 기하학적 특성과 재료적 특성을 이용하여 식 (21)에서 주기 1sec일 때 매설관의 최대변형률을 산정하면 1.349×10^{-3} 이 된다.

3.3.2 결과 비교

본 연구에서 유도되어진 산정식을 이용하면 해석값은 단위 변위(1m)당으로 산정되며, 양단자유 단부조건을 가진 매설관의 변형률은 0.036571로 산정되었다. 따라서 실제 매설관의 변형률은 여기 주기 1sec에 해당하는 지반변위를 곱함으로써 산정되며 $0.036571 \times 0.039161 = 1.432 \times 10^{-3}$ 이 된다. 그리고 양단고정 단부조건에선 매설관의 변형률은 0.052149이며, 실제 매설관의 변형률은 2.042×10^{-3} 이 된다. 또한 일단고정-일단자유 단부조건인 경우는 매설관의 변형률은 0.035494이며 실제 매설관의 변형률은 1.390×10^{-3} 이 된다. 따라서 다른 주기에 대해서도 같은 방법으로 축방향 변형률을 산정할 수 있다. 표 11은 주기 1sec일 때 관 중심부에서 단부 경계조건에 따른 축방향 변형률을 본 연구와 Ogawa 등(2001)의 제안식에 의해 산출된 축방향 변형률을 비교한 것이며, Ogawa 등(2001)에 의해 산정된 값을 기준으로 양단자유 경계조건에서는 6.2%, 양단고정 경계조건에서는 51.4%, 일단고정-일단자유 경계조건에서는 3.0%의 차이를 나타내고 있다. 그림 4는 이러한 계산값을 그래프로 도시한 것이며, 지반변위 응답스펙트럼의 주기에 대해 지진파의 진동수에 따른 축방향 변형률을 나타내고 있다.

표 11. 축방향 변형률의 비교 (T=1sec)

	Ogawa et al(2001)	Free Ends	Fixed Ends	Fixed-Free Ends
Axial Strain	1.349×10^{-3}	1.432×10^{-3}	2.042×10^{-3}	1.390×10^{-3}

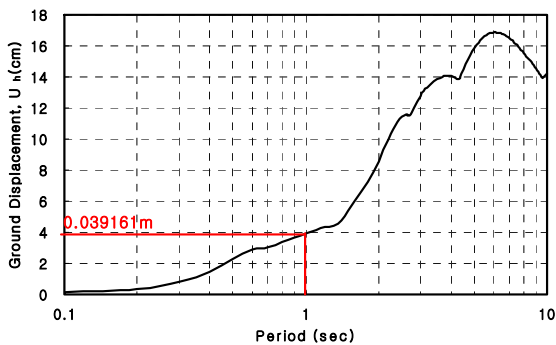


그림 3 주기에 따른 지반변위 응답스펙트럼

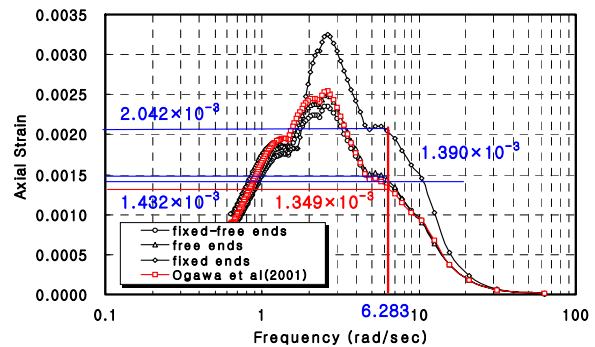


그림 4 축방향 변형률의 비교 (T=1sec)

4. 결론

본 연구에서는 매설관에서의 여러 가지 단부 경계조건에 따른 동적응답을 연구하기 위하여 매설관을 탄성기초위에 놓인 보로, 지진과는 정현파의 형태의 지반변위를 적용하였다. 여러 가지 관 단부의 경계조건을 가진 매설관에 대해서 자유진동 해석을 수행하여 모드형상과 고유진동수를 결정(표 1과 표 2)하였고, 고유진동수에 대한 매개변수의 영향을 표 4~표 8에 정리하여 나타내었으며 이러한 경향은 관 단부 경계조건의 변화에 관계없이 동일한 경향을 나타내었다. 또한 자유진동에 대해 관 단부 경계조건에 따른 모드형상과 고유진동수를 이용하여 강제진동시 발생 가능한 매설관의 축방향에 대해 변위, 변형률 산정식(표 9)과 축직각방향에 대해 변위, 휨변형률 산정식(표 10)을 유도하였다. 또한 주기 1sec에 대해 Ogawa 등(2001)이 제시한 양단자유 경계조건의 변형률 산정식과 본 연구에서 제안된 양단자유 경계조건 변형률 산정식의 결과는 6.2%의 차이를 보이는 것으로 본 해석의 정확성을 확인할 수 있다.

참고문헌

1. Ahcene Larbi (1995), *Earthquake Resistance of Buried Pipelines*, A Thesis Submitted to the Faculty of Drexel University in partial fulfillment of the requirements for the degree of Doctor of Philosophy, pp. 23-43.
2. Clough, Ray W., Penzien, Joseph (1975), *Dynamics of Structures*, MacGraw Hill Book Company, New York, pp. 293-327.
3. Hindy, A., Novak, M. (1979), "Earthquake Response of Underground Pipelines", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 7, pp. 451-476.
4. Ogawa, Y. and Koike T. (2001), *Structural design of buried pipelines for severe earthquake*, Soil Dynamics and Earthquake Engineering Vol. 21, pp.199-209.
5. Zerva, A., Ang, A. H-S and Wen, Y. K (1988), "Lifeline Response to Spatially Variable Ground Motions", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 16, pp. 361-379.