

레이레이파 · 러브파의 동시활용과 CAP SASW 기법 적용에 의한 지반 전단강성 평가의 고품질화

Enhancement of Subgrade Stiffness Profiling by Incorporating Rayleigh and Love Waves into the Common-Array-Profiling(CAP) SASW Technique

장대우¹⁾, Dae-Woo Chang, 조성호²⁾, Sung-Ho Joh, 강태호³⁾, Tae-Ho Kang, 고태송⁴⁾, Hak-Song Koh

¹⁾ 중앙대학교 토목환경공학과 석사과정, Grad. Student, Dept. of Civil and Environmental Engineering, Chung-Ang University

²⁾ 중앙대학교 토목공학과 부교수, Associate Prof., Dept. of Civil Engineering, Chung-Ang University

³⁾ 중앙대학교 토목공학과 박사수료, Ph. D. Candidate, Dept. of Civil Engineering, Chung-Ang University

⁴⁾ 한국철도기술연구원 연구원, Researcher, Korea Railroad Research Institute

SYNOPSIS : Recently, surface-wave methods have been widely used for site investigation due to economic advantage and improved reliability. Specially, the Spectral-Analysis-of-Surface-Wave (SASW) method has been used to evaluate soil properties in geotechnical engineering. In determination of subgrade stiffness by SASW measurements, only the vertical Rayleigh waves have been used. This study proposed a framework to determine shear-wave velocity profiles by using vertical and horizontal Rayleigh waves and Love wave all together. In addition, the Common-Array-Profiling(CAP) SASW method was employed, which subgrade stiffness of profile the local material under two fixed receivers. The procedure proposed in this study was verified by comparing the shear-wave velocity profiles with the shear-wave velocity profiles of downhole testing at two geotechnical sites.

Key words : SASW method, Rayleigh wave, Love wave, shear-wave velocity, joint inversion

1. 서 론

지구물리학 분야에서 지각 구조의 규명과 석유 탐사를 위하여 표면파(Surface Wave) 기법을 처음으로 공학 분야에 도입하였다. 표면파 기법은 응력파에는 표면파만이 잔류하며, 기본모드가 지배적이라는 것을 가정으로 사용하고 있다. 하지만, 표면파 기법은 국한되어있는 지역에서 사용되기 때문에, 응력파에는 표면파뿐만 아니라 체적파의 성분도 상당히 포함되어 있으며, 측정된 표면파에는 기본모드뿐만 아니라 다양한 모드가 중첩되어 있기 때문에, 지구물리학에서 사용하던 표면파 기법에 관한 이론이나 실험기법을 공학 분야에서 사용하는 데는 여러 가지 불합리한 요소가 많이 있었다. 이러한 기존 표면파 기법의 대안제들을 해결하려고 하는 노력이 초기 Spectral-Analysis-of-Surface (SASW) 기법의 정립에 있어서 주안점이 되어 많은 실험과 경험을 통하여 체계화되어 왔으며 Rössset(1991), Gucunski(1991), Al-Hunaidi(1994), Joh(1996) 등은 SASW 기법에 대한 이해를 새롭게 하였다. 현재 토목공학 여러 분야에서 SASW 기법에 대하여 새롭고 긍정적인 시각으로 넓은 적용 분야에 사용되어지고 있다.

현재까지 토목 분야에서 사용되어지는 SASW 기법은 레이레이파의 수직 운동에 대해서만 고려하여

해석하였다. 그러나 지층 구조가 복잡하고 지층간 강성 차가 큰 경우에는 표면파의 고차 모드의 영향, 체적파의 간섭 그리고 근접장 효과 때문에 역산해석의 낮은 신뢰성의 결과를 보였다. 또한, SASW 기법은 근본적으로 실험대상 지반 또는 구조물이 횡방향으로 균일한 지층구조를 가지고 있으며, 각 층의 물성은 균질하다고 가정하고 있다. 그러나 실제 모든 자연 지반의 경우 이러한 가정이 성립되는 것은 아니며 경우에 따라서는 횡방향 변이성이 매우 심하여 SASW 기법의 가정이 성립될 수 없는 경우가 존재하기 때문에 해석의 난해성을 갖는다.

이와 같은 해석의 문제점을 해결하고자, 지층 구조에 따른 수직 레일레이파 뿐만 아니라, 수평 레일레이파와 러브파의 분산특성을 파악하여, 분산곡선들의 특성을 이용한 동시역산해석을 수행하였다. 그리고 횡방향 변이성의 문제점을 경감시키기 위해서 감진기를 고정하고 발진원의 위치를 변화시키면서 실험하는 Common-Array-Profiling(CAP) SASW 실험(장대우, 2005; 장대우등, 2005)을 적용하였다. CAP SASW 실험에 의한 수직, 수평 레일레이파와 러브파 분산곡선들의 특성을 이용한 동시역산해석을 수행하였다. 동시역산해석으로 결정한 전단강성 주상도와 다운홀 실험과 Common-Mid-Point(CMP) SASW 실험(기존 SASW 실험의 별칭)으로 결정한 전단강성 주상도들을 비교하고 시추 주상도를 참고하여 CAP SASW 기법의 신뢰성을 검증하였다.

2. 레일레이파와 러브파의 분산특성

2.1 수치 모델링

수직, 수평 레일레이파와 러브파는 지층 구조에 따라 독특한 분산특성을 가지고 있다. 이러한 파들의 분산특성을 파악한다면 더욱 확실한 지반의 전단강성을 얻을 수 있으며, 이러한 분산곡선의 특성을 미리 파악하게 될 경우, 이 분산특성을 이용하여 지반의 지층 구조를 개략적으로 추정할 수 있다.

지층 구조에 따른 수직, 수평 레일레이파와 러브파의 분산특성을 파악하기 위해서 그림 1과 같은 지층 구조를 사용하였으며, 지반의 물성들은 표 1에 제시하였다. Case 1의 경우는 기반암 상부에 연약층이 존재하는 것을 표현하는 지층의 구조이며, Case 2는 강성이 심도에 따라서 증가하는 지층 구조를 나타내고 있다. Case 3은 단단한 지층 사이에 약한 지층이 존재하는 지층 구조이다. Case 1과 Case 2는 러브파가 만들어지는 조건이 가능하여 발생 가능하지만, Case 3의 경우 러브파가 발생되지 않는 지층의 구조이다. Case 3과 같은 지층 구조에서는 러브파가 아닌 수평전단파가 발생된다. 본 논문에서는 이러한 수평 전단파도 러브파라 칭하고 해석하였다. 충분한 파장에 대해서 검토하기 위해서 감진기의 간격(D)을 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256m로 확장하여 CMP SASW 실험으로 수치 모델링을 하였다. 또한 본 연구에서 분산곡선에 대하여 적용된 필터 조건은 식 1과 같이 Heisey가 제안한 필터 조건을 확장하여 사용하였고, 러브파에 대해 식 4와 같이 새롭게 제안된 필터 조건(장대우, 2005)을 사용하였다.

레일레이파의 경우,

$$0.2D \leq \lambda \leq 4D \quad (1)$$

러브파의 경우,

$$0.2D \leq \lambda \leq 2D \quad (2)$$

여기서, D 는 감진기와 발진원의 간격, λ 는 파장을 나타낸다.

표 1. 수치 모델링에 사용한 지반의 물성

밀 도(kg/cm^3)	포아송비	재료감쇠비
1800	0.33333333	0.02

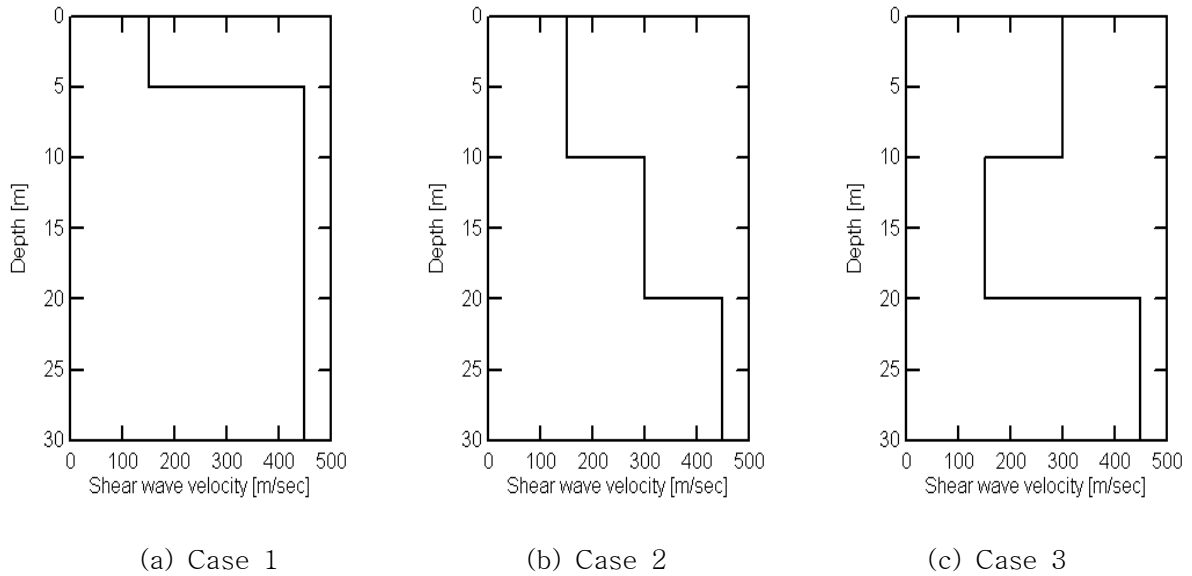


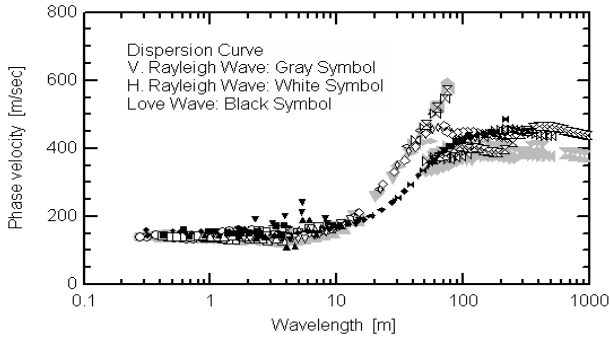
그림 1. 수치 모델링에 사용한 전단강성 주상도

2.2 지층 구조에 따른 분산특성

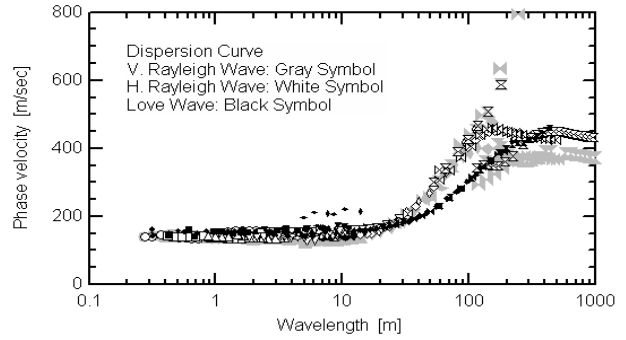
수직 레일레이파의 위상속도 분산곡선은 Case 1, Case 2, Case 3의 지층 구조에 대해서 전단강성 주상도의 변화추이와 유사한 경향을 나타내며, 표층의 두께와 일치하는 파장으로부터 증가하는 경향을 보이고 있다. 표층 구간에 대한 위상속도는 표층의 전단파 속도의 약 0.9배를 나타내고 있다. 이때의 위상속도는 Case 1에서는 140m/sec(0~약5m 범위; 표층의 전단파 속도 150m/sec), Case 2에서는 140m/sec(0~약10m 범위; 표층의 전단파 속도 150m/sec) 그리고 Case 3에서는 270m/sec(0~약10m 범위, 표층의 전단파 속도 300m/sec)를 나타내고 있다. 그리고 고파장 영역에서 Case 1는 파장 50m이상, Case 2는 파장 200m이상 그리고 Case 3은 파장 200m이상 영역에서는 기반암 전단파 속도의 0.9배인 400m/sec를 나타내고 있다.

수평 레일레이파의 위상속도 분산곡선은 전체적으로 수직 레일레이파와 비슷한 경향을 나타내고 있다. 그러나 Case 1에서는 파장 50m이상, Case 2에서는 부터는 300m이상 그리고 Case 3에서는 파장 200m이상부터 고파장의 위상속도가 기반암의 전단파 속도와 동일한 450m/sec가 되는 특이한 현상이 존재한다. 이와 같은 수평 레일레이파의 분산곡선으로부터 기반암의 정보를 얻을 수 있다고 판단되어진다.

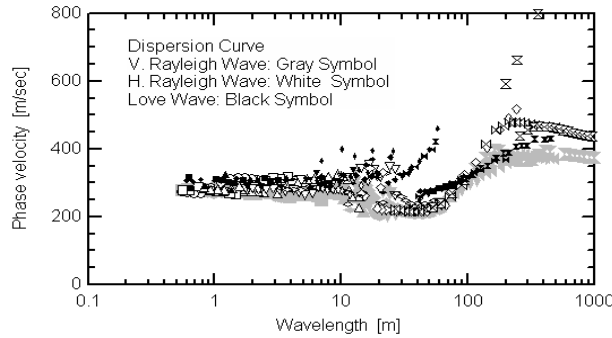
이론적으로 Case 1과 같은 두 개의 층으로 이루어진 지층구조에서 러브파의 위상속도 분산곡선은 S자의 형태로 저파장 영역에서 연약층의 전단파 속도를 나타내며, 다시 이 분산곡선은 서서히 증가하다가 고파장 영역에서는 기반암의 전단파 속도를 나타낸다. 이와 같은 이론적인 해를 바탕으로 파장 6m까지는 연약층의 전단파 속도와 일치하는 150m/sec를 나타내는 것을 확인 할 수 있다. 그리고 파장 200m이상부터는 기반암의 전단파 속도와 일치하는 450m/sec를 나타내고 있다. Case 2의 러브파의 위상속도 분산곡선은 파장 4m까지 150m/sec를 일정하게 유지하고 Case 3의 분산곡선은 파장 5m까지 300m/sec를 일정하게 유지되어 강성이 변화기 전의 첫 번째 층의 전단파 속도와 일치하는 것을 알 수 있다. 그러나 고파장 영역에서 일정하게 유지되는 위상속도를 찾기는 힘들었다. 이는 러브파의 분산곡선은 표층의 정보와 기반암의 정보를 모두 포함하고는 있지만, 지층 중간의 연약층의 존재로 인하여 러브파 파동전파의 단절이 발생하여 기반암의 정보보다 표층의 정보를 더욱 명확하게 포함하고 있다고 판단된다. 러브파의 분산곡선은 Case 1에서는 파장 2.5m부터 8m까지 범위, Case 2에서는 4m부터 15m까지 범위 그리고 Case 3에서는 10m부터 30m까지 범위내에서 위상속도가 빗살무늬 패턴의 형태로 나타나는데 이는 모드가 분리되는 현상 때문이라고 판단된다.



(a) Case 1



(b) Case 2



(c) Case 3

그림 2. 지층 구조에 따른 레일리파와 러브파의 위상속도 분산곡선

3. CAP SASW에 의한 위상속도 분산곡선

3.1 CAP SASW 기법

최근들어 지반의 전단강성을 등고선도로 나타내는 것이 추세를 이루고 있다. 전단강성을 등고선도로 표현하기위해 일반적인 CMP SASW 기법은 감진기의 간격을 넓혀가면서 지반의 특성을 평가하기 때문에 5~6개의 다른 감진기 간격을 사용하여 단위 SASW 실험을 여러번 수행해야만 한다. 반면, 본 연구에서 적용한 CAP SASW 기법(장대우, 2005; 장대우등, 2005)은 감진기를 고정한 상태에서 발진원과 감진기의 간격을 확장하여 지반의 특성을 평가하는 방법이다. 이 기법에 적절한 필터 조건(장대우, 2005)을 이용하면 CMP SASW 기법과 일치되는 결과를 얻을 수 있을 뿐만 아니라, CAP SASW 기법은 CMP SASW 기법보다 광대역 파장 영역을 측정하여 보다 충실하게 지반의 전단강성을 등고선도로 나타낼 수 있고, CMP SASW 기법에서 발생하는 문제점인 횡방향 변이에 대한 문제점을 경감시킬 수 있는 장점을 가지고 있다.

감진기의 간격은 2m로 고정하고, 발진원의 위치(X)를 첫 번째 감진기로부터 0.5m, 1.0m, 2.0, 4.0m, 8.0m, 16.0m, 32.0m 이격시켜 수치 모델링을 수행하였다. CAP SASW 기법을 통해서 획득한 분산곡선에 식 3과 4에서 나타내고 있는 필터 조건을 적용하였다.

레일리파의 경우,

$$0.2X \leq \lambda \leq 4X \quad (3)$$

러브파의 경우,

$$0.2X \leq \lambda \leq 2X \quad (4)$$

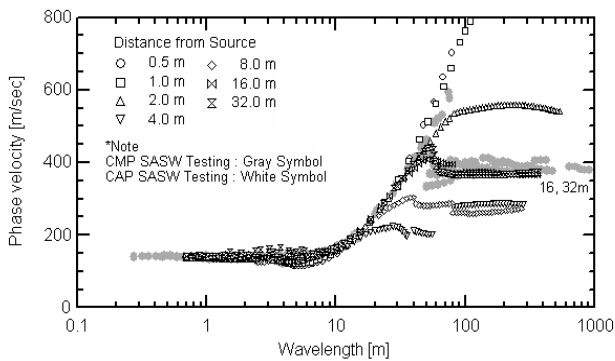
여기서, X는 첫 번째 감진기와 발진원의 간격, λ는 파장을 나타낸다.

3.2 CAP SASW 기법에 의한 표면파의 분산특성

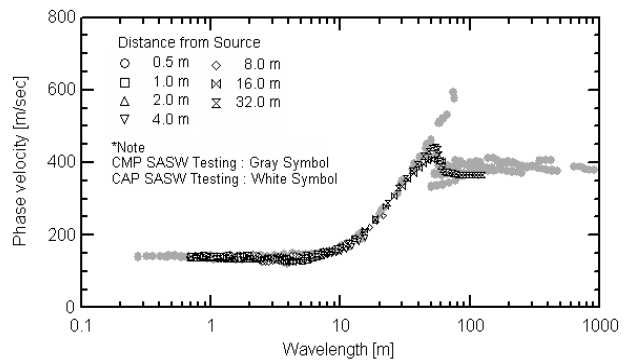
Case 1 지층 구조에 대해서 CAP SASW 기법으로 수치 모델링을 수행하였다. 그림 5는 수직 레일레이파의 분산곡선을 나타내고 있다. 그림 5(a)에서 알 수 있듯이, 발진원의 위치가 첫 번째 감진기로부터 멀어질수록 CAP SASW 기법에 의한 분산곡선은 CMP SASW 기법에 의한 분산곡선과 고과장 영역에서 일치하지만, 저과장 영역에서는 정확히 일치하지 않는다. 반면, 저과장 영역에서는 발진원의 위치가 가까운 CAP SASW에 의해 분산곡선이 CMP SASW 기법에 의해 분산곡선과 일치하는 결과를 나타내었다. 이러한 결과에 필터 조건을 적용하여 정리하면, CAP SASW 기법에 의한 분산곡선이 CMP SASW 기법에 의한 분산곡선이 거의 일치하는 것을 알 수 있다.

그림 6은 수평 레일레이파의 분산곡선에 대해서 나타내고 있는데, 전체적으로 CAP SASW 기법의 분산곡선과 CMP SASW 기법의 분산곡선이 일치하는 것을 알 수 있다. 특히 수평 레일레이파는 고과장 영역이 기반암의 정보를 가지고 있어서 중요한데 필터 처리후의 CAP SASW 기법의 분산곡선을 보면 고과장 영역의 정보를 명확하게 포함하고 있는 것을 알 수 있다.

그림 7은 러브파의 분산곡선을 나타내고 있다. 필터 적용전의 CAP SASW 기법의 분산곡선은 모두 증가하는 경향을 나타내는 복잡한 형태이다. 그러나 필터 적용후의 CAP SASW 기법의 분산곡선은 CMP SASW 기법의 분산곡선에서 나타나고 있는 빗살무늬 패턴도 나타내고 있으며, 전체 경향도 잘 일치하는 것을 알 수 있다. 그림 7(b)에 나타나 있듯이, CAP SASW 기법의 러브파의 분산곡선은 CMP SASW 기법의 분산곡선의 고과장 영역 정보를 포함하지 못하여, 기반암의 정보를 나타내고 있지는 못하지만, 표층과 중간 전이 영역의 정보를 포함하고 있다.

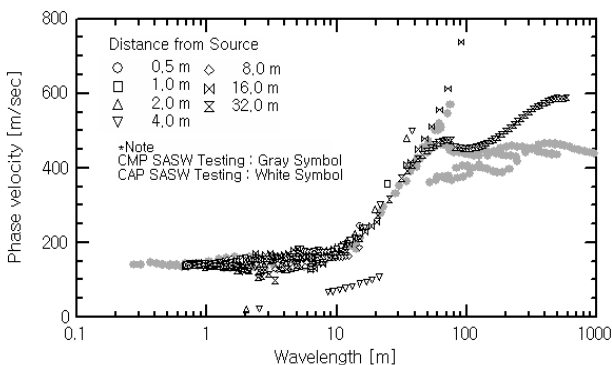


(a) 필터 적용전의 분산곡선

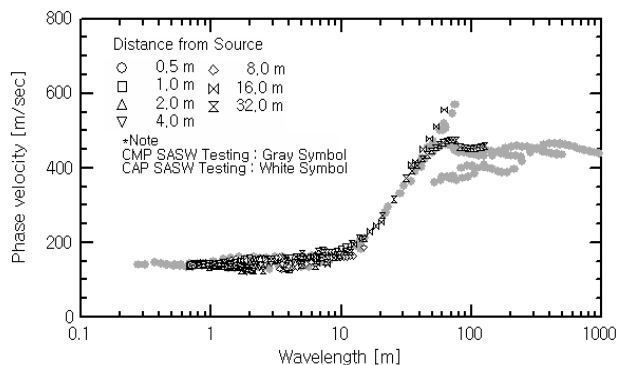


(b) 필터 적용후의 분산곡선

그림 5. CAP SASW 기법을 이용하여 결정된 Case 1의 수직 레일레이파의 분산곡선

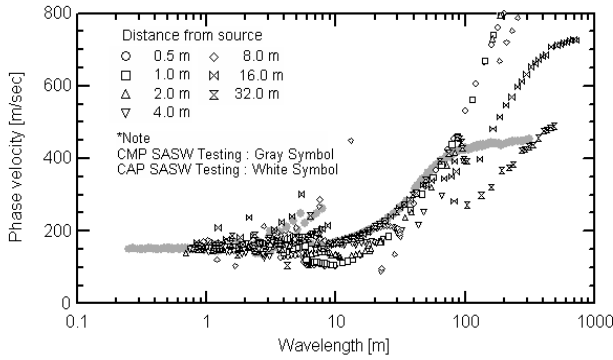


(a) 필터 적용전의 분산곡선

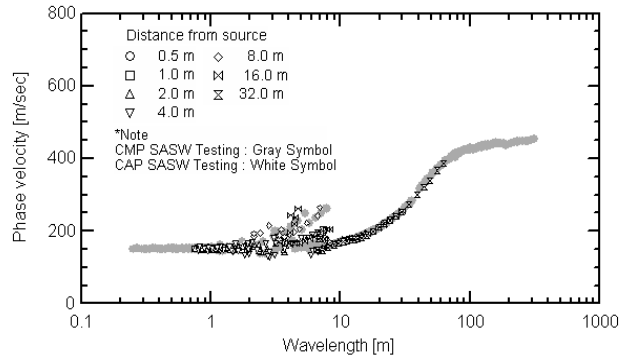


(b) 필터 적용후의 분산곡선

그림 6. CAP SASW 기법을 이용하여 결정된 Case 1의 수평 레일레이파의 분산곡선



(a) 필터 적용전의 분산곡선



(b) 필터 적용후의 분산곡선

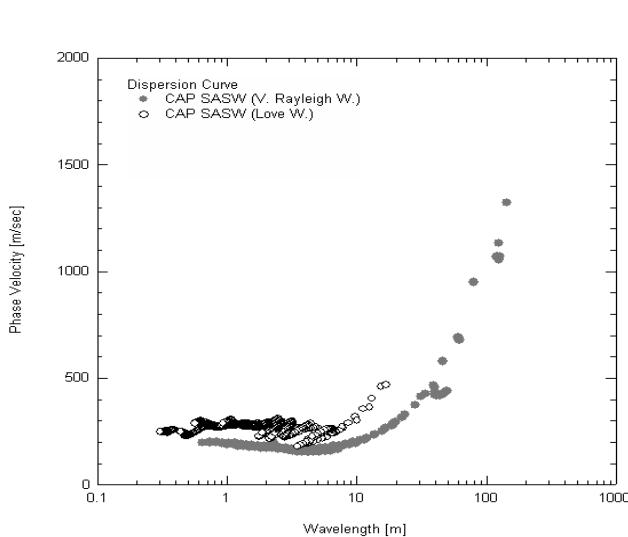
그림 7. CAP SASW 기법을 이용하여 결정된 Case 1의 러브파의 분산곡선

4. 레일레이파와 러브파의 동시역산해석과 현장 적용

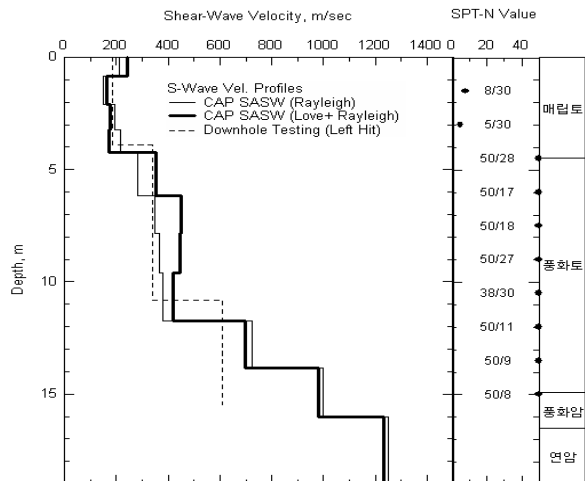
앞에서는 CAP SASW 기법을 이론적으로 CMP SASW 기법과 비교하여 CAP SASW 기법의 신뢰성을 확인하였다. 본 장에서는 CAP SASW 기법의 현장 적용성을 평가하기 위해서 평택 서해대교와 중앙대학교 야외시험장 두 곳에서 현장 실험을 실시하여 비교하였다. 또한, CAP SASW 기법의 신뢰성을 검증하기 위하여 다운홀 실험과 CMP SASW 실험을 병행하여 수행하였다.

4.1 평택 서해대교에서의 현장 실험

평택 서해대교 27번과 28번 교각 사이의 지반에서 CAP SASW 실험을 수행하였다. CAP SASW 실험은 감진기의 간격을 2m로 고정하고, 발진원의 위치를 1m부터 32m까지 확장하며 수행하였다 또한, CAP SASW 실험의 신뢰성 확인을 위해서 다운홀 실험을 병행하여 수행하였다



(a) 현장 실험으로 측정된 분산곡선



(b) 시추 주상도와 역산 해석 결과의 비교

그림 8. 평택 서해대교에서의 현장 실험 결과

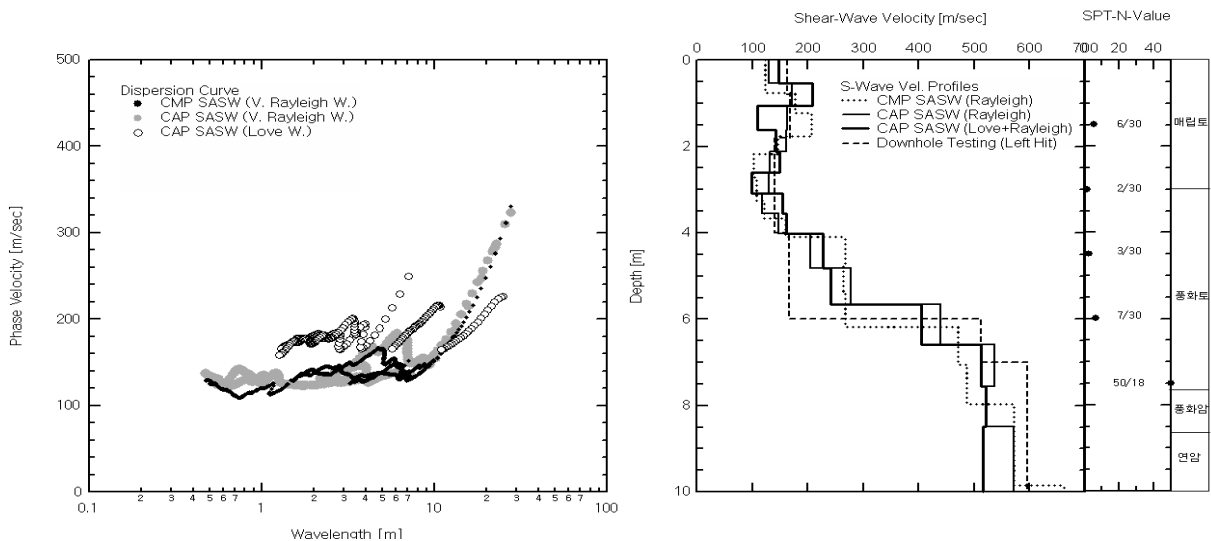
그림 8(a)에서는 CAP SASW 실험에 의한 레일레이파와 러브파의 분산곡선을 나타내고 있는데, 수치 모델리에서 나타나는 것과 같이 러브파의 위상속도가 레일레이파의 위상속도보다 크게 나타나는 것을

알 수 있으며, 러브파의 분산곡선에 빗살무늬 패턴이 나타나는 것을 확인 할 수 있었다. 그림 8.(b)에서는 전체적으로 CAP SASW 기법에 의한 수직 레일레이파만을 이용한 역산해석 결과, 레일레이파와 러브파를 이용하여 동시역산해석한 결과와 다운홀 실험에 대해 역산해석한 결과가 일치하는 것을 알 수 있다. 시추 주상도를 참고할 때, CAP SASW 기법의 동시역산해석 결과가 다운홀 실험, 수직 레일레이파만을 이용한 CAP SASW 실험의 해석 결과보다 매립토 하단 경계(약 심도 4.5m)을 잘 찾아내었다. 그리고 풍화토의 상부(심도 5~8m)의 SPT 저항치가 증가하는 경향을 CAP SASW 기법의 동시역산해석의 결과에서도 확인할 수 있었다. 또한, CAP SASW 기법의 동시역산해석 결과만이 심도 10~11m 부근에서 SPT 저항치가 감소하는 경향을 찾을 수 있었다. 이와 같은 사실은 CAP SASW 기법의 동시역산해석 방법이 지반 표층의 정보와 층간 강성차의 경계를 더욱 신뢰성이 있게 찾을 수 있었다.

4.2 표면파 시험부지에서의 현장 실험

중앙대학교 야외실험장에 설치된 표면파 시험부지에서 감진기의 간격을 2m로 고정하고, 첫 번째 감진기로부터 발진원의 위치를 1m에서 32m까지 확장하며 CAP SASW 실험을 수행하였다 CAP SASW 실험의 신뢰성을 확인하기 위해서 다운홀 실험과 CMP SASW 실험을 병행하여 수행하였다.

그림 9(a)에서는 CAP SASW 기법에 의한 수직 레일레이파의 분산곡선과 CMP SASW 기법에 의한 수직 레일레이파의 분산곡선이 전반적으로 유사한 경향을 보이고 있으며, 특히 고과장 영역에서는 매우 잘 일치하는 것으로 CAP SASW으로 결정된 분산곡선은 신뢰성이 높다고 판단된다. 또한 러브파의 분산곡선에서는 빗살무늬 패턴이 나타나는 것을 알 수 있었다. 그림 9.(b)에서는 레일레이파만을 이용한 CMP SASW와 CAP SASW의 전단강성 주상도, 레일레이파와 러브파를 같이 이용한 CAP SASW의 전단강성 주상도 그리고 다운홀의 전단강성 주상도를 비교하여 보여주고 있다. 흥미로운 것은 레일레이파와 러브파의 동시역산해석 결과만이 매립토층과 풍화토층의 경계(심도 3m)를 찾아내고 있는 것이다. 또한, 본 시험부지는 중차량의 운행으로 심도 1m의 매립토층이 다짐되어 있는 상태인데, CAP SASW 실험의 동시역산해석만이 다짐층의 존재를 확인할 수 있었다. 그림 9(b)에 도시된 시추 주상도는 SASW 시험 축선에 10m 정도 떨어진 시추공의 주상도이다. 본 시험 부지의 지층이 경사를 이루고 있는 것을 참고하여 볼 때, 시추 주상도의 풍화암층의 심도(7.7m)보다 CAP SASW 기법에 의한 동시역산해석의 결과의 풍화암층 약 심도(6.5m)가 높기 위치한 것은 타당한 것으로 사료된다.



(a) 현장 실험으로 측정된 분산곡선

(b) 시추 주상도와 역산 해석 결과의 비교

그림 9. 표면파 시험부지에서의 현장 실험 결과

5. 결 론

지반 공학적 특성을 조사하는 비파괴 조사기법으로서 SASW 기법이 널리 사용되어지고 있다. 현재 SASW 기법은 지반 전단강성 평가시에 수직 레일레이파만을 이용하여 역산해석을 수행하고 있다. 본 연구에서는 지층간의 강성 경계를 보다 정확하게 결정하기위하여 레일레이파와 러브파의 분산특성을 연구하였다. 또한, 고파장 영역까지 측정할 수 있는 CAP SASW 기법을 도입하여 제한된 지반 절편에 대한 전단강성 주상도의 해상도를 향상 시키고자 하였다. 본 연구에서 접근한 알고리즘의 신뢰성을 검증하고자 현장 실험을 수행하였다.

- 지반 전단 강성 주상도 평가를 위해서 기존 SASW 기법에서 활용한 수직 레일레이파의 분산곡선에 고파장 영역의 정보를 추가하였고, 또한 수평 레일레이파와 러브파의 분산정보도 추가하였다. 러브파는 표층의 강성에 대한 독특한 정보를 가지고 있기 때문에, 평가하는데 매우 중요한 정보를 제공한다는 장점이 있었다.
- 적용된 CAP SASW 기법과 CMP SASW 기법을 수치 모델링을 통하여 비교하였다. CAP SASW 기법으로 얻어진 분산곡선은 근접장 효과를 배제하기 위한 필터 처리과정을 거친 후에 결정되는데, CAP SASW 분산곡선은 CMP SASW 분산곡선과 잘 일치하는 것을 확인하였다.
- 현장에서 CAP SASW 실험을 통해서 수직, 수평 레일레이파와 러브파의 분산곡선을 측정하였다. 적용된 CAP SASW 기법으로 광대역 파장의 영역을 측정할 수 있었으며, 특히 CAP SASW 동시역산해석의 결과는 CMP SASW 실험과 다운홀 실험 결과들과 잘 일치하였다. 특히 CAP SASW 동시역산해석 결과는 다른 실험 기법들에 비해서 시추 주상도에서 도시되어진 지층 구조를 가장 유사하게 평가하는 것을 확인할 수 있었다.

참고문헌

1. 이일화, 조성호(2003), "Multi-channel SASW 기법의 특성에 관한 수치해석 연구," 대한토목학회 논문집, 제 23권, 제6C호, pp.407-415.
2. 이일화(2004), 러브파와 레일리파의 분산특성을 이용한 동시역산해석, 중앙대학교 박사학위 논문.
3. 이일화, 조성호(2004), 반무한체와 다층구조 자반에서 러브파와 레일리파의 위상속도 분산특성, 한국지반공학회 논문집, 제 20권, 1호, pp.61-73.
4. 장대우(2005), SASW 실험의 수치모델링에 의한 Rayleigh 파와 Love 파의 분산특성 평가, 중앙대학교 석사학위 논문.
5. 장대우, 조성호, 강태호 (2005), 지반 절편 전단강성 평가의 향상된 해상도 위한 CAP SASW 기법(심사중)
6. Foti, Sebastiano(2000), *Multistation Methods for Geotechnical Characterization using Surface Waves*, Ph. D. Dissertation Georgia Institute of Technology.
7. Ganji, Vahid(1997), *An Automated Inversion Procedure for Surface Wave Testing*, Ph. D. Dissertation, University of New Jersey at New Brunswick.
8. Gucunski, N. and Woods. R. D.(1992), "Numerical simulation of the SASW test," Soil dynamics and Earthquake Engineering, vol. 11, pp.213-227.
9. Joh, S. H.(1996), *Advanced in Interpretation and Analysis Techniques for Spectral-Analysis-of-Surface-Waves(SASW) Measurements*, Ph. D. Dissertation, The University of Texas at Austin.
10. Kausel, E. and Rössset, J. M.(1981), "Stiffness Matrices for Layered Soils," Bull. Seismol. Soc. Am. 71, pp.1743-1761.
11. Kausel, E. and Peek, R.(1982), "Dynamic Loads in the Interior of a Layered Stratum: An Explicit Solution," Bull. Seismol.. Soc. Am. 75/5, pp.1459-1508.