제23회 한국정보처리학회 춘계학술발표대회 논문집 제12권 제1호 (2005. 5)

Wegmann해법의 자동화 알고리즘에 관한 연구

송 은 지
남서울 대학교 컴퓨터학과
e-mail : sej@nsu.ac.kr

A study on the Automatic Algorithm of Wegmann's method

Eun Jee Song
Dept. of Computer Science, NamSeoul University

요 약

단위원의 내부로부터 Jordan 영역으로의 등각사상을 구하는 것은 일반적으로 경계대응함수에 관한 Theodorsen 방정식을 푸는 것으로 귀결된다. 저자는 이 비선형 방정식의 수치적 해법 중 가장 효율적인 방법으로 알려진 Wegmann의 해법을 저주파 필터를 적용하여 개량한 바 있다. 또한 이 해법에 있어 참값을 모르더라도 오차평가가 가능한 방법을 제안하였다 [1,2].

본 논문에서는 참값을 모르더라도 오차평가가 가능한 연구결과를 이용하여 저주파필터를 적용한 Wegmann 방법에서 지금까지 경험에 의존했었던 표본수와 저주파필터의 파라메터가 주어진 문제영역에 따라 자동적으로 결정되는 알고리즘을 제안한다. 이것은 문제의 난이도가 문제영역의 변형에 의존한다는 전제로 문제영역의 모양을 결정하는 함수를 Fourier 급수로 분석하여 얻을 수 있다. 수치실험을 통해 그 유효성을 입증한다.

1.서 론

일반적으로 등각사상을 구하는 것은 수치적 해법에 의해서만 가능하다. 수치등각사상을 구하는 효율적인 해법이란 보다 경제적이고 보다 정확하며 보다 실용적인 알고리즘을 말한다. 여기서는 단위원에서 Jordan 영역에로의 수치등각사상을 구하는 해법을 다루는데 이것은 Theodorsen 방정식 이라하는 비선형 방정식을 푸는 문제로 귀결된다. 이 비선형 방정식을 푸는 여러 가지 해법 중 독일의 Wegmann 박사가 제안한 해법이 가장 효율적인 방법이라 알려져 있다. Wegmann이 제안한 해법은 Newton법으로 속도가 빠르고 Reimann-Hilbert문제로 해석하여 기억용량과 반복 횟수를 대폭 절약한 면에서 매우 효율적인 알고리즘이다[3]. 저자는 이 해법을 저주파필터에 의해 개량한 방법을 제안한바 있으며 참값을 모르더라도 오차평가가 가능함을 보였다 [1,2]

본 논문에서는 저주파필터를 적용한 Wegmann해법에 있어 참값을 모르더라도 오차평가가 가능한 연구결과와 Fourier 급수를 이용하여 주어진 문제영역과 요구정도에 따라 표본수와 저주파필터의 파라메터가 자동으로 결정되는 자동화 알고리즘을 제안한다. 또한 수치실험을 통하여 제안한 방법의 유효성을 입증한다.

2. Wegmann 알고리즘

Wegmann이 제안한 알고리즘은 단위원에서 Jordan 영역에로의 등각사상을 구하는 문제에 대한 해법으로 다음과 같다. Φ 는 다음의 정규화 조건

$$\Phi(0)=0, \qquad \Phi'(0)>0 \quad \text{----------(1)}$$

를 만족하는 단위원에서 Jordan영역에로의 등각사상이라 하자. 그리고 Jordan 폐곡선을 Γ라 하고 $\Gamma := \{ \eta(s) : s\in[0,2\pi)\}$ 로 정의하면

$$\Phi(e^{it}) = \eta(s(t)), \quad s(t)-t \in C_R(T) \quad \text{------} \quad (2)$$

로 표현 가능하다. 등각사상 Φ 는 $A(\overline{D})$에 속하기 때문에 원주상에서 계산되면 내부에서도 계산할 수 있다. 따라서 (1)식의 정규화 조건과 (2)식으로부터

$\eta(s(t)) \in A(\overline{D})|_T$, $[Im\eta(s)]_0 = 0$

($[Im\eta(s)]_0$: $Im\eta(s)$ 의 0차 Fourier계수)

를 만족하는 $s(t)$ (이하 s)를 구하는 것으로 문제가 귀결된다. 구하고자 하는 s 는

$$\Psi(s) := Im\eta(s) - KRe\eta(s) = 0 \quad \text{--------} \quad (3)$$

이 되는 비선형 방정식으로부터 구할 수 있다[4].

이 방정식을 Theodorsen 방정식이라 한다. (3)식은 s_o을 초기치로 하여 다음의 Newton 반복법

$$\Psi(s_k) + \Psi_{s_k}\delta_k = 0 \quad \text{---------} \quad (4)$$

$$s_{k+1} = s_k + \delta_k, \quad k \geq 0$$

에 의해 구한다. Wegmann은 이문제를 Reimann-Hilbert 문제로 해석하여 계산량과 속도를 대폭 감소시켰다. 이것을 컴퓨터상에 실현시키기 위해 먼저 이산화를 하는데 특히 여기서는 (3)식에 나타나있는 공역작용소 K의 이산화가 중요한 요소가 되며 그것은 다음과 같이 한다. 편의상 짝수 표본수 $N=2n$를 사용하여

$t_\nu = 2\pi\nu/N$, $\nu = 0,1,2\cdots,N-1$ 로 한다.

어떤 함수 $u(t) \in C_R(T)$ 의 삼각다항식을

$$u(t) := a_0/2 + \sum_{\mu=1}^{n-1}(a_\mu \cos\mu t + b_\mu \sin\mu t) + a_n \cos nt/2 \quad \text{------(5)}$$

로 하고 Ku 의 근사를 $K_N u := K(u)$로 한다.

즉, K의 근사 작용소 K_N 을 (5)에 의하여

$$K_N u(t) = \sum_{\mu=1}^{n-1}(a_\mu \sin\mu t - b_\mu \cos\mu t) \quad \text{------(6)}$$

로 한다. 구체적인 δ_k의 계산과정은 다음과 같으며 $N=2n$개의 $t_\nu = 2\pi\nu/N$ 위에서 계산한다.

$$v_k(t) := \theta(s_k(t) - t) \quad \text{----------} \quad (7\text{-}1)$$

$$w_k(t) := K_N v_k(t) \quad \text{----------} \quad (7\text{-}2)$$

$$q_k(t) := Im(\eta(\widetilde{s}_k(t))\exp(w_k(t) - i\theta(s_k(t)))) \quad \text{-----} \quad (7\text{-}3)$$

$$\widehat{v}_k(t) = \frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1} v_k(t_\nu), \quad \widehat{q}_k := \frac{1}{N}\sum_{\nu=0}^{N-1} q_k(t_\nu)$$

$$\widehat{\lambda}_k := \widehat{q}_k \cot\widehat{v}_k \quad \text{-----------} \quad (7\text{-}4)$$

$$\delta_k(t) = Re\left(\frac{\eta(s_k(t))}{\dot{\eta}(s_k(t))}\right) - \frac{\widehat{\lambda}_k + Kq_k(t)}{|\dot{\eta}(s_k(t))|\exp(w_k(t))} \quad \text{-----} \quad (7\text{-}5)$$

$$s_{k+1} := s_k + \delta_k \quad \text{-----(7-6)}$$

3. 저주파필터 적용과 오차평가

다음은 본 저자가 제안한 저주파필터 L_l 를 다음과 같이 정의하여 (7-6)에 적용한다[1].

여기서 l 은 뒤에서 몇 개의 고주파성분을 제거할 것인가를 정하는 필터 파라메터이다.

$$L_l(e^{imt}) = \begin{cases} e^{imt} & : 0 \leq |m| \leq n-l \\ 0 & : n-l < |m| \leq n \end{cases}$$

$$s^*_{k+1} := L_l(s_{k+1} - t) + t \quad \text{-----} \quad (7\text{-}7)$$

즉, 위의 알고리즘에 의해 초기치 s_0와 요구정도 ε 가 주어지고 수정량이 $\delta_k < \varepsilon$ 를 만족할 때까지 (7-1)부터 (7-7) 까지 반복적으로 컴퓨터상에서 계산하여 근사값을 구하면 된다. 여기서 저주파필터의 파라메터는 다음과 같이 결정한다.

문제영역의 경계가

$$\eta(t) = (1+\xi(t))e^{it} \quad \text{---------} \quad (8)$$

로 표현되는 영역으로하고 ξ 와 $\dot{\xi}$ 가

$$\xi(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} c_\nu e^{i\nu t},$$

$$\dot{\xi}(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} d_\nu e^{i\nu t} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \nu c_\nu e^{i\nu t} \quad \text{----} \quad (9)$$

로 Fourier전개된다고 하자. ξ와 $\dot{\xi}$ 의 Fourier계수로부터 다음과 같이 D_0 와 D_μ를 정의한다.

$$D_0 := |c_0| + 4\sum_{k=1}^{\infty}|d_k| \quad ,$$

$$D_\mu := 2|d_\mu| + 4\sum_{k=\mu+1}^{\infty}|d_k|, \quad 1 \leq \mu \leq \infty \quad \text{-----(10)}$$

저주파 필터 파라메터 l를 (10)의 $D_l\ (l=0,1,\cdots)$ 이 1 미만이 되도록 결정하면 알고리즘(7-1)에서 (7-7)에 의한 반복법은 수렴한다[5]. 오차평가는 참값을 모르더라도 다음과 같이 할 수 있다[2].

s_{k+1}를 반복법에 의한 근사 값이라 하고 s를 참값이라고 하면

$$\| s_{k+1}-s\|_W \le C_m\|\eta(s_{k+1}(e^{it}))-\Phi_{k+1}(e^{it})\|_r \quad \text{-------} \quad (11)$$

를 만족하는 C_m이 존재한다. 따라서 참값 s를 모르더라도 (11)식의 좌변의 실제오차 대신에 우변의 식에 의해 오차평가가 가능하다.

4. 자동화 알고리즘

주어진 영역과 요구정도에 따라 등각사상 Φ을 자동적으로 구하는 알고리즘은 참값을 모르더라도 오차평가가 가능하다는 연구결과[2]를 이용하여 구한다. 일반적으로 표본수를 증가시킴에 따라 보다 참값에 가까운 근사 값을 구할 수 있는데 반복법에서 초기표본수로부터 표본수를 증가시켜야 하는지 여부를 오차평가에 의해 결정하기 때문이다. 구체적인 자동화알고리즘은 다음과 같다.

1. 저주파필터 파라메터 결정단계

1) (9)식에서 $\dot{\xi}$ 의 Fourier 계수를 구한다.

2) $\dot{\xi}$의 Fourier계수를 이용하여 (10)식으로부터 저주파필터의 파라메터를 결정한다.

2. 초기화 단계

1) 초기 표본수 N은 1단계에서 요구되어진 계수의 함수로 한다.

2) 적당한 초기치 s_0를 정한다

3) 요구정도 ε을 정한다.

3. 반복법

수정량이 요구정도 ε보다 작아질 때 까 지 (7-1)부터 (7-7) 까지 반복법을 시행한다.

4. 오차평가 단계

3단계에서 구한 근사값의 오차평가를 (11)식의 우변에 의해 오차를 구한다. 이 추정오차가 주어진 요구정도 ε 보다 작으면 참값 s의 근사값을 s_k로 하고 반복법을 종료한다. 그렇지 않고 추정오차가 ε 보다 크면 다음단계로 넘어간다.

5. 표본수 증가와 초기치 결정 단계

1) 표본수 2배로 한다. 즉, N을 2N으로 한다.

2) 4단계에서 구한 근사값 s_k 을 2N에서 표본화하여 그것을 초기치로 하고 3단계로 간다.

이 알고리즘의 특징은 다음과 같다.

1. 주어진 문제영역의 경계함수를 이용하여 저주파필터의 파라메터와 초기표본수가 자동으로 정해진다.
2. 저주파필터의 크기에 따라 문제의 난이도를 예측할 수 있다.
3. 이전 단계의 반복법에서 얻은 근사값을 다음 단계의 초기치로 이용함에 따라 보다 경제적으로 보다 정확한 근사값을 구할 수 있다.
4. 요구정도를 만족할 수 있는 표본수 N을 자동적으로 결정할 수 있다.

5. 수치실험

수치실험 예로서는 참값이 알려져 있는 편심원을 다루었다. 실험결과에 사용한 기호는 다음과 같은 의미를 갖고 있다.

$$ER := \max_{\nu=0,1,\cdots,N-1}|s(t_\nu)-s_{k+1}(t_\nu)|$$

$$E := \max_{\nu=0,1,\cdots,N-1}|\eta(s_{k+1}(t_\nu))-\Phi_{k+1}(e^{it_\nu})|$$

$$t_\nu = 2\pi\nu/N$$

즉, ER은 참값과 근사값과의 차인 실제오차이며 E 는 참값을 모르더라도 오차를 추정할 수 있는 추정 오차이다. 편심원은 다음과 같은 경계함수를 갖는다.

경계: $\eta(s)=\rho(s)\,e^{is}$

$$\rho(s)=\frac{R\cos s+\sqrt{1-R^2\sin^2 s}}{R+1}\ ,0 \le R < 1$$

해 : $s(t)=\arctan\dfrac{R\sin t}{1-R\cos t}+t$

이 영역은 형상 파라메터 R이 1을 향해 커질수록 변형이 심해져서 문제가 어려워지는 예이다.
R=0.6일 경우 <표1>에 나타난 것처럼 초기 표본수는 N=64로 정해지고 요구정도에 따라 N=128로 자동적으로 증가하여 요구정도를 만족하는 근사값을 구할 수 있음을 보인다. 문제의 난이도가 높은 R=0.9일 경우도 <표2>에서와 같이 초기 표본수는 N=128로 정해지고 요구정도에 따라 표본수가 자동적으로 증가하여 N=1024 일 때 만족할 만한 근사값을 구할 수 있음을 보인다. 특히 표본수를 증가시켜 반복법 시행시 초기치로서 이전 표본수에서 얻은 근사치를 이용함에 따라 반복횟수가 대폭 감소했음을 알 수 있다.

<표1> R=0.6일 때 자동화알고리즘에 의한 반복법 결과

R=0.6	N = 64	
k	ER	E
1	0.649E+00	0.185E+00
2	0.251E-01	0.240E-01
3	0.365E-03	0.444E-03
4	0.110E-05	0.492E-05
5	0.427E-07	0.191E-06
6	0.944E-08	0.108E-07
	N = 128	
1	0.323E-14	0.402E-13

<표2> R=0.9일 때 자동화알고리즘에 의한 반복법 결과

R=0.9	N = 256	
k	ER	E
1	0.809E+00	0.682E+00
2	0.426E+00	0.379E+00
3	0.141E+00	0.139E+00
4	0.111E-01	0.109E-01
5	0.101E-03	0.158E-03
6	0.285E-05	0.734E-05
7	0.210E-06	0.544E-05
8	0.896E-07	0.208E-06
9	0.836E-07	0.204E-06
	N = 512	
1	0.246E-09	0.158E-09
2	0.252E-10	0.163E-10
	N=1024	
1	0.275E-12	0.814E-14

6. 결론

수학적 모델을 컴퓨터 상에 실현시킬 때 효율적인 알고리즘을 연구하고 개발하는 것이 수치해석학의 궁극적인 목표이다. 일반적으로 수학적 이론의 결과와 컴퓨터상의 계산결과는 정확하게 같지 않으며 효율적인 알고리즘을 위해서는 이 둘의 차이인 오차를 줄이려는 연구가 필요하다. 수치등각사상을 구하는 해법 중에서 저주파필터를 적용한 Wegmann 반복법의 오차평가에 있어 몇 가지 수학적 이론을 근거로 참값을 모르더라도 참값과 근사값의 차이를 추정할 수 있는 추정오차를 제안한 바 있다[2].

본 연구에서는 이 추정오차를 이용하여 해법의 자동화알고리즘을 제안하였다. 이것은 일반적으로 오차를 줄이기 위해 표본수를 증가시키는데 추정오차가 요구정도를 만족하느냐 여부를 시스템내부에서 측정할 수 있기 때문에 가능하다. 여기에서 제안한 알고리즘은 문제 영역의 경계를 표현하는 Fourier 전개에 의해 주어진 문제와 요구정도에 따라 초기 표본수와 저주파필터의 파라메터를 자동으로 결정할 수 있는 특징이 있다. 또한 표본수를 증가시킬 때 반복법의 초기치로서 이전 표본수에서 얻은 근사치를 이용함으로서 반복횟수를 대폭 감소시킬 수 있음은 괄목할 만한 성과라 사료된다.

향후 과제로서는 현재 이 자동화 알고리즘에서는 표본수를 2배로 증가시켜 반복법을 시행하고 있으나 표본수를 보다 효율적으로 증가시켜 나가도록 하는 것이다.

참고논문

[1] 송은지, "저주파 필터를 이용한 Wegmann방법의 개량에 관한 연구",한국정보처리학회 논문집 제8-A권 제4호, pp503-508, 2001.
[2] 송은지, " Wegmann해법의 오차평가에 관한 연구",한국정보처리학회 2004년 춘계발표논문집 제11권 제1호, pp989-992, 2004.
[3] Wegmann R. " Discretized versions of Newton type iterative methods for conformal mapping." J. Comput. Appl.Math.29,No.2, pp.207-224 ,1990.
[4] Gutknecht, M.H. "Numerical conformal Mapping Methods Based on FunctionConjugation." J. Comput. Appl. Math. 14,No.1,2, pp.31-77, 1986.
[5] 송은지, "저주파 필터를 이용한 Wegmann방법의 수렴성에 관한 연구", 한국정보처리학회 논문집 제 11-A권 제2호, pp203-206, 2004.
[6] Wegmann R. " Convergence proofs and error estimates for an iterative method for conformal mappig", Numer. Math. 44, pp.435-461, 1984.
[7] 송은지, "등각사상에 있어 Theodorsen방정식의 고속해법", 한국정보처리학회 논문집 5권2호,pp.372-379, 1998.
[8] 송은지, "Hübner 방법에 기초한 수치등각사상의 자동화 알고리즘", 한국정보처리학회 논문집 제6권 제 10호 , pp.2716-2722, 1999 .