

SAHCA에 관한 연구

조성진*, 최연숙**, 황윤희***, 김한두****, 김석태*****
 *부경대학교 수리과학부
 **영산대학교 자유전공학부
 부경대학교 정보보호 협동과정*인제대학교 컴퓨터
 응용과학부
 *****부경대학교 전자컴퓨터정보통신공학부
 e-mail:sjcho@pknu.ac.kr

A Study on Single Attractor Hierarchical Cellular Automata

Sung-Jin Cho*, Un-Sook Choi**, Yoon-Hee Hwang***
 , Han-Doo Kim****, Seok-Tae Kim*****
 *Division of Mathematical Sciences, Pukyong National Univ.
 **University College of Undeclared Majors, Youngsan
 Univ. ***Dept. of Information Security, Pukyong National
 Univ. ****School of Computer Aided Science, Inje Univ.
 ***** Division of Electronics, Computer and Telecommunication
 Engineering, Pukyong National Univ.

요 약

셀룰라 오토마타가 비트단위로 데이터가 처리되는데 비하여 계층적 셀룰라 오토마타는 바이트 단위 또는 그 이상의 단위로 데이터를 처리할 수 있다. 본 논문에서는 $GF(2^p)$ 위에서의 유한체 성질을 이용하여 한 개의 트리로 구성되는 계층적 비그룹 셀룰라 오토마타인 SAHCA의 성질에 대하여 분석한다. 또한 기본경로를 이용한 선형 SAHCA의 상태전이 그래프를 구성하는 방법과 선형 SAHCA의 상태전이 그래프를 이용하여 비선형인 여원 SAHCA의 상태전이 그래프를 구성하는 알고리즘을 제안한다.

1. 서론

셀룰라 오토마타(CA)는 Von Neumann[1]에 의하여 스스로 조직화하고 재생산할 수 있는 모델로 처음 소개되었다. 이후 Wolfram[2]은 CA를 셀이라 불리는 메모리의 배열로 소개하고, 셀의 상태가 자기 자신 및 인접한 셀 상태의 국소적인 상호작용에 의해서 동시에 갱신되는 시스템으로 제안하였다. 또한 CA는 간단하고, 규칙적이며, 작은 단위로 확장 연결할 수 있는 구조이기 때문에 하드웨어 구현에 알맞다.

CA에 대한 분석은 그 동안 많은 연구가 이루어졌으며, 폭넓게 응용되었다. 특히 Cho 등은 TPMACA(Two Predecessor Multiple Attractor Cellular Automata)의 상태전이 그래프를 기본경로를 이용하여 상태전이 그래프를 구성하는 알고리즘을 제안하였다[3,4]. 또한 여원 CA가 비선형이기 때문에 선형 CA에 비하여 분석이 용이하지 못한 점을 해결하기 위하여 여원 CA와 선형 CA사이의 관계를 밝힘으로써 선형 TPNCA(Two Predecessor Nongroup Cellular Automata)에 대응하는 여원 nongroup CA의 상태전이 행동을 분석하였다[5].

CA는 셀이 한 개의 비트로 이루어져 있으므로 데

† 본 연구는 한국과학재단 목적기초연구지원사업 (R01-2003-000-10663-0)에 의해 수행되었음

이터 처리가 비트 단위로 이루어진다. 그러나 계층적 CA(이하 HCA)는 여러 개의 비트가 한 개의 셀을 이룬다. 따라서 바이트 단위로 데이터 처리가 가능하다. Sikdar 등은 테스트 패턴 생성을 위하여 그룹 HCA를 사용하였으며[6], VLSI 회로의 결함을 진단하기 위하여 MAHCA(Multiple Attractor Hierarchical Cellular Automata)를 이용하였다[7].

본 논문에서는 선형 SAHCA(Single Attractor Hierarchical Cellular Automata)의 특성을 분석하고 상태전이 그래프를 효과적으로 구성하는 알고리즘을 제안한다. 또한 선형 SACA에 대응하는 여원 SACA의 상태전이 그래프를 구성하는 알고리즘을 제안한다.

2. Hierarchical Cellular Automata(HCA)

CA는 한 셀의 상태가 0 또는 1이다. 반면 HCA는 p개의 기억소자가 한 개의 셀을 이루기 때문에 셀의 상태는 {0, 1, 2, ..., 2^p-1}의 원소이다. 그림 1은 일반적인 HCA의 구조이다.

GF(2^p)는 GF(2)의 확장체로 2^p개의 원소로 이루어진다. GF(2^p)를 생성하는 다항식을 **생성다항식**이라 한다. p개의 기억소자가 한 셀을 이루는 HCA에서 다음상태를 결정하는 HCA의 상태전이 함수(ϕ)는 다음과 같다.

$$q_i(t+1) = \phi((w_{i-1}, q_{i-1}), (w_i, q_i), (w_{i+1}, q_{i+1}))$$

여기서 $q_i(t+1)$ 는 i번째 셀의 다음 상태를 나타내며 q_i 는 i번째 셀의 현재 상태를 나타낸다. w_i 는 i번째 셀에 대한 가중치로 GF(2^p)의 원소이다. 선형 GF(2^p) HCA는 상태전이함수를 행렬로 표현할 수

있는데 이를 전이행렬이라 하고, 다음과 같은 삼중대각행렬이다. 이때 w_{ij} 는 가중치이다.

$$T = \begin{pmatrix} w_{11} & w_{12} & 0 & \cdots & 0 \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} & \cdots & 0 \\ 0 & w_{32} & w_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & w_{nm} \end{pmatrix}$$

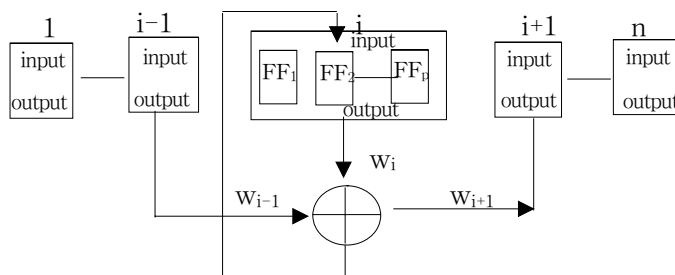
예를 들어 3 셀 GF(2²) HCA의 전이행렬이 다음과 같다고 하자.

$$T = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ \alpha & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha^2 & 1 \end{pmatrix}$$

여기서 α 는 GF(2²)를 생성하는 생성자이다. 따라서 GF(2²)의 원소는 0, 1, α , α^2 이다. 또한 α 는 생성다항식 $g(x) = x^2 + x + 1$ 의 해가 된다. n셀 HCA의 현재 상태 x 에 대하여 다음 상태 y 는 $y = Tx$ 이다.

생성다항식을 특성다항식으로 갖는 행렬 M 을 **생성행렬**이라 한다. 위의 예에서 생성다항식 $g(x) = x^2 + x + 1$ 의 생성행렬은 $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 이다.

n셀 HCA의 상태 x 는 n개의 GF(2^p)의 원소인 α^i 로 이루어진 벡터로 표현된다. 유한체 위에서 곱셈과 덧셈을 위해 α^i 와 M^i 의 마지막 열벡터와 대응 시킨다. 예에서 $\alpha = \langle 10 \rangle = 2$, $\alpha^2 = \langle 11 \rangle = 3$, $\alpha^3 = \langle 01 \rangle = 1$, $0 = \langle 00 \rangle = 0$ 이다. 따라서 GF(2²)위에서 덧셈과 곱셈은 표 1과 같다.



[그림 1] HCA의 일반적 구조

×	0	1	2	3	+	0	1	2	3
0	0	0	0	0	0	0	1	2	3
1	0	1	2	3	1	1	0	3	2
2	0	2	3	1	2	2	3	0	1
3	0	3	1	2	3	3	2	1	0

[표 1] GF(2²)위에서의 곱셈과 덧셈

3. SAHCA의 특성분석

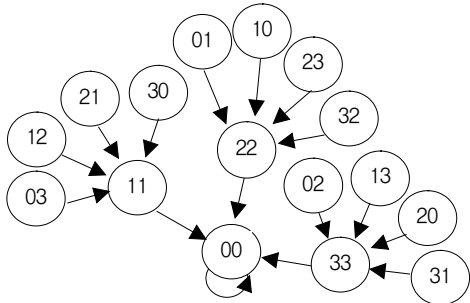
어떤 순환상태 x 에 대하여 $Tx = x$ 를 만족하는 x 를 attractor라 한다. 상태전이 그래프가 한 개의 트리로 이루어진 HCA를 SAHCA라 한다.

1) 선형 SAHCA

선형 n 셀 GF(2 ^{p}) SAHCA C는 nongroup CA로 |T|=0이다. 상태 0만 유일한 attractor이어야 하므로 (T + I)의 계수는 n 이다. 또한 C의 상태전이 그래프는 깊이가 n 인 한 개의 트리로 구성되기 때문에 T의 특성다항식과 최소다항식은 x^n 이다. 그리고 임의의 도달 가능한 상태의 직전자의 수는 2 ^{p} 이므로 T의 계수는 $n-1$ 이다.

<정리 1> C에서 임의의 도달 가능한 상태의 서로 다른 두 직전자의 합은 상태 0의 0이 아닌 직전자 중의 하나이다. □

예를 들어 전이행렬이 $T = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ 인 2셀 GF(2²) CA의 상태전이 그래프는 그림 2와 같다. 그림 2에서 상태 <11>의 직전자 중 <30>과 <12>의 합은 상태 0의 직전자 중 <22>와 같다.



[그림 2] 2셀 GF(2²) SAHCA의 상태전이그래프

C의 한 임의의 도달 가능한 상태에서 가장 가까

운 순환상태 k 로 가는 상태변화를 k -트리의 경로라 한다. C에서 하나의 0-트리의 경로를 알 때 이를 기본경로로 하여 0-트리의 나머지 부분을 기본경로에 놓인 상태들의 합으로 구성할 수 있다.

그림 2에서 03→11→00은 0-트리의 경로중 하나이다. 03→11→00를 0트리의 기본경로라 하면 상태 <23>은 2 <03> + 2 <11> 을 만족한다.

2) 여원 SAHCA

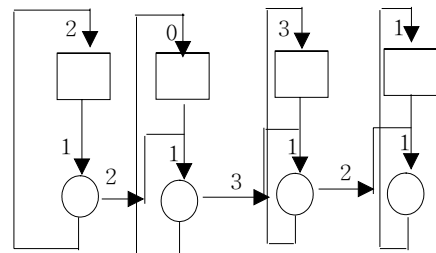
각 셀에 적용되는 상태전이 규칙이 XOR논리와 XNOR 논리의 조합으로 이루어지는 여원 CA의 다음 상태를 나타내는 함수는 $y = \overline{Tx} = Tx + F$ 이고, 또한 현재 상태 x 에서 k 단계 후의 상태는 다음과 같다. 여기서 F 를 여원벡터라 한다.

$$\overline{T^k x} = T^k x + (T^{k-1} + \dots + T + I) F$$

예를 들어 전이행렬 T가 다음과 같은 4-셀 GF(2²) CA를 생각해 보자.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

이때, 여원 벡터를 $F = [2 \ 0 \ 3 \ 1]^t$ 라 하면 주어진 4-셀 여원 GF(2²) CA의 구조는 그림 3과 같다.



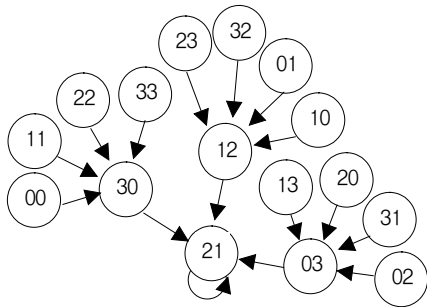
[그림 3] 4-셀 GF(2²) 여원 CA의 구조

선형 n 셀 GF(2 ^{p}) SAHCA C에서 여원벡터 F가 C의 상태전이 그래프에서 레벨 l 에 있는 상태라 하면 C에 대응하는 GF(2 ^{p}) 여원 CA 역시 SAHCA C'가 된다. 여원 벡터의 위치가 선형 SAHCA의 상태전이그래프에서 레벨 l 에 있을 때, 여원 SAHCA C'의 상태전이 그래프는 표 2와 같은 규칙으로 재배열 된다. 예를 들어 그림 2의 C에서 여원벡터 F

가 [30]^l 일 때, C에 대응하는 C'은 그림 4와 같다.

선형 SAHCA	여원 SAHCA
레벨 l 보다 상위 레벨에 있는 상태	레벨이 변하지 않는다.
레벨 l 보다 하위 레벨에 있는 상태	레벨 l에 재배열 된다.
상태 F(여원벡터)	레벨 l-1에 놓인다.
레벨 l에 있는 상태	레벨 l이하에 놓인다.

[표 2] 선형 SAHCA와 여원 SAHCA의 상태배열 관계



[그림 4] GF(2²) 여원 SAHCA의 상태전이그래프

C에서 하나의 0-트리의 경로를 알고, 주어진 여원 벡터에 의해 C로부터 유도되는 C'의 기본 경로를 알면 이 두 경로에 의해 C'의 상태전이 그래프를 구성할 수 있다.

3. SAHCA 트리구성 알고리즘

Step 1. 전이행렬 T에 대하여 Tⁿx=0이고 Tⁿ⁻¹x≠0인 0-트리의 도달불가능상태 x를 찾는다.

Step 2. x를 시작으로 하는 0-트리의 기본경로 x(S_{n,0})→Tx(S_{n-1,0})→...→0를 찾는다.

Step 3. S_{l,k}=(b_l+1)S_{l,0} + ∑_{i=1}^{l-1} b_iS_{i,0}에 의하여 0-트리를 구성한다.

/* 여원 SAHCA 트리 구성*/

Step 4. 여원 SAHCA의 기본경로를 구한다. 여원벡터 F가 도달 불가능한 상태면 0(̄S_{n,0})→T0(̄S_{n-1,0})→...→Tⁿ0가 여원 SAHCA의 기본경로가 되며, 여원 벡터 F가 0이 아닌 도달가능한 상태이면 Step 1에서 구한 선

형 SAHCA의 도달 불가능한 상태 x에 대해 x(̄S_{n,0})→Tx(̄S_{n-1,0})→...→Tⁿx가 여원 SAHCA의 기본경로가 된다.

Step 5. ̄S_{l,k}=̄S_{l-1,0}+(b_l+1)S_{l,0} + ∑_{i=1}^{l-1} b_iS_{i,0}에 의하여 C'의 트리를 구성한다.

4. 결론

본 논문에서는 p개의 기억소자가 한 개의 셀을 이루는 n셀 GF(2^p) 선형 SAHCA의 특성을 분석하고 선형 SAHCA로부터 유도되는 여원 SAHCA의 상태전이 행동을 분석하였다. 또한 선형 SAHCA의 기본경로와 여원 SAHCA의 기본경로를 통하여 GF(2^p) SAHCA의 상태전이 그래프를 구성하는 알고리즘을 제안하였다.

[참고문헌]

- [1] J. Von Neumann, "Theory of Self-Reproducing Automata", University of Illinois Press Urbana, 1966.
- [2] S. Wolfram, "Statistical Mechanics of Cellular Automata", Rev. Modern Physics, Vol. 55, No. 3, 1983.
- [3] 조성진, 최연숙, 김한두, "GF(2) 상에서 1차원 Linear Nongroup CA 특성에 관한 연구", 멀티미디어 학회논문지, 제 4권 1호, pp. 91-94, 2001.
- [4] S. J. Cho, U. S. Choi and H. D. Kim, "Analysis of Complemented CA Derived from a Linear TPMACA", Computers & Mathematics with Applications, Vol. 45, Issues 4-5, pp. 689-698, 2003.
- [5] S. J. Cho, U. S. Choi and H. D. Kim, "Behavior of Complemented CA whose Complement Vector Is Acyclic in a Linear TPMACA", Mathematical and Computer Modelling, Vol. 36, Issues 9-10, pp. 979-986, 2002.
- [6] B.K. Sikdar, P. Majumder, M. Mukherjee, N. Ganguly, D.K. Das and P.P. Chaudhuri, "Hierarchical Cellular Automata as an On-Chip Test Pattern Generator", VLSI Design, Fourteenth International Conference on 2001, pp. 403-408, 2001.
- [7] B.K. Sikdar, N. Ganguly, P. Majumder and P.P. Chaudhuri, "Design of Multiple Attractor GF(2^p) Cellular Automata for Diagnosis of VLSI Circuits", VLSI Design, Fourteenth International Conference on 2001, pp. 454-459, 2001.