다특성을 고려한 상황하에서의 공정능력지수에 관한 연구

- A Study on Process Capability Index using Loss Function Under the Muli-Attribute Conditions -

김 연 희 *
Kim Youn Hee
김 수 열 **
Kim Soo Youl
박 명 규 ***
Park Myoung Kyu

Abstract

Process capability indices are widely used in industries and quality assurance system. When designing the parameter on the multiple quality characteristics, there has been a study for optimization of problems, but there has been few former study on the possible conflicting phenomena in considertion of the correlations among the characteristics. To solve the issue on the optimal design for muliple quality characteristics, the study propose the expected loss function with cross-product terms among the characteristics and derived range of the coefficients of terms. Therefore, the analysis have to be required a multivariate statistical technique. This paper introduces to multivariate capability indices and then selects a multivariate process capability index incorporated both the process variation and the process deviation from target among these indices under the multivariate normal distribution. We propose a new multivariate capability index MC_{pm}^{++} using quality loss function instead of the process variation and this index is compared with the proposed indices when quality characteristics are independent and dependent of each other.

---

* 명지대학교 산업공학과 박사
* 명지대학교 산업공학과 석사
* 명지대학교 산업공학과 교수

1. 서 론

공정능력(Process Capability)이란 제조공정이 제품의 설계과정에서 설정한대로 얼마나 균일한 제품을 생산할 수 있는지를 반영하는 공정의 고유능력 즉, 균일성을 의미한다. 이처럼 고유능력을 평가하기 위하여 다양한 통계적 기법들이 제안되어 왔으며, 이를 공정의 변동과 제품의 규격한계 등으로 공정능력을 평가하는 것을 공정능력분석(process capability analysis)이라 하고, 이를 정량적으로 표현한 것이 공정능력지수(Process Capability Index)이다.

공정에서 품질을 평가하는 방법으로는 불량률, 공정능력지수, 기대손실 등이 있다. 불량률은 제품의 품질특성이 규격을 벗어난 제품의 비율을 나타내는 척도이나, 규격내에서의 분포의 모양이나 상태에 대한 정보는 제공하지 못한다. 공정능력지수는 규격에 대한 산포의 크기로 공정을 평가하는 척도로써 단위에 무관하고 비교기준이 명확한 척도이다. 그러나 전통적인 공정능력지수 C_p와 C_{pk}는 품질특성치가 목표치에 얼마나 접근하고 있는가를 알 수 없으며 단지 품질의 산포만으로 공정능력을 평가하기 때문에 소비자의 손실적 측면을 평가하기가 어렵고, 목표치와 공정평균이 일치하지 않을 경우에는 많은 문제점이 따른다. 대부분의 전통적인 공정능력지수들이 산포에 의해서 공정을 평가하는 것에 대한 한계점에 봉착하면서, 목표치로부터 공정의 평균이 얼마나 접근하고 있는가를 반영하기 시작하였다. 더 나아가 다구찌의 이차손실함수를 이용한 기대손실의 공정능력에 대한 반영은 목표치로부터 품질특성치의 변동으로 인한 손실의 기댓값을 사용함으로써, 목표치로부터의 공정을 평가하고자 하는 현대의 품질개념에 적합한 공정평가척도로 자리매김하게 되었다. 하지만 이것 또한 의사결정에 따른 비교기준이 명확하지 않기 때문에 목표치로부터의 품질변동을 평가하여 고객의 요구를 반영하면서 단위에 무관하고 비교기준도 명확한 공정평가 척도가 요구되어졌다. 이러한 요구에 따라 품질을 합리적으로 평가하기 위해서 Taguchi의 이차손실함수를 적용한 공정능력지수로서 Chan, Cheng과 Spiring은 C_{pm}을 제시하였다[7][13]. 그리고 최근에는 공정의 산포에 의해서 공정능력을 평가하기보다는 목표치로부터 품질의 변동에 따른 경제적손실(비용적 측면)까지도 고려하여 보다 유용한 정보를 많이 제공할 수 있는 공정평가척도들이 대두되고 있으며 그 응용분야를 확장시키고 있는 실정이다.

또한 제품의 품질은 그들 특성 각각의 성능보다는 오히려 결합된 성능에 의해 영향을 받는 다는 것이다. 하지만 지금까지도 폭넓게 쓰이고 있는 대다수의 공정능력지수들은 1개의 특성치(단일특성치)에 대한 통계적 공정관리(SPC)나 공정평가의 척도들이다. 이에 반해 최근에는 공정의 자동화 등으로 인해 실시간의 데이터가 증가하고 그로 인해 관리해야 할 변수(품질특성치)들 또한 증가하게 되었다. 특히 품질특성치가 계측기에 의해 자동적으로 측정되는 경우, 측정치간의 시간간격이 짧아지면서 이들간에는 서로 종속적인 관계가 성립되며 특성치들간에는 독립적 이라기 보다는 오히려 관련이 있어서 결합적으로 분포되어 있다고 가정하는 것이 보다 현실적일 것이다. 이렇듯 단일 특성을 갖는 변수이기보다는 2개 이상의 특성치를 가지는 다특성의 공정이 많아지고 이들은 서로 독립

적 이라기 보다는 여러 품질특성치간에 상관관계를 가지는 종속적인 경우가 많이 있다는 것이다[5]. 지금까지 대개의 연구들이 특성치간의 상관관계를 무시하고 서로 독립이라는 가정하에 적용되어 왔기 때문에 현장과의 차이를 유발할 수 있으며 단일 특성인 경우의 변동조차 하나의 지수로 표현하는 것은 매우 위험한 일이라고 할 수 있을 것이다. 결국 기존의 통계적 공정관리(SPC)방법으로는 다특성의 문제를 해결하기엔 한계가 있다고 판단되었으며, 특히 오늘날엔 다특성치에 관한 품질관리의 중요성은 더욱 커져가고 있다고 할 수 있다.

본 연구에서는 다특성치 문제에 있어서 특성치들 간의 관계를 무시하고 특성치들은 서로 독립이라는 가정 하에 진행되어온 기존의 연구에서 벗어나 현실적으로 많은 다특성치 문제에 있어 특성치들간의 상관관계를 고려한 새로운 평가척도를 제시하고자 한다. 또한 각 특성치와 특성치들간의 상관관계를 고려하여 다특성치 손실함수를 단일 특성치 종류의 조합에 따라 몇가지의 모형으로 구분하고, 다특성치의 상관관계를 고려한 기대손실을 최소화하는 방법을 제시한다.

2. 공정평가척도에 관한 이론적 고찰

2.1 전통적인 6σ 개념의 공정능력지수

Juran[10]은 「공정능력이란 그 공정이 관리상태에 있을 때 각각의 제품의 변동이 어느 정도인가를 나타내는 정보의 양」 이라고 정의하였으며, 공정능력이라는 말대신에 자연공차라는 용어를 사용하고, 보통 6σ라고 정의한 바 있다.

2.1.1 C_p

C_p는 산업계에서 가장 먼저 사용된 것으로 전통적인 6σ개념을 기초로 개발된 공정능력지수이다.(Kane, 1986).

$$C_p = \frac{USL - LSL}{6\sigma} = \frac{T}{6\sigma} \qquad (1)$$

그러나 C_p는 규격의 중심에 대한 공정 평균의 치우침을 고려하지 않고 있다. 이것은 공정산포만 동일하다면 변하지 않는 반면, 공정평균이 규격의 중심에서 멀어질수록 불량률은 기하급수적으로 증가하게 되므로, 공정 잠재력(potential)의 척도로만 이용되고 있는 실정이다.

2.1.2 C_{pk}

C_p가 가지고 있는 문제점을 해결하기 위하여 공정의 평균과 규격의 중심과의 사이에 치우침이 있을때에도 실제공정의 수율을 정확하게 표현할 수 있는 치우침도를 고려한 공정능력지수 C_{pk}가 제안되었다.(Kane, 1986).

$$C_{pk} = \min\left\{ \frac{USL-\mu}{3\sigma}, \frac{\mu - LSL}{3\sigma} \right\}$$

$$= (1-K)C_p \quad \cdots\cdots (2)$$

단, $K = \dfrac{|M-\mu|}{(T/2)}$

$T = USL - LSL,\ M = \dfrac{(USL+LSL)}{2}$

즉, 공정능력지수 C_{pk}는 공정평균의 치우침에 따라 선형적으로 감소한다. 표준편차 σ가 일정하다면 공정능력지수 C_{pk}는 $\mu = M$일 때 최대값을 가지며, 이때 $C_{pk} = C_p$이다. 공정평균 μ가 규격한계에 가까워질수록 C_{pk}값은 감소하며, 규격한계를 벗어나면 음수가 되므로 0으로 정의하는 경우도 있다.

2.1.3 C_{pm}

다구찌의 이차손실함수를 기초로하여 개발된 공정능력지수로서, 공정평균의 이동을 직접 반영하지 않고, 표준편차 대신 평균제곱오차를 사용함으로써 C_p와 C_{pk}의 단점을 보완하여 목표치 T를 고려한 공정능력지수이다.(Hsiang and Taguchi[11], Chan, Cheng, and Spiring[13].

$$C_{pm} = \frac{USL-LSL}{6\sigma'}$$

$$= \frac{USL-LSL}{6\sqrt{E[(y-T)^2]}}$$

$$= \frac{USL-LSL}{6\sqrt{\sigma^2 + (\mu - T)^2}}$$

$$= \frac{C_p}{\sqrt{1+\frac{(\mu-T)^2}{\sigma^2}}}$$

$$= \frac{d}{3\sigma^*} \quad \cdots\cdots (3)$$

여기서 $d=\frac{USL-LSL}{2}$, $\sigma^{*2}=\sigma^2+(\mu-T)^2$

이 공정능력지수는 다구찌의 손실함수(loss function)와 연관성이 깊다. 공정능력지수 C_p와의 관계를 살펴보면, $\frac{\sigma^*}{\sigma}=\sqrt{1+\frac{(\mu-T)^2}{\sigma^2}}\geq 1$이므로 $C_{pm}\leq C_p$이다. 공정능력지수 C_{pk}는 구간 $[LSL, USL]$에 포함되는 임의의 μ에 대하여 σ가 0으로 접근할수록 무한히 증가하지만, 지수 C_{pm}은 $\mu\neq T$인 한 유한한 값을 갖는다. 즉, $C_{pm}\leq\frac{USL-LSL}{6|\mu-T|}$이다. 이러한 특성으로 인하여 공정능력지수 C_{pm}은 공정평균의 치우침을 좀 더 명시적으로 표현할 수 있는 장점이 있다. 그러나 공정능력지수 C_{pm} 단독으로는 공정평균의 치우침을 정확히 나타낼 수 없고, 공정능력지수 C_p와 같이 사용하는 것이 바람직하다. 망목특성인 경우의 기대손실에서 $K=1$인 경우이고, $\mu=T$이면 C_{pm}은 C_p와 일치한다.

2.1.4 C^*_{pm}

한편 Chan, Cheng, and Spiring[13]은 규격한계와 목표치를 이용하여 치우침을 고려한 Kane[12]의 연구결과 (C_{pk})를 토대로 목표치 T가 규격한계의 중심 M과 일치하지 않는 경우를 고려하여 다음과 같이 C_{pm}을 변환하였다.

$$C^*_{pm}=\frac{\min(USL-T, T-LSL)}{3\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}}$$

$$=\frac{\min(USL-T, T-LSL)}{3\sigma^*} \quad \cdots\cdots (4)$$

단, $\sigma^*=\sqrt{E(\mu-T)^2}=\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}$이다.

2.1.5 C_{pmk}

제 3세대 공정능력지수로 일컬어지는 C_{pmk}는 Johmson[15]등에 의해 가변능력지수(flexible capability index)라는 이름으로 처음 선보였으며, 기존의 C_{pk}지수에 목표치에 대한 민감성을 확보하여 공정평균의 이동을 보다 민감하게 감시할 수 있도록 고안된 공정능력지수이다. C_{pmk}는 다음의 식(5)와 같다.(Peason et.al, 1992). 이는 식(3)과 식(5)를 비교해 보면, $C_{pmk} \leq C_{pm}$임을 쉽게 알 수 있다.

$$C_{pmk} = \frac{\min(USL-\mu, \mu-LSL)}{3\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}}$$

$$= \frac{C_{pk}}{\sqrt{1+\frac{(\mu-T)^2}{\sigma^2}}} \cdots\cdots (5)$$

2.2 이차 기대손실함수를 이용한 공정능력지수

C_p, C_{pk}, C_{pm}, C_{pmk}등은 모두 공정의 산포를 근거로 공정능력을 평가하는 척도이지만 손실함수의 기대치를 이용함으로써 공정능력을 평가하는 것은 목표치로부터 품질 변동에 따른 경제적 손실까지 고려하는 보다 유용한 공정평가척도라는 점에 그 의의가 있다고 할 수 있다.

2.2.1 C_{pm}^{+}

Taguchi는 품질을 제품이 출하되어 사용되어질 때 성능특성의 변동으로 인하여 사회에 끼치는 유형 무형의 총손실이라고 정의하고 성능특성치가 목표치와 일치할 때 는 손실이 발생하지 않으며 목표치로부터 멀어짐에 따라 손실이 크게 발생한다는 가정에서 이차식으로 근사화한 손실함수를 $L(y)$로 나타내며 그 기대치를 $E[L(y)]$로 나타낸다.

즉, 공정능력지수 C_{pm}은 아래의 식(6)와 같이 제곱오차손실(squared error loss)의 개념을 적용시켜 목표치로부터 멀어질수록 특성치에 대한 손실이 대칭적 제곱오차의 손실함수, 즉 이차손실함수에 따라 발생한다는 것에 잘 근사한다[2][13].

$$\sigma'^2 = E[(y-T)^2] = \sigma^2 + (\mu - T)^2 \cdots\cdots (6)$$

따라서 망목특성일 경우 다구찌의 이차손실함수는

$$L(y) = k(y - T)^2 \cdots\cdots (7)$$

이고, 이 손실함수의 기대손실은

$$E[L(y)] = E[k(y - T)^2] = kE[(y - T)^2] \cdots\cdots (8)$$

이다. 여기서 k는 손실계수로서 양의 상수값을 가진다. 그리고 손실계수 $k=1$이라면 C_{pm}의 분산과 이차손실함수의 기대손실은 동일한 식을 취하게 된다.

한편, Boyles(1991)는 다구찌의 이차손실함수의 기대손실을 이용한 공정능력지수를 C_{pm}^{+}라고 정의하고 다음의 식(9)와 같이 제안하였다[3].

$$C_{pm}^{+} = \frac{USL - LSL}{6\sqrt{E[L(y)]}} \cdots\cdots (9)$$

즉, 여기서 기대손실 $E[L(y)]$는 식(3)의 C_{pm}에서 산포를 대신하여 쓰인 것이라 할 수 있다. 품질특성이 망목특성이라면 식(9)의 분모에 해당되는 이차손실함수의 기대손실은

$$E[L(y)] = k[\sigma^2 + (\mu - T)^2] \cdots\cdots (10)$$

가 된다.

이러한 이차손실함수의 기대치를 일반적인 함수로 표현하면 다음의 식(11), 식(12)와 같이 정의될 수 있다.

$$L(y) = L(y, T) = \begin{cases} k_1(y - T)^2 & y < T \\ k_2(y - T)^2 & y \geq T \end{cases} \cdots\cdots (11)$$

$$E[L(y)] = \sigma^2[(1 + \zeta^2)(k_1(1 - \Phi(\zeta)) + k_2\Phi(\zeta)) - (k_1 - k_2)\zeta\phi(\zeta)] (12)$$

여기서

$$\zeta = \frac{(\mu - T)}{\sigma}, \quad k_1 = \left(\frac{\beta_2}{\beta_1}\right)k_0, \quad k_2 = \left(\frac{\beta_1}{\beta_2}\right)k_0$$

$$\beta_1 = \frac{T - LSL}{USL - LSL}, \quad \beta_2 = \frac{USL - T}{USL - LSL}, \quad k_0 = \frac{\max(\beta_1/\beta_2, \beta_2/\beta_1)}{2(\beta_1^2 + \beta_2^2)}$$

이다. k_1과 k_2는 비례상수이고 k_0는 k_1과 k_2의 기하평균($k_0 = \sqrt{k_1 \cdot k_2}$)이며, β_1은 목표치가 하한규격에 치우침의 비율이고 β_2는 상한규격에 치우침의 비율이다. $\Phi(\cdot)$와

$\phi(\cdot)$은 표준정규분포의 분포함수와 밀도함수를 각각 나타낸 것이다. 만일 $\beta_1=\beta_2=\frac{1}{2}$, $E[L(y)]=9\sigma^2$로 대칭인 경우 $C_{pm}{}^{+}$는 C_{pm}과 동일하고 k_0가 결정되면 $\mu=T$일 때 $C_{pm}{}^{+}=C_p$가 된다[1].

구 분	기호	공정능력지수의 모형	비 고
산 포 에 의한 공정평가	C_p	$C_p=\frac{USL-LSL}{6\sigma}=\frac{T}{6\sigma}$	규격의 폭과 공정의 산포간의평가방법: Kane(1986)
	C_{pk}	$C_{pk}=\min\left\{\frac{USL-\mu}{3\sigma},\frac{\mu-LSL}{3\sigma}\right\}=(1-K)C_p$	공정평균의 치우침을 고려한평가방법: Kane(1986)
	C_{pm}	$C_{pm}=\frac{USL-LSL}{6\sigma'}=\frac{C_p}{\sqrt{1+\frac{(\mu-T)^2}{\sigma^2}}}$	목표치로부터 공정의 평균을 고려한 평가방법: Chan,Cheng, Spiring(1988)
	C_{pmk}	$C_{pmk}=\frac{\min(USL-\mu,\mu-LSL)}{3\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2}}=\frac{C_{pk}}{\sqrt{1+\frac{(\mu-T)^2}{\sigma^2}}}$	목표치와 공정의 치우침을 동시에 고려한 평가방법: Pearn,Kotz, Johnson(1992)
기대손실 에 의한 공정평가	$C_{pm}{}^{+}$	$C_{pm}{}^{+}=\frac{USL-LSL}{6\sqrt{E[L(x)]}}$	이차손실함수의 기대손실을 이용한 평가방법: Bolyes(1991)

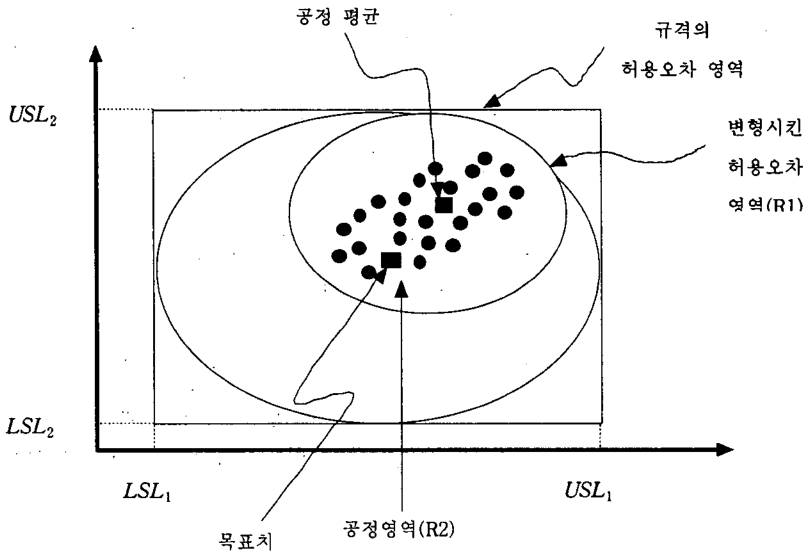
[표 1] 단일특성을 갖는 공정능력지수

[표 1]은 단일특성치에서 공정능력을 평가하는 구분에 따라 공정능력지수들의 모형을 정리한 것이다[1][2][7].

2.3 다특성치 공정능력지수

2.3.1 MC_{pm}

다특성 공정능력지수(Multivariate Capability Index) MC_{pm}은 Taam, Subbaiah, Liddy에 의해 제안된 다특성치 공정능력지수로서, 산포에 의한 단일특성치 공정평가척도인 C_{pm}을 벡터량으로 확장한 개념이며 목표치를 고려한 다특성치 공정능력지수이다[16].



[그림 1] MC_{pm}에서의 변형시킨 규격의 허용오차영역

[그림 1]을 보면, 안쪽의 작은 타원형(R_2)은 공정의 데이터가 이변량 정규분포(bivariate normal distribution)를 따를 경우 신뢰구간 99.73%내에 있을 공정분포의 영역(process region)을 의미하고 바깥쪽의 사각형은 규격한계를 나타내는 규격의 허영오차 영역(engineering tolerance region)을 나타낸다. 이 원래의 규격 허용오차 영역 내에 존재하면서 목표치를 중심으로 한 최대의 타원형 면적(R_1)이 변형시킨 허용오차 영역(modified tolerance region)이다.

따라서 MC_{pm}은 일반적으로 다음 두 영역의 비율로서 나타낸다.

$$MC_{pm} = \frac{R_{1\text{의}}\text{면적또는부피}}{R_{2\text{의}}\text{면적또는부피}}$$

$$= \frac{\text{변형시킨규격허용오차영역의면적또는부피}}{\text{공정영역의면적또는부피}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots \ (13)$$

공정이 다변량 정규분포(multivariate normal distribution)를 따른다면 위에 식(13)에서 분모의 R_2면적은 이차식 $(x-\mu)' \ \Sigma_T^{-1}(x-\mu) \le K(9h)$의해 타원형의 형상을 띠게 된다. 따라서 MC_{pm}은 식(14)와 같이 표현된다.

$$MC_{pm} = \frac{\text{변형시킨규격허용오차영역의면적또는부피}}{((X-\mu)'\ \Sigma_T^{-1}(X-\mu) \le K(m))\text{의면적또는부피}}$$

$$= \frac{\text{변형시킨규격허용오차영역의면적또는부피}}{|\Sigma_T|^{\frac{1}{2}}(\pi K)^{\frac{m}{2}}[\Gamma(\frac{m}{2}+1)]^{-1}}$$

$$= \frac{\text{변형시킨규격허용오차영역의면적또는부피}}{|\Sigma|^{\frac{1}{2}}(\pi K)^{\frac{m}{2}}[\Gamma(\frac{m}{2}+1)]^{-1}[1+(\mu-T)'\Sigma^{-1}(\mu-T)]^{\frac{1}{2}}} \quad (14)$$

여기서 m은 특성치의 수이고, Σ_T는 평균제곱오차 매트릭스, Σ는 분산-공분산 매트릭스, $\Gamma(a)$는 감마분포를 의미하며 $K(m)$은 "6σ"의 개념으로 $\chi^2(m, 0.9973)$의 값을 말한다. 이때 $MC_{pm}=1$이면 공정의 평균과 목표치가 일치함을 의미하며 1보다 크거나 같으면 공정능력이 양호하다고 평가할 수 있다.

2.3.2 MC_p

MC_p는 Chen에 의해 제안된 공정능력지수로서 규격의 폭과 공정의 양품률($1-\alpha$)의 비율에 의해 평가하는 척도이다. 양쪽규격의 상한선(USL)과 하한선(LSL)이 주어지고 규격 폭의 중심(목표치 T)와 목표치를 중심으로 허용오차 폭의 $\frac{1}{2}$간격을 γ_0, 즉 ($\gamma_0 = \frac{USL-LSL}{2}$)로 나타낸다. γ은 규격내에서 공정의 양품률($1-\alpha$)에 대한 폭의 $\frac{1}{2}$간격의 값을 의미한다.

따라서 공정능력지수 MC_p는 다음의 식(15)와 같다.

$$MC_p = \frac{\gamma_0}{\gamma} \quad (15)$$

여기서 $\frac{\gamma_0}{\gamma} \ge 1$, (or $\gamma \le \gamma_0$)이면 공정이 양호하다고 할 수 있다.

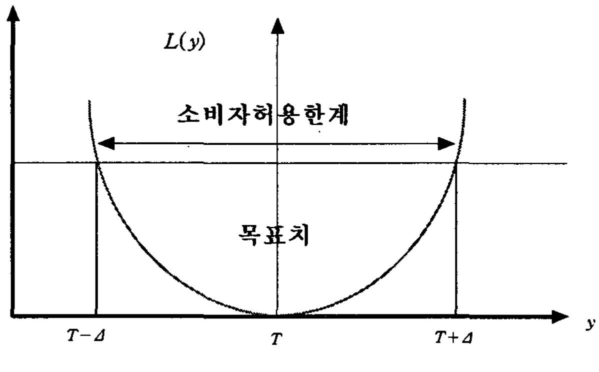
2.4 손실함수

2.4.1 단일특성치 이차손실함수

Taguchi는 품질이란 "제품이 출하된 시점에서부터 성능특성치의 변동(Variability)과 부

작용(harmful side effects)등으로 인하여 사회에 미친 총손실(Total loss)"이라고 정의를 내리고 있다. 이러한 품질정의의 접근에 있어서 가장 핵심이 되는 것은 손실의 개념이다. 이는 종래의 소비자 기대와의 불일치, 이상적 성능과의 불일치 등에 의해 야기되는 사회적 손실(Societal Losses)의 개념으로 보는 것으로부터 출발한다. 즉, 사회적 손실의 개념은 원하는 품질 특성의 제품을 만들지 못함으로 인해 발생되는 손실을 생산자 혹은 소비자의 어는 한쪽이 책임을 져야한다는 개념과는 달리 모두(사회)가 그 책임을 져야하는 현대적 개념이라는 것이다[4]. 여기서 손실이란 제품이 완전하지 못함으로써 발생하는 낭비, 비용, 잠재적인 손해 등을 말한다. Taguchi의 손실함수 개념은 성능특성치가 목표치와 일치할 때는 손실이 발생하지 않으며 목표치로부터 멀어짐에 따라 손실이 크게 발생한다는 가정에서 이차식으로 근사화한 손실함수(loss function) $L(y)$로 나타내며 그 기대치를 $E[L(y)]$로 나타낸다[17].

아래 [그림 2]에서 수평축은 성능특성치(y)를 나타내며, 그 이상적인 수치 즉, 목표치를 T라 하고, 수직축은 금액으로 환산된 손실을 의미한다. 이때 성능특성치는 소비자에 의해 허용된 오차한계 즉, 하한한계($T-\Delta$)와 상한한계($T+\Delta$)를 지니고 있는 개념이 종래의 샘플링에 의한 제품의 판정방법이다. 그러므로, 만약 제품의 성능특성치가 ($T-\Delta, T+\Delta$)안내에 존재한다면 손실은 0이며, 만약 성능특성치가 소비자의 허용오차 한계를 벗어난다면 그 차이와는 무관하게 A원 만큼의 손실이 발생한다.



[그림 2] 손실함수 모형

즉, 특성치를 y, 목표치를 t라 놓고 $y=t$일 때 Taylor 급수 전개에 의한 손실함수 $L(y)$를 표현하면,

$$L(y)=L(t)+L'(t)(y-t)+\frac{L''(t)}{2}(y-t)^2+\cdots \cdots\cdots\cdots \quad (16)$$

이 된다. 이때 망목특성치의 경우는 식(16)에서 2차항까지만을 포함시켜 근사화한 것이 손실함수이며 이 이차손실함수의 기대치를 구하여 기대손실을 구한다. 망소특성치의 경우에는 망목특성치의 목표치 t를 0(zero)으로 치환한 개념이며, 망대특성치는 특성치 y를 $y' = \frac{1}{y}$로 변환하여 y'를 망소특성치의 경우처럼 분석하여 손실함수와 기대손실을 구한다.

따라서 Taguchi의 품질특성에 따른 손실함수 $L(y)$와 기대손실 $E[L(y)]$를 정리하면 다음의 [표 2]와 같다[6].

[표 2] 특성치에 따른 손실함수와 기대손실함수

품질 특성	손실함수 $L(y)$	기대손실함수 $E[L(y)]$	비 고
망목	$k(y-t)^2$	$E[k(y-t)^2] = k[\sigma^2 + (\mu - t)^2]$	$k = \frac{A}{\Delta^2}$
망소	ky^2	$E[ky^2] = k(\ \sigma^2 + \mu^2\ )$	
망대	$k\left(\frac{1}{y^2}\right)$	$E\left[\frac{k}{y^2}\right] = k\left[\frac{1}{\mu^2}\left(\frac{3\sigma^2}{\mu^2}+1\right)\right]$	

3. 다특성을 고려한 상황하에서의 공정능력지수

3.1 연구의 범위와 가정

(1) 품질특성은 세 개 이상의 다특성을 갖는 연속적인 값을 갖는다.
(2) 공정의 데이터는 다변량 정규분포(multivariate normal distribution)를 따른다.
(3) 품질특성의 상관관계를 고려한다.

3.2 다특성을 고려한 공정능력지수 MC_{pm}^{++} 모형의 개발

서론에서도 언급했듯이 다특성의 문제에 있어서 품질 특성치들 간의 상관관계가 없다는 가정하에 진행되어온 기존의 연구에서 벗어나 현실적으로 많은 다특성의 문제에 있어 특성치들간의 상관관계를 고려한 새로운 평가척도를 제시하고자 한

다. 또한 각 특성치와 특성치들간의 상관관계를 고려하여 다특성치 손실함수를 단일 특성치 종류의 조합에 따라 두 가지의 모형으로 구분하고, 다특성의 상관관계를 고려한 기대 손실을 최소화하는 방법을 제시한다. 산포 대신 손실함수의 기대치를 이용함으로써 비용적 측면이 반영된 보다 경제적 척도인 다특성을 고려한 상황하에서의 공정능력지수 MC_{pm}^{++}를 개발하고자 한다.

3.3 단일특성치 기대손실 함수의 응용

단일 특성의 경우 C_{pm}은 제곱오차 손실(squared error loss)의 개념을 적용시켜 목표치로부터 멀어질수록 특성치에 대한 손실이 대칭적 제곱오차의 손실함수, 즉 이차손실함수에 따라 발생한다는 것에 잘 근사하기 때문에 산포 대신 손실함수의 기대손실을 이용하여 제안된 공정능력지수가 C_{pm}^{+}이다. 즉, Boyles는 단변량의 C_{pm}으로부터 Tagchi의 이차손실함수의 기대손실을 이용한 공정능력지수를 C_{pm}^{+}라고 정의하고 식(17)과 같이 제안하였다[2][18].

$$C_{pm}^{+} = \frac{USL-LSL}{6\sqrt{E[L(x)]}} \cdots\cdots (17)$$

다음 [표 3]에서와 같이 C_{pm}과 C_{pm}^{+}을 비교하면 두 식이 잘 근사한다는 것을 알 수 있다.

[표 3] C_{pm}과 C_{pm}^{+}의 비교

산포에 의한 공정평가척도	기대손실에 의한 공정평가척도
$C_{pm} = \frac{USL-LSL}{6\sigma'}$	$C_{pm}^{+} = \frac{USL-LSL}{6\sqrt{E[L(x)]}}$
$= \frac{USL-LSL}{6\sqrt{E[(x-T)^2]}}$	$= \frac{USL-LSL}{6\sqrt{E[k(x-T)^2]}}$
$= \frac{USL-LSL}{6\sqrt{\sigma^2+(\mu-T)^2]}}$	$= \frac{USL-LSL}{6\sqrt{k[\sigma^2+(\mu-T)^2]}}$

따라서 기대손실함수를 이용한 다특성의 공정평가척도에 대한 모델링은 단일특성치의 C_{pm}^{+}에서 산포 대신 기대손실 함수를 이용하였듯이 다특성의 모형에 있어서도 단일특성의 C_{pm}에서와 같이 다특성의 공정능력지수 MC_{pm}에서 목표치로부터 멀어질수록 특성치에 대한 손실이 다특성치 손실함수에 잘 근사함을 보임으로써 산포 대신 손실함수를 이용한 새로운 다특성치 공정능력지수 MC_{pm}^{++}모형을 도출할 수 있을 것이다.

3.4 다특성치 기대손실함수

다특성치 모형은 단순 이차손실함수를 확장하여 다특성치의 손실함수를 유도한 것이다. 다특성치일 경우는 품질 특성치의 수가 2개 이상이므로 품질 특성치와 목표치는 벡터(vector)량이 될 것이다. 특성치의 수가 m개, 특성치를 y, 목표치를 t라고 할 때 $y=t$일 때 Taylor 급수로 전개하여 2차항까지 근사화하면 다특성치 손실함수 $L(y,t)$는 다음과 같다[8][14].

$$L(y,t)=L(t,t)+L'(t,t)(y-t)+\frac{1}{2}(y-t)^T L''(t,t)(y-t)+\cdots \quad (18)$$

식(18)에서 2차항 까지만을 포함시켜 손실함수를 근사화시키면

$$L(y,t)=\frac{1}{2}(y-t)^T H_L(t)(y-t)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}k_{ij}(y_i-t_i)(y_j-t_j) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (19)$$

이 된다. 이때 $H_L(t)$은 손실함수 $L(y,t)$를 위한 Hessian 행렬이고,

이때

$$k_{ii}=k_i=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y_i^2}\right)\Bigg|_{y_i=t_i,\, i=1\cdots\cdots m}$$

이고,

$$k_{ij}=\left(\frac{\partial^2 L}{\partial y_i \partial y_j}\right)\Bigg|_{y_i=t_i,\, y_j=t_j,\, i\neq j=\cdots\cdots m} \quad \text{이다.}$$

따라서 손실함수 식(19)의 기대손실 $E[L(y,t)]$를 구하면

$$E[L(y,t)]=E\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}k_{ij}(y_i-t_i)(y_j-t_j)\right]$$

$$=E\left[\sum_{i=1}^{m}k_i(y_i-t_i)^2\right]+E\left[\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{n-1}k_{ij}(y_i-t_i)(y_j-t_j)\right]\cdots \quad (20)$$

이 된다. 식(20)을 평균(μ)과 분산(σ^2)으로 각각 나타내면 식(21)과 같다.

$$E[L(y,t)]=\sum_{i=1}^{m}k_i[(\mu_i-t_i)^2+\sigma_i^2]+\sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{n-1}k_{ij}[\sigma_{ij}+(\mu_i-t_i)(\mu_j-t_j)] \quad (21)$$

만약 y_i, y_j가 서로 독립이라면 식(21)에서 공분산 σ_{ij}의 값이 0(zero)가 되므로 모든 $i \neq j$에 대한 기대손실은 식(22)와 같다.

$$E[L(y,t)] = \sum_{i=1}^{m} k_i[(\mu_i - t_i)^2 + \sigma_i^2] + \sum_{i=2}^{m}\sum_{j=1}^{n-1} k_{ij}(\mu_i - t_i)(\mu_j - t_j) \quad (22)$$

또한 모든 i에 대하여 $\mu_i = t_i$인 경우에는 식(23)와 같다.

$$E[L(y,t)] = \sum_{i=1}^{m} k_i \sigma_i^2 \cdots\cdots \quad (23)$$

여기서 k는 특성치의 손실을 동일한 화폐 단위로 환산해 주는 역할을 하는 상수로서, 만일 사용자가 특성치들 간의 중요도를 함께 고려하여 이들 상수의 값을 정했다 하고 k_i, k_{ij}, k_{ji}라 정의하면 상수 k_i, k_{ij}, k_{ji}는 특성치들 간의 단위를 동일한 화폐 단위로 일원화 하는 역할과 특성치들간에 가중치를 부여하는 역할을 겸하게 된다. 이때 k_i는 품질 특성치 i의 손실을 화폐단위로 환산해 주는 상수로서, 소비자의 허용차 구간($T-\Delta, T+\Delta$)에서 y가 이 구간을 벗어날 때 소비자가 제품을 수리하거나 폐기처분 하는데 A원의 비용이 든다고 하면 $k_i = \frac{A}{\Delta^2}$로 측정이 가능하다. 하지만 k_{ij}는 품질 특성치 i, j에 관련된 손실을 화폐단위로 환산해 주는 상수로서, k_{ij}는 $k_{11}, k_{22}, \cdots, k_{mm}$등과 같이 개별 특성치에 관련된 k값 뿐이다. 따라서 다특성치 품질 손실함수의 성질을 이용하여 k_{ij}값의 범위를 구할 수 있다.

다특성 품질 손실함수에 대한 성질을 살펴보면 다음과 같다. 첫째, $L(y,t)$은 목표값 t에서 최소가 된다. 둘째, $L(y,t)$은 t주변에서 볼록함수 이다. 셋째, 모든 y에 대해 $L(y,t) \geq 0$이다. 둘째와 셋째 성질을 유지하기 위해서는 $L(y,t)$에 대한 Hessian 행렬인 $H_L(t)$은 양반정치(positive semidefinite)이어야 한다. 만일 두 개의 품질 특성치를 고려하면 손실함수 $L(y_1, y_2)$는 다음의 식 (24)와 같다.

$$L(y_1, y_2) = k_1(y_1 - t_1)^2 + k_2(y_2 - t_2)^2 + k_{12}(y_1 - t_1)(y_2 - t_2) \cdots \quad (24)$$

이 때

$H_L(t)$는 식(25)과 같다.

$$H_L(t) = \begin{bmatrix} 2k_1 & k_{12} \\ k_{12} & 2k_2 \end{bmatrix} \cdots\cdots \quad (25)$$

만일 $k_1 \geq 0$와 $k_2 \geq 0$이면 $H_L(t)$의 두 개의 대각원소(diagonal element)는 0보다 크거나

같다. 또한 만일 $-2\sqrt{k_1k_2} \le k_{12} \le 2\sqrt{k_1k_2}$이면 $H_L(t)$의 행렬식(determinant)는 0보다 크거나 같다. 위의 둘째, 셋째 성질에 대한 필수조건은 $k_1 \ge 0, k_2 \ge 0$와 $-2\sqrt{k_1k_2} \le k_{12} \le 2\sqrt{k_1k_2}$(또는 $4k_1k_2 \ge k_{12}^2$)이다[8][14]. 그러므로 각각의 개별특성치에 관련된 k_1과 k_2값이 정해지면 특성치간에 관련된 k_{12}값은 위의 범위를 만족시켜야 한다. 만일 두 개의 품질 특성치를 다시 고려하면 손실함수 $L(y_1, y_2)$는 다음의 식(26)과 같다[9].

$$L(y_1, y_2) = k_1(y_1 - t_1)^2 + k_2(y_2 - t_2)^2 + k_{12}(y_1 - t_1)(y_2 - t_2) \cdots\cdots \quad (26)$$

본 연구에서는 상관관계를 고려한 다특성치 손실함수가 최소가 되는 기대손실함수를 제안하고자 한다.

우선 망소특성치 y_1과 망목특성치 y_2의 경우를 고려하면 손실함수는 다음과 같다.

$$L(y_1, y_2) = k_1y_1^2 + k_2(y_2 - t_2)^2 + k_{12}y_1(y_2 - t_2) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (27)$$

식(27)의 기대손실함수는 다음과 같다.

$$E(L(y_1, y_2)) = k_1E(y_1^2) + k_2E(y_2 - t_2)^2 + k_{12}E(y_1(y_2 - t_2)) \cdots\cdots\cdots \quad (28)$$

식(28)의 각 모수에 대한 추정치를 대입하여 기대손실을 구하면

$$\begin{aligned} E[L(y_1, y_2)] = {} & k_1\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} y_{1l}^2\right] + k_2\left[s_2^2 + (\overline{y_2} - t_2)^2\right] \\ & + k_{12}\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n} y_{1l}\,(y_{2l} - t_2)\right] \end{aligned} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (29)$$

이다.

3.5 다특성치 기대손실함수의 확장

품질 특성치의 총수가 m개이고 망소(y_i), 망대(y_j), 망목(y_p) 특성치의 수가 각각 u, v, w일 때 기대손실함수 $E[L(y)]$는 다음과 같다. 단 망대특성치 y_j는 $\frac{1}{y_j}$로 변환하여 망소특성치로 간주한다.

특성치의 수가 3개 이상 일 때 상관관계를 모두 고려한 다특성치 손실함수는 다음 식(30)과 같다.

$$L(y_i, y_j, y_p) = k_i\ y_i^2 + k_j\ \left(\frac{1}{y_j}\right)^2 + k_p\ (y_p - t_p)^2 + k_{ij}\left(y_i\ \frac{1}{y_j}\right) \cdots\cdots \quad (30)$$
$$+ k_{ip}\ (y_i\ (y_p - t_p)) + k_{jp}\left(\frac{1}{y_j}\ (y_p - t_p)\right)$$

식(30)에 각 모수에 대한 추정치를 대입하여 기대손실을 구하면 다음 식(31)과 같다.

$$E[L(Y)] = \sum_{i=1}^{u} k_i \left[\frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} y_{il}^2\right] + \sum_{j=1}^{v} k_j \left[\frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{y_{jl}^2}\right] + \sum_{p=1}^{w} k_p \left[s_p^2 + (\overline{y_p} - t_p)^2\right]$$
$$+ \sum_{i,j=1}^{u,v} k_{ij} \left[\frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} y_{il}\ \frac{1}{y_{jl}}\right] + \sum_{i,p=1}^{u,w} k_{ip} \left[\frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} y_{il}\ (y_{pl} - t_p)\right]$$
$$+ \sum_{j,p=1}^{v,w} k_{jp} \left[\frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} \frac{1}{y_{jl}}\ (y_{pl} - t_p)\right] \cdots\cdots \quad (31)$$

단, 아래첨자 i, j, p는 각각 망소, 망대, 망목특성치를 의미한다.

$i = 1, 2, \cdots\cdots, u \quad j = 1, 2, \cdots\cdots, v \quad p = 1, 2, \cdots\cdots, w$

$u + v + w = m$이다.

3.6 다특성치의 상관관계를 고려한 기대손실함수 MC_{pm}^{++}

이상에서와 같이 특성치의 수를 확장하여 특성치가 세 개 이상이면서 각각의 상관관계를 고려한 기대손실함수를 구하여 보았다. 따라서 이러한 개념들을 도입하여 다특성치 손실함수의 기대손실을 이용한 새로운 공정능력지수를 MC_{pm}^{++}라 정의하고 그 모형을 다음의 식(32)와 같이 제안하고자 한다.

$$MC_{pm}^{++} = \frac{\text{변형시킨규격허용오차영역의면적또는부피}}{6\sqrt{E(L(Y))}} \cdots\cdots \quad (32)$$

위에서 제시한 새로운 다특성치 공정능력지수 MC_{pm}^{++}는 기존의 연구에서는 무시되었던 상관관계의 신중한 해석과 동시에 품질변동에 따른 손실에 보다 민감하게 반응할 수 있는 평가척도임에 그 의의가 있다.

4. 결론 및 추후연구과제

본 연구에서 제안한 새로운 다특성치 공정능력지수인 MC_{pm}^{++}은 규격의 중심과 목표치와의 치우침과 더불어 다수의 망대, 망목, 망소 특성을 갖는 목표치로부터의 공정의 평균이 얼마나 떨어져 있는가를 잘 반영하고 있으리라 기대한다. 또한 기존의 다특성치 공정능력지수인 MC_{pm}의 장점은 그대로 지니면서, 상관계수의 변화에 따라 일관성 있게 공정능력을 평가할 수 있는 척도라는 장점을 가지고 있다는 것이다. 공정의 산포에 의해서만 공정능력을 평가하는 방법들에 비해 손실함수를 이용하여 목표치로부터 품질의 변동에 따른 경제적 손실까지도 고려함으로써 보다 유용한 정보를 제공할 수 있는 공정평가 척도라고 할 수 있다. 향후에는 새로 제안된 공정능력지수의 수치사례와 함께 실제 현장에서 검토될 수 있는 적용사례를 중심으로 연구가 지속되어야 할 것이다.

참 고 문 헌

[1] 구철본, 송서일(1992), "다구찌의 손실함수를 이용한 공정능력지수의 최적화에 관한 연구", 「한국품질관리학회지」 Vol. 20, No.1

[2] 구본철, 고수철, 김종수(1997), "손실함수에 의한 기대상대손실과 C_{pm}의 관련성", 「공업경영학회지」 Vol.20, No.41

[3] 김평구, 조중재(1998), "혼합정규공정하에서 손실함수를 이용한 공정능력지수", 「품질경영학회지」, Vol26, No.4

[4] 이상복,(1997) "다구찌의 품질손실함수에 대한 분석", 「품질경영학회지」, 제25권, 제3호

[5] 백재욱, 조진남,(1999) "공정능력지수에 대한 비평과 올바른 공정능력분석 절차", 「품질경영학회지」, Vol.27, No.2

[6] 박성현, (2003) 개정판 「현대실험계획법」, 민영사

[7] 정영배, "이차손실함수를 이용한 유동적인 공정수행척도", 「공업경영학회지」 제18권, 제36호, 1995

[8] 조용욱, 박명규,(2000) "특성치간의 상관관계를 고려한 다특성치 파라미터 설계", 「안전경영과학회지」, 제2권, 제1호, pp.161-170

[9] 조용욱, 박명규,(2001)"기대손실함수를 이용한 다특성치 강건설계", 「산업경영시스

템학회지」, 제24권, 제63집.

[10] Juran, J.M., Ed.(1974), Quality Control Handbook, 3rd de. McGraw-Hill, New York, NY.

[11] Hsiang, T.C. and Taguchi, G.(1985), "A Tutorial on Quality Control and Assurance-The Taguchi Methods", ASA Annual Meeting, Las Vegas, NV.

[12] Kane, V.E.(1986), "Process Capability Indices", Journal of Quality Technology, Vol.18, No.1, pp.41-52

[13] Chan, L.K, Chung, S.W, Spiring, F.A.(1988),"A New Measure of Process Capability : C_{pm}", Journal of Quality Technology, Vol.20, No.3, pp.162-175,

[14] Kapur,K.C. and Chen, G.(1988), "Signal-to-Noise Development for Quality Engineering", Quality and Reliability Engineering International, Vol.4, pp.131-141.

[15] Peason, W.L., Kotz, S. and Johnson, N.L.(1992), "Distributional and Inferential Properties of Process Capability Indices", Journal of Quality Technology, Vol.24, No.4, pp.216-231

[16] Taam, W., Subbaiah, P. and Liddy, J.W.(1993), "A Note on Multivariate Capability Indices", Journal of Applied Statistics 20, pp.339~351

[17] Braker, T.B.(1987), "Quality Engineering by Design : Taguchi's Philosophy", Quality Assurance, Vol.13,No.3, pp.72-80

[18] Boyles, R.A(1991), "The Taguchi Capability index", Journal of Quality Technology, Vol.23, No.1, pp.17-26