

# 유체가 흐르는 곡선관의 진동 해석과 비선형 평형 방정식

## Vibration Analysis and Non-linear Equilibrium Equations of a Curved Pipe Conveying Fluid

정두한\* · 정진태\*\*

Duhan Jung and Jintai Chung

**Key Words :** Vibration (진동), Curved Pipe (곡선관), Pipe Conveying Fluid (유체가 흐르는 파이프), Equilibrium Equation (평형방정식)

### ABSTRACT

Free vibration characteristics of a curved pipe conveying fluid is studied when the pipe is clamped at both ends. Using the perturbation method, the non-linear governing equations divided into two parts; the steady state non-linear equilibrium equations and the linearized equations of motion in the neighborhood of the equilibrium position. The natural frequencies are computed from the linearized equations of motion. In this study, the equilibrium positions are determined by two types of equations, i.e., (1) the non-linear equations, and (2) the equations obtained by neglecting the non-linear terms. The natural frequencies obtained from the non-linear equilibrium equations are compared to those obtained from the linearized equilibrium equations. From the results, as the fluid velocity increases, the equilibrium position should be determined from the nonlinear equations for the vibration analysis of the curved pipe conveying fluid.

### 1. 서 론

내부에 유체가 흐르는 파이프의 진동은 응용 범위가 다양하고 제품의 성능과 수명에 주요한 영향을 미칠 뿐 아니라 소음 등의 발생 원인이 되기 때문에 이를 해결하기 위한 연구가 다양한 방법으로 진행되고 있다. 그러나, 상대적으로 진동 특성이 매우 복잡한 곡선관에 대한 연구는 직선관에 비하여 미흡한 실정이다. 실제 배관계는 직선관과 곡선관의 조합으로 구성되므로 전체 배관계의 진동으로 연구를 확대하기 위해서는 곡선관에 대한 다양한 연구가 필요한 시점이다.

유체가 흐르는 곡선관에 대한 초기 연구는 Svetlitskii<sup>(1)</sup>에 의하여 수행되었는데, 그는 유연한 호스의 굽힘 강성을 무시하고 현으로 가정하여 면외 진동 특성을 연구하였다. Chen<sup>(2,3)</sup>은 파이프의 중심선은 인장되지 않는다는 가정을 사용하여 내부 유체의 유동 속도가 임계값을 초과하면 불안정 현상이 발생함을 예측하였다. Hill 과 Davis<sup>(4)</sup>는 곡선관 내부 유체의 유동에 기인하는 초기 장력을 고려한 연구를 수행하였다. Misra *et al.*<sup>(5,6)</sup>은 곡선관의 진동에 대한 비선형 운동방정식을 유도하여 중

심선의 인장 가능 조건과 인장 불가능 조건을 적용하는 방법으로 진동 해석을 수행하여 선행연구를 재평가 하였다. 그러나 평형위치를 결정하는 평형 방정식은 변형이 미소하다는 가정 하에 비선형 항을 무시하였다. 일반적으로 미소 변형만이 있는 경우에 이러한 해석 방법은 타당하지만, 곡선관에 흐르는 유체의 유동 속도가 증가하면 변위가 커지게 되어 변형의 비선형성을 무시할 수 없게 된다. 한편, 섭동법을 이용하여 진동 특성을 예측할 때 평형 위치는 시스템의 고유진동수 변화에 영향을 미치므로, 적절한 평형해를 구하는 것은 진동 해석에 있어 매우 중요하다.

따라서 본 연구에서는 유체를 이송하는 곡선관의 고유진동수에 중요한 영향을 미치는 평형 위치에 대하여 고찰한다. 논의를 간단히 하기 위하여 Misra *et al.*<sup>(6)</sup>에 의하여 제시된 비선형 지배방정식을 이용하여 양단이 고정된 인장 가능 곡선관의 면내 진동에 적용하여, 비선형 방정식으로부터 구해진 평형해와 선형화된 방정식의 평형해를 비교/분석할 것이다. 마지막으로 분석된 결과를 바탕으로 곡선관의 내부에 흐르는 유체 유속에 따른 고유진동수 변화를 제시한다.

### 2. 운동방정식

내부에 유체가 흐르는 양단이 고정된 곡선관에 대한 개략도를 Fig. 1 에 나타내었다. 그림에서

\* 한양대학교 일반대학원 정밀기계공학과

E-mail : dhjung@ihanyang.ac.kr

Tel : (031) 406-6964, Fax : (031) 501-4590

\*\* 한양대학교 공학대학 기계정보경영학부

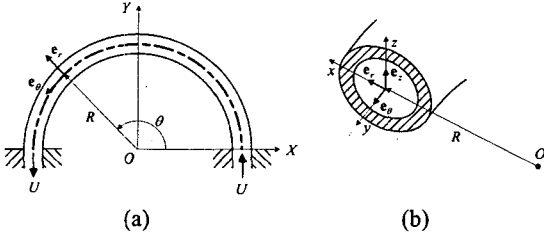


Fig. 1 Schematics of a semi-circular pipe conveying fluid: (a) the top view; and (b) the cross-section.

$XYZ$  는 공간상에 고정된 관성좌표계를 나타내고  $r\theta z$  는 원통좌표계를 나타낸다. 곡선관의 곡률반경은  $R$  로 일정하고 영률은  $E$ , 파이프의 단면적은  $A$ , 단면의 면적 관성모멘트는  $I$  이다. 파이프와 유체의 단위길이당 질량은 각각  $m_p$  와  $m_f$  이고, 내부에 흐르는 유체의 속력은  $U$  로 일정하다.

곡선관 단면의 치수가 곡률반경 및 길이에 비하여 상당히 작다고 가정하여 Euler-Bernoulli 보로 모델링하고, 내부 유체는 비압축성으로 단면에서 유속이 균일하다고 가정하면 유체가 흐르는 곡선관에 대한 지배방정식은 다음과 같다.<sup>(6)</sup>

$$(m_p + m_f)\ddot{u} + 2m_f(U/R)(\dot{u}' - \dot{v}') + m_f(U/R)^2(u'' - v'') + (EI/R^4)(u_e^{iv} - v_e^{iv}) + (EA/R)\varepsilon - (EA/R^2)[\varepsilon(u' - v)'] = m_f U^2/R \quad (1)$$

$$(m_p + m_f)\ddot{v} + m_f(U/R)(\dot{u} - \dot{v}') + m_f(U/R)^2(u' - v) + (EI/R^4)(u''' - v''') - (EA/R)\varepsilon' - (EA/R^2)\varepsilon(u' - v) = 0 \quad (2)$$

여기서 기호 도트( $\cdot$ )와 프라임( $'$ )은 각각 시간  $t$  와 좌표  $\theta$  에 대한 편미분을 나타내고,  $u$ ,  $v$  는 곡선관 중심선의 반경방향 변위와 원주방향 변위를 나타내며,  $\varepsilon$  은 원주방향 선형 변형율이므로 다음 식으로 정의된다.

$$\varepsilon = (u + v')/R \quad (3)$$

본 연구에서 곡선관의 평형 형상에 대한 논의를 간단히 하기 위하여 곡률이 일정한 양단 고정된 곡선관은 반원형이라 가정한다. 따라서 경계조건은 다음 식으로 주어진다.

$$u = u' = v = 0 \quad \text{at } \theta = 0, \pi \quad (4)$$

유체가 흐르는 곡선관의 고유진동수를 계산하

기 위해서는 식 (1), (2)로 주어진 비선형 방정식으로부터 선형화된 운동방정식을 유도하여야 한다. 평형위치와 평형위치 부근에서 선형화된 운동방정식을 유도하기 위하여 섭동법을 적용한다. 그러면 변위  $u$ ,  $v$  는 다음 식으로 표현 할 수 있다.

$$u = u_e + \Delta u, \quad v = v_e + \Delta v \quad (5)$$

여기서  $u_e$ ,  $v_e$  는 시간 변화 항에 무관한 평형 위치를 나타내고,  $\Delta u$ ,  $\Delta v$  는 평형위치 부근에서 미소변화를 나타내는 섭동해이다. 식 (5)를 식 (1)과 (2)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 반경방향 변위와 원주방향 변위가 연성된 비선형 평형방정식을 구할 수 있다.

$$m_f(U/R)^2(u_e'' - v_e'') + (EI/R^4)(u_e^{iv} - v_e^{iv}) + (EA/R)(u_e + v_e) - (EA/R^2)[(u_e + v_e')(u_e' - v_e')] = m_f U^2/R \quad (6)$$

$$m_f(U/R)^2(u_e' - v_e) + (EI/R^4)(u_e''' - v_e''') - (EA/R)(u_e' + v_e) - (EA/R^2)(u_e + v_e')(u_e' - v_e) = 0 \quad (7)$$

그리고 평형위치 부근에서 선형화된 운동방정식은 다음과 같다.

$$(m_p + m_f)\ddot{u} + 2m_f(U/R)(\dot{u}' - \dot{v}') + m_f(U/R)^2(u'' - v'') + (EI/R^4)(u_e^{iv} - v_e^{iv}) + (EA/R^2)(u + v) - (EA/R^2)\{[\varepsilon_e(u' - v)'] + [(u_e' - v_e)(u + v')/R]\} = 0 \quad (8)$$

$$(m_p + m_f)\ddot{v} + m_f(U/R)(\dot{u} - \dot{v}') + m_f(U/R)^2(u' - v) + (EI/R^4)(u_e''' - v_e''') - (EA/R^2)(u' + v) - (EA/R^2)[\varepsilon_e(u' - v) + (u_e' - v_e)(u + v')/R] = 0 \quad (9)$$

### 3. 평형위치와 고유진동수

식 (6)과 (7)로 표현되는 유체를 이송하는 곡선관의 평형 방정식으로부터 해석적으로 평형해를 구하는 것과, 식 (8)과 (9)의 섭동방정식에서 고유진동수를 직접 계산하는 것은 불가능하므로 본 연구에서는 근사해를 구하기 위하여 Galerkin 방법을 적용한다. 이 방법은 반경방향 및 원주방향의 변위들을 각각 비교함수의 급수해로 가정하여 대입하고, 비교함수와 동일한 가중함수를 곱하여 이산

화된 행렬-벡터 방정식으로부터 수치적으로 근사해를 구하는 것으로 자세한 과정은 생략한다.

먼저 해석 프로그램의 정확성과 수치해의 안정성을 검토하고 해석에 필요한 적절한 기저함수의 수를 결정하기 위하여 유체 유동이 없는 곡선관에 대한 고유진동수의 수렴 특성을 검증한다. 본 연구에서 사용한 물성치는  $m_p = m_f = 1.78 \text{ kg/m}$ ,  $E = 10 \times 10^9 \text{ N/m}^2$ ,  $R = 0.5 \text{ m}$ ,  $A = 2.473 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ ,  $I = 7.491 \times 10^{-8} \text{ m}^4$  이다. 또한 논의를 편리하게 하기 위하여 다음으로 정의되는 무차원 고유진동수  $\bar{\omega}_n$  와 무차원 유속  $\bar{U}$  을 도입한다.

$$\bar{\omega}_n = \omega_n R^2 \sqrt{(m_p + m_f) / EI}, \quad \bar{U} = UR \sqrt{m_f / EI} \quad (10)$$

기저함수의 수  $N$  의 증가에 따른 곡선관의 고유진동수에 대한 수렴성은 Table 1 과 같다. 기저함수가 증가함에 따라 Blevins<sup>(7)</sup>에 제시된 해석해에 잘 수렴하고 있음을 알 수 있다. 본 연구에서는 해의 정확성과 동등한 비교를 위하여 모든 해석에 10 개의 기저함수를 사용한다.

다음으로 유체를 이송하는 반원관의 정적 평형형상을 검토한다. 참고문헌 [6]에서 유체 유동에 의한 변형은 미소하다고 가정하여 식 (6)과 (7)로 표현된 평형방정식의 비선형 항을 무시하여 다음 식으로부터 평형위치를 결정하였다.

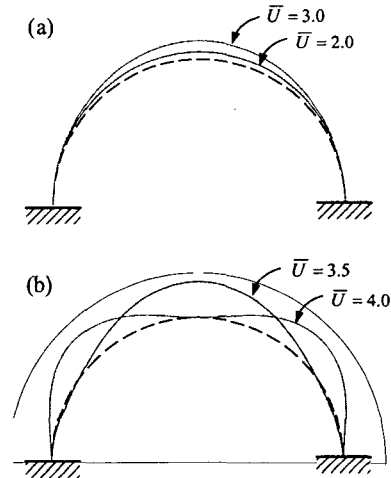
$$m_f (U/R)^2 (u_e'' - v_e'') + (EI/R^4)(u_e^{iv} - v_e^{iv}) + (EA/R)(u_e + v_e') = m_f U^2 / R \quad (11)$$

$$m_f (U/R)^2 (u_e' - v_e) + (EI/R^4)(u_e''' - v_e''') - (EA/R)(u_e' + v_e'') = 0 \quad (12)$$

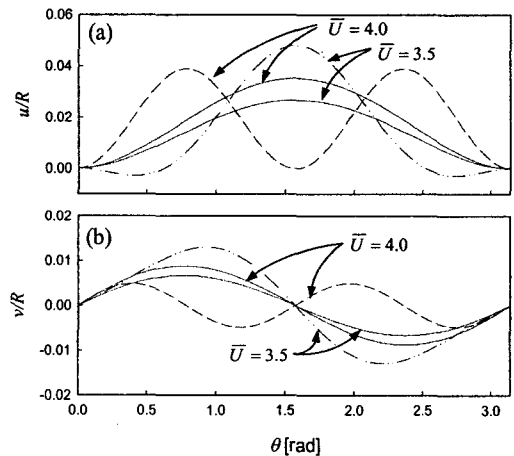
**Table 1** Convergence characteristics of the dimensionless natural frequencies of the curved pipe when  $\bar{U} = 0$

$N$	$\bar{\omega}_1$	$\bar{\omega}_2$	$\bar{\omega}_3$
3	4.514	17.564	30.125
4	4.436	9.582	25.941
5	4.374	9.559	17.753
6	4.371	9.442	17.741
7	4.364	9.442	17.610
8	4.364	9.426	17.610
9	4.363	9.426	17.592
10	4.363	9.423	17.592
Reference <sup>(7)</sup>	4.385	9.633	17.620

평형방정식 (11)과 (12)로부터 유체 유속에 따른 평형위치를 구하고 평형형상을 도시하면 Fig. 2 와 같다. Fig. 2 를 살펴보면, 무차원 유속  $\bar{U}$  가 3 이상에서 평형형상이 급변함을 알 수 있으며, 이는 참고문헌 [6]에 나타난 평형형상과 동일하다. 그러나 본 연구에 의하면 무차원 유속  $\bar{U} = 3.7787$  에서 반경방향과 원주방향 변위  $u \rightarrow \infty, v \rightarrow \infty$  로 발산하게 된다. 따라서 무차원 유속  $\bar{U}$  가 3.7787 에 근접하게 되면 미소 변형을 가정한 선형 방정식에서



**Fig. 2** Equilibrium configurations of a semi-circular pipe conveying fluid when (a)  $\bar{U} = 2.0, 3.0$ ; and (b)  $\bar{U} = 3.5, 4.0$ . The deformation is exaggerated by a factor of 5.



**Fig. 3** Comparison of the equilibrium positions when  $\bar{U} = 3.5, 4.0$ : (a) the radial displacement; and (b) the circumferential displacement. —, Case I; ---- Case II.

구해진 평형위치는 타당성이 없으므로 반드시 대 변형을 포함하는 비선형 방정식으로부터 평형위치를 구해야 한다.

Fig. 3 은 평형위치를 도시한 그림이다. 편의상 비선형 평형방정식 (6)과 (7)식으로부터 계산된 평형위치를 Case I 이라 하고 실선으로 도시하고, 식 (11)과 (12)에서 구한 평형위치를 Case II 라 하여 점선으로 나타내었다. 비선형 식에서 구한 평형위치를 살펴보면 무차원 유속  $\bar{U}$  가 3 이상이라도 평형형상의 급변은 나타나지 않음을 알 수 있다. 다만 유동 속도의 증가로 인한 원심력의 증가로 더 큰 변형이 발생하고 있다.

마지막으로 유체가 흐르는 곡선관의 고유진동수 변화를 고찰한다. Case I 과 Case II 에서 구한 평형위치를 각각 대입하여 유체의 유동속도에 따른 파이프의 고유진동수 변화를 Fig. 3 에 도시하였다. 낮은 유속에서는 고유진동수가 비슷하지만 유속이 증가할수록 고유진동수의 값은 상당한 차이를 보이고 있다. 특히, Case II 의 경우 선형 평형방정식에서 발산형을 나타내는 무차원 유속  $\bar{U} = 3.7787$  부근의 고유진동수는 수치적으로 불안한 양상을 보이고 있다. 그러나 Case I 의 경우 고유진동수는 유속이 증가하여도 약간 감소하는 경향을 보이며 안정적이다. 위 결과로부터 고속으로 유체를 이송

하는 곡선관의 고유진동수 변화를 엄밀하게 예측하기 위해서는 비선형 평형방정식으로부터 평형위치를 결정해야 함을 알 수 있다.

#### 4. 결 론

본 연구에서 유체를 이송하는 곡선관의 비선형 지배방정식에 섭동법을 적용하여 평형방정식과 섭동방정식을 유도하고 평형위치와 고유진동수의 변화를 계산하였다. 본 연구의 결과를 요약하면 (1) 유체를 이송하는 양단이 고정된 곡선관의 경우 기존의 선형방정식은 유체 유속이 증가하면 평형위치를 적절하게 표현할 수 없다. (2) 유체의 유동속도가 증가하면 곡선관의 고유진동수를 계산하기 위한 평형위치는 반드시 비선형 방정식으로부터 결정하여야 한다.

#### 후기

본 연구는 한국과학재단 지역대학우수과학자 지원연구(R05-2003-000-10305-0)로 수행 되었으며, 이에 감사 드립니다.

#### 참고문헌

- (1) V.A. Svetlisky, 1977, "Vibration of tubes conveying fluid", *Journal of Acoustical Society of America*, **62**, 595-600
- (2) S.S. Chen, 1972, "Vibration and stability of a uniformly curved tube conveying fluid", *Journal of Acoustical Society of America*, **51**, 223-232
- (3) S.S. Chen, 1973, "Out-of-plane vibration and stability of curved tubes conveying fluid", *Journal of Applied Mechanics*, **40**, 362-368
- (4) J.L. Hill and C.G. Davis, 1974, "The effect of initial forces on the hydrostatic vibration and stability of planar curved tubes", *Journal of Applied Mechanics*, **41**, 355-359
- (5) A.K. Misra, M.P. Païdoussis and K.S. Van, 1988, "On the dynamics of curved pipes transporting fluid. Part I: inextensible theory", *Journal of Fluid and Structures*, **2**, 211-244
- (6) A.K. Misra, M.P. Païdoussis and K.S. Van, 1988, "On the dynamics of curved pipes transporting fluid. Part II: extensible theory", *Journal of Fluid and Structures*, **2**, 211-244
- (7) R.D. Blevins, 1979, "Formulas for natural frequency and mode shape", Van Nostrand Reinhold

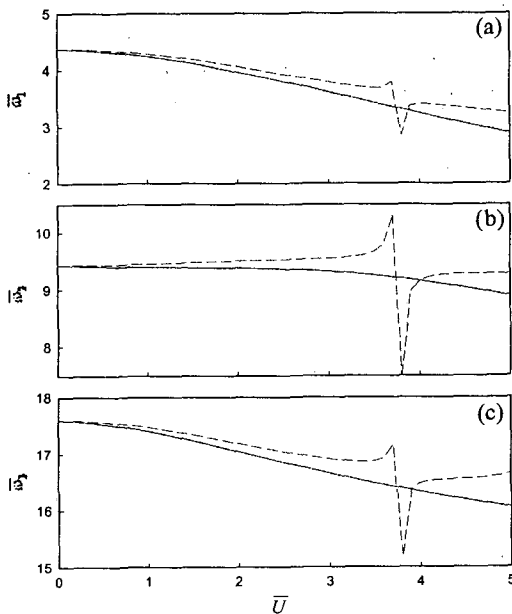


Fig. 4 Dimensionless natural frequencies for the variation of the dimensionless fluid velocity: (a) the first mode; (b) the second mode; and (c) the third mode. —, Case I; ---- Case II.