한국소음진동공학회 2005년도 춘계학술대회논문집, pp.890~895.

강체 운동을 고려한 충격을 받는 외팔 보의 동적 해석

Dynamic Analysis of a Cantilever Beam Undertaking Impulsive Force That Undergoes Rigid Body Motion

임홍석* · 유홍희**
Hong Seok Lim and Hong Hee Yoo

Key Words : cantilever beam(외팔보), rigid body motion(강체 운동), impulsive force(충격), dynamic analysis(동적 해석), transient response(과도 응답)

ABSTRACT

This paper presents the dynamic analysis of a cantilever beam undertaking impulsive force that undergoes rigid body motion. The transient response of the beam induced by the impulsive force and the rigid body motion is calculated based on hybrid deformation variable modeling method by applying the Rayleigh-Ritz assumed mode method. The stiffness variation effect caused by the rigid body motion is considered in this modeling. The effects of the impulsive force position and the angular velocity on the transient responses of the beam are investigated through numerical studies.

1. 서 론

작동 시 강체 운동을 하는 구조물들로는 주로 회전 운동을 하는 외팔 보 형태로 터빈 블레이드, 헬리콥터의 회전익, 인공위성 안테나 그리고 골프 클럽 등에서 발견할 수 있다. 보의 회전 운동은 시스템 강성 변화를 가져오게 되어 그 동적 특성들을 변화시키게 된다. 그런데 이러한 구조물들은 때때로 작동 시 충격을 받게 되며 (회전익에 충돌하는 조류충돌 효과나 골프채와 공의 충돌 효과) 이러한 충격은 과도한 변위나 응력을 구조물에 발생시킬 수 있으므로 결과적으로 구조물의 수명에 큰 영향을 미칠 수 있다. 따라서 이러한 강체 운동을 하는 구조물의 충격에 의한 동적 특성의 정확한 규명은 이들의 설계를 위해 필수적이므로 이의 모델링과 해석을 위한 연구가 필요하다.

강체 운동을 하는 구조물의 동적 특성에 대한 연구는 참고문헌[1-7]에서 볼 수 있듯이 블레이드형 구조물에 대해 이루어지고 있고 충격이 가해지는 경우는 다루어지지 않고 있으며, 반면에 충격 해석에 관한 연구는 참고문헌[8-10]에서 알 수 있듯이 고정된 구조물에 대한 해석이 주류를 이루고 있다. 그런데 터빈 블레이드나 헬리콥터의 회전익 등은 작동 중에 (강체 운동을 하며) 충격을 받을 수 있으며, 이 경우 발생하는 변위나 응력이 어느 한도를 넘지 않도록 설계되어야 한다. 그러므로 강체 운동에 의한 강성변화 효과와 충격을 동시에 고려하여 충격 위치와 회전 각속도 변화에 따른 과도 응답 변화를 예측하기 위한 연구가 필요하다 본 연구의 목적은 강체운동을 하는 외팔 보의 충격 해석을 통해 이에 따른 과도 상태 응답을 파악하기 위한 모델링 방법을 제시하고, 그 모델링에 근거하여 충격 위치와 회전 각속도에 따른 해석 결과를 도출하여 그 주요 특성들을 분석하고 규명하는데 두고 있다.

본 논문의 구성은 다음과 같다. 서론에 이어 다음 절에서는 복합변형변수를 이용하여, 충격을 받는 강체 운동을 하는 외팔 보의 굽힘방향 운동방정식을 케인의 방법을 적용하여 유도하였으며 3절에서는 가상 모드법을 적용하고 수치해석을 통해서 해석 결과를 도출하고 강체 운동의 크기 및 방향과 충격의 위치 변화에 따른 외팔 보의 동적 특성 변화에 관해 논의하였다. 마지막 절에서는 본 논문의 결론을 수록하였다.

* 한양대학교 기계설계학과 대학원
E-mail : limit75@dreamwiz.com
Tel : (02) 2299-8169, Fax : (02) 2298-4634
** 한양대학교 기계공학부

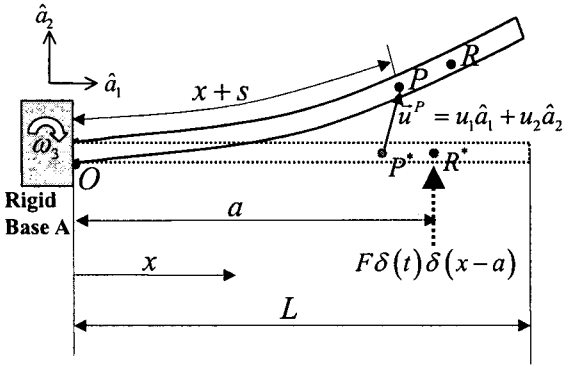


Fig. 1 Configuration of a cantilever beams

2. 운동 방정식 유도

Fig. 1 은 길이 L 인 임의의 충격을 받는 외팔보를 보여준다. 이 보는 O 점을 중심으로 $\hat{a}_3$ 방향으로 ω_3 만큼 회전 강체 운동을 받는 고정단에 부착되어 있으며, 충격은 R 점에서 굽힘 방향으로 $F\delta(t)\delta(x-a)$ 과 같은 형태로 dirac delta function 사용하여 시간과 공간에 대하여 지정된 순간에만 작용하도록 정의하였다. 보 위의 임의의 한 점인 P 점의 탄성변형 변위는 직교방향 변수인 u_1, u_2 로 나타내어 진다. 여기서 ρ_L 는 보의 단위 길이당 질량이고, E 는 강성 계수 그리고 I 는 관성 모멘트이다.

본 논문에서는 참고문헌[7]에서와 같이 직교방향변수인 u_1 대신에 복합변형변수 s 를 사용하여 운동 방정식을 유도한다. Rayleigh-Ritz assumed mode method 를 사용하기 위해 변수 s, u_2 를 다음과 같이 근사화 시킨다.

$$s = \sum_{i=1}^{\mu_1} \phi_{1i}(x) q_{1i}(t) \tag{1}$$

$$u_2 = \sum_{i=1}^{\mu_2} \phi_{2i}(x) q_{2i}(t) \tag{2}$$

여기서 μ_1, μ_2 는 변형 변수 s, u_2 를 위한 일반좌표의 수이다.

충격을 받는 외팔 보의 운동 방정식을 유도하기 위해 위와 같은 회전 강체 운동이 작용할 때 P 점의 속도는 s, u_2 변수들을 사용하여 식(3)과 같이 나타낼 수 있고, P 점의 가속도는 선형화하여 식(4)와 같이 나타낸다.

$$\hat{v}^P = \left[v_1 + \dot{s} - \int_0^x \left(\frac{\partial u_2}{\partial \sigma}\right)\left(\frac{\partial \dot{u}_2}{\partial \sigma}\right) d\sigma - \omega_3 u_2 \right] \hat{a}_1 + \left[v_2 + \dot{u}_2 + \omega_3 \left(x + s - \frac{1}{2}\int_0^x \left(\frac{\partial u_2}{\partial \sigma}\right)^2 d\sigma \right) \right] \hat{a}_2 \tag{3}$$

$$\hat{a}^P = \left[\dot{v}_1 + \ddot{s} - \dot{\omega}_3 u_2 - \omega_3 (2\dot{u}_2 + v_2) - \omega_3^2 (x+s) \right] \hat{a}_1 + \left[\dot{v}_2 + \ddot{u}_2 - \dot{\omega}_3 (x+s) + \omega_3 (2\dot{s} + v_1) - \omega_3^2 u_2 \right] \hat{a}_2 \tag{4}$$

여기서 v_1, v_2 는 각각 $\hat{a}_1, \hat{a}_2$ 방향으로 고정단에 작용하는 병진 속도를 나타낸다.

운동 방정식을 Kane's method 를 이용해서 유도하기 위해 일반 관성력 F^* 는 P 점의 속도와 가속도를 이용하여 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$F_{ki}^* = -\int_0^L \rho_L \left(\frac{\partial \hat{v}^P}{\partial \dot{q}_{ki}} \right) \cdot \hat{a}^P dx \quad (k = 1,2) \tag{5}$$

다음으로 일반작용력 F 는 Von Karman Strain 으로부터 유도된 보의 탄성에너지 U 에 의한 일반작용력 F^U 와 충격력에 의한 일반작용력 F^I 로 이루어지며, 다음과 같이 유도된다.

$$\begin{aligned} F_{ki}^U &= -\frac{\partial U}{\partial q_{ki}} \\ &= -\left(\int_0^L EA \phi_{1i,x} \phi_{1j,x} dx \right) q_{1j} \\ &\quad -\left(\int_0^L EI \phi_{2i,xx} \phi_{2j,xx} dx \right) q_{2j} \quad (k = 1,2) \end{aligned} \tag{6}$$

$$\begin{aligned} F_{ki}^I &= \int_0^L \left(\frac{\partial \hat{v}^P}{\partial \dot{q}_{ki}} \right) \cdot \left(F\delta(t)\delta(x-a) \right) \hat{a}_2 dx \\ &= \int_0^L \phi_{2i} \hat{a}_2 \cdot \left(F\delta(t)\delta(x-a) \right) \hat{a}_2 dx \\ &= F\delta(t) \phi_{2i}(a) \qquad (k = 1,2) \end{aligned} \tag{7}$$

$$F_{ki} = F_{ki}^U + F_{ki}^I \quad (k = 1,2) \tag{8}$$

여기서 충격력에 의한 일반작용력은 dirac delta function $\delta(x-a)$ 를 사용하여 x 에 대한 함수이므로 P 점의 편속도를 내적하고 보 전체에 대해 적분을 하여 식(7)과 같이 유도할 수 있다.

따라서 최종적으로 운동방정식은 일반 작용력과 일반 관성력의 합으로 다음 식(9)와 같이 나타낼 수 있다.

$$F_{ki} + F_{ki}^{*} = 0 \quad (k = 1,2) \tag{9}$$

이렇게 유도된 운동방정식 중 굽힘 방향의 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\mu_2}\Bigg[\left(\int_0^L \rho_L \phi_{2i}\phi_{2j}dx\right)\ddot{q}_{2j} \\
&+\Bigg\{\left(\int_0^L EI\phi_{2i,xx}\phi_{2j,xx}dx\right)-\omega_3^2\left(\int_0^L \rho_L\phi_{2i}\phi_{2j}dx\right) \\
&-\left(\dot{v}_1-\omega_3 v_2\right)\left(\int_0^L \rho_L(L-x)\phi_{2i,x}\phi_{2j,x}dx\right) \\
&+\omega_3^2\left(\frac{1}{2}\int_0^L \rho_L\left(L^2-x^2\right)\phi_{2i,x}\phi_{2j,x}dx\right)\Bigg\}q_{2j}\Bigg] \\
&= F\delta(t)\phi_{2i}(a)-\left(\dot{v}_2+\omega_3^2 v_1\right)\left(\int_0^L \rho_L\phi_{2i}dx\right) \\
&\quad -\dot{\omega}_3\left(\int_0^L \rho_L x\phi_{2i}dx\right) \qquad (i=1,2,\cdots,\mu_2)
\end{aligned} \tag{10}$$

충격 하중과 동일한 결과를 주는 초기조건을 구하기 위해 식(10)의 경우에서는 시간 $t=0$ 에서 무한대의 충격력이 발생하므로 정확하게 $t=-0$ 에서는 충격력이 존재하고 $t=+0$ 에서는 충격력이 존재하지 않는다. 따라서 $t=+0$ 이후의 응답은 충격 하중이 존재하지 않고 초기조건에 의해서만 응답이 발생하므로 충격 하중과 동일한 결과를 얻을 수 있다. 충격 하중이 작용하기 전 보가 정지 상태에 있었다고 하면 초기조건은 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
&q_{2i}(-0)=0 \\
&\dot{q}_{2i}(-0)=0, \\
&q_{2i}(+0)=0
\end{aligned} \tag{11}$$

$t=+0$ 에서의 일반 좌표의 속도를 구하기 위해 운동 방정식의 양변을 시간에 대해 $t=-0$ 부터 $t=+0$ 까지 적분한다.

$$\begin{aligned}
&\int_{-0}^{+0}\sum_{j=1}^{\mu_2}\Bigg[\left(\int_0^L \rho_L\phi_{2i}\phi_{2j}dx\right)\ddot{q}_{2j} \\
&+\Bigg\{\left(\int_0^L EI\phi_{2i,xx}\phi_{2j,xx}dx\right)-\omega_3^2\left(\int_0^L \rho_L\phi_{2i}\phi_{2j}dx\right) \\
&-\left(\dot{v}_1-\omega_3 v_2\right)\left(\int_0^L \rho_L(L-x)\phi_{2i,x}\phi_{2j,x}dx\right) \\
&+\omega_3^2\left(\frac{1}{2}\int_0^L \rho_L\left(L^2-x^2\right)\phi_{2i,x}\phi_{2j,x}dx\right)\Bigg\}q_{2j}\Bigg]dt \\
&= \int_{-0}^{+0}\Bigg[F\delta(t)\phi_{2i}(a)-\left(\dot{v}_2+\omega_3^2 v_1\right)\left(\int_0^L \rho_L\phi_{2i}dx\right) \\
&\quad -\dot{\omega}_3\left(\int_0^L \rho_L x\phi_{2i}dx\right)\Bigg]dt \qquad (i=1,2,\cdots,\mu_2)
\end{aligned} \tag{12}$$

여기서 아래 첨자의 표시 중 콤마 뒤에 나타나는 것은 이들에 대한 편미분으로 예를 들어 $\phi_{,xx}$ 는 ϕ 를 x 로 두 번 편미분한 것을 의미한다. 그리고 $\int_{-0}^{+0}\delta(t)dt=1$ 이므로 $t=+0$ 에서의 일반 좌표의 속도는 다음의 식을 풀어 구할 수 있다.

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{\mu_2}\left(\int_0^L \rho_L\phi_{2i}\phi_{2j}dx\right)\dot{q}_{2j}(+0)=F\phi_{2i}(a) \\
&\qquad (i=1,2,\cdots,\mu_2)
\end{aligned} \tag{13}$$

식(13)를 풀어 일반 좌표들의 초기 속도를 구해 이를 초기 조건으로 하여 충격이 작용하는 것과 동일한 결과가 나타나는 해석을 수행할 수 있다.

3. 수치 해석 결과

3.1 해석 결과 비교를 통한 신뢰성 검증

이 장에는 앞서 유도된 운동 방정식을 사용하여 수치 해석을 수행하였다. 사용된 보의 근사화 함수들은 강체 운동이 없는 외팔 보의 굽힘 진동 특성 함수를 사용하였다. Table 1 은 해석에 사용된 보의 제원을 나타내고 있다.

Table 1 Properties of the beam

L $[m]$	A $[m^2]$	E $[N/m^2]$	I $[m^4]$	ρ_L $[kg/m]$
10	4×10^{-4}	7×10^{10}	2×10^{-7}	1.2

강체 운동을 고려한 충격의 받는 보의 동적 해석에 대해 제안된 방법의 신뢰성은 제안된 방법에 의한 해석 결과와 상용 구조해석 프로그램인 LS-DYNA 의 해석 결과를 비교함으로 검증할 수 있

다. 제안된 방법은 굽힘 방향에 대해 7 개의 모드 수를 가지므로 총 7 개의 자유도를 가진다. 이에 비해 LS-DYNA 의 경우는 해석 시 10 개의 Element 와 11 개의 Node 를 사용하고 Node 한 개 당 3 개의 자유도를 가지므로 총 33 개의 자유도를 가진다. Fig.2 는 각 방법에 의한 강체 운동이 없는 경우에 충격에 의한 보의 끝점에서의 굽힘 방향 변위를 비교하고 있다. 약 5 배의 자유도 차이에도 Fig.2 에서 나타내는 결과는 두 가지 방법이 거의 일치하고 있음을 보여준다.

3.2 강체 운동 고려한 충격 해석 결과

Fig. 3 은 강체 운동이 spin-up motion 의 형태로 주어졌을 때의 충격에 의한 보의 끝점에서의 굽힘 방향 변위의 과도 응답 결과를 나타내고 있다.

spin-up motion 은 보에 다음과 같이 주어졌다.

$$\omega_3 = \frac{\Omega_S}{T_S}\left[t - \frac{T_S}{2\pi}\sin\left(\frac{2\pi t}{T_S}\right)\right] \quad \text{if } 0 \le t \le T_S \qquad (14)$$

$$\omega_3 = \Omega_S \quad \text{if } T_S \le t$$

Fig. 3 (a),(b)는 각각 반대 방향으로 작용하는 각속도가 보에 작용했을 때의 변위를 보여주고 있다. Fig. 3 (a)는 충격의 방향과 반대 방향의 회전이 주어지는 경우인데 처음에는 충격에 의한 효과가 크게 나타나고 그 후로는 회전이 빨라지면서 강체 운동에 의한 변위가 나타나게 된다. 여기서 한 가지 특이한 점은 3 초 이후에 동일한 각속도로 회전하는 보에서 그래프의 형태가 충격이 존재하지 않은 경우와는 큰 차이를 보이는데 반해 주어진 각속도의 크기에 대해서는 큰 차이를 보이지 않는 현상을 그래프를 통해 관찰할 수 있다.

Fig. 3 (b)는 충격의 방향과 같은 방향의 회전이 주어지는 경우이며 (a)의 경우와 동일하게 처음에는 충격에 의한 효과가 크게 나타나고, 3 초 이후의 정상 상태에서도 충격이 존재하지 않은 경우와는 큰 차이를 보이는데 반해 주어진 각속도의 크기와는 거의 차이를 보이지 않는 현상이 나타난다 앞의 경우에 비하여 같은 방향으로 충격과 강체 운동이 작용하므로 발생하는 최대 변위는 작아지나 반면에 overshoot 의 크기는 (a)의 경우보다는 (b)의 경우에서 더 크게 나타나며, 또한 최대 변위

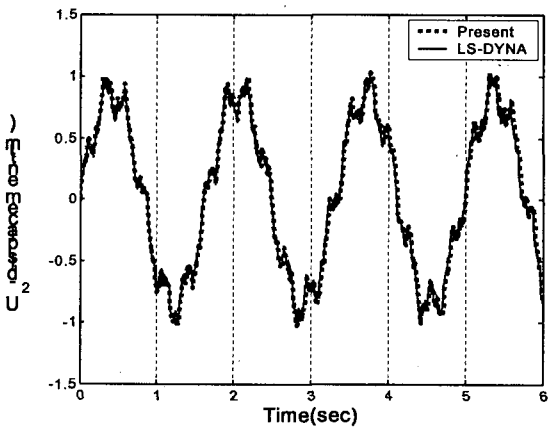
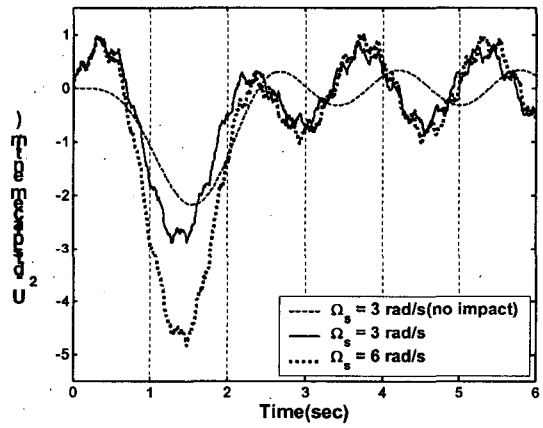
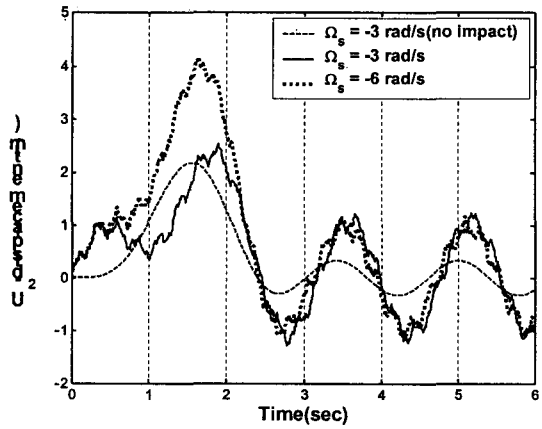


Fig. 2 Comparison of the U_2-displacement in tip obtained by the present modeling and LS-DYNA without rigid body motion ($F = 10,\ a = 10m$)



(a) Counter clockwise direction of angular velocities



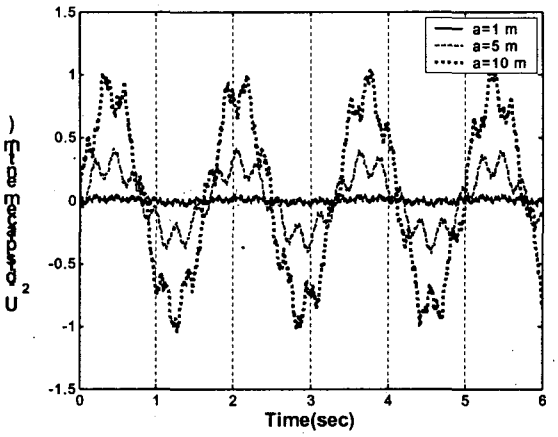
(b) Clockwise direction of angular velocities

Fig. 3 Variation of U_2-displacement in tip versus time with impulsive force and different angular velocities ($F = 10,\ a = 10m,\ T_S = 3\sec$)

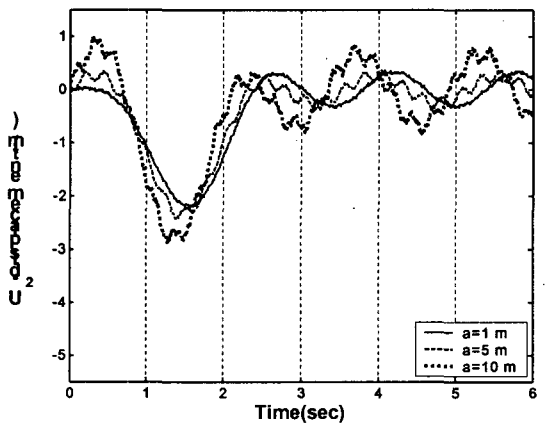
가 발생하는 시간은 (a)의 경우는 충격이 없는 경우보다 빠르게 나타나는데 비해 (b)의 경우에서는 더 느리게 나타나고 있다.

3.3 충격 위치에 따른 동적 응답 결과

Fig. 4 는 충격이 작용하는 위치에 따른 보의 끝점에서의 굽힘 방향 변위의 과도 응답 결과를 나타내고 있다. Fig. 4 (a)는 강체 운동이 없는 상태에서 충격 위치에 따른 변위를 나타내고 있는데 일반적으로 예상되는 바와 같이 끝점에 충격이 주어



(a) The case of without rigid body motion
$(\Omega_S = 0\, rad/s)$



(b) The case of with angular velocities
$(\Omega_S = 3\, rad/s,\ T_S = 3\sec)$

Fig. 4 Variation of U_2-displacement in tip versus time with different impulsive force position ($F = 10$)

졌을 경우는 발생하는 변위가 크게 나타나며 고정점 근처로 이동해 갈수록 변위는 점점 작아지게 된다. 또한 충격 위치가 고정점 근처로 갈수록 충격에 의한 떨림의 형태가 작고 빠르게 변해가는 것을 확인할 수 있다. Fig. 4 (b)는 보에 spin-up motion 의 형태로 강체 운동을 준 상태에서 충격 위치에 따른 변위를 나타내고 있다. 이 경우도 앞의 경우와 동일하게 충격에 의해 발생하는 변위의 크기는 고정점 근처로 이동해 갈수록 작아지는 것을 확인할 수 있으며 점점 작고 빠른 떨림을 가지며 충격이 가해지지 않은 경우와 유사한 형태로 변해가는 것을 확인할 수 있었다

4. 결 론

본 논문에서는 강체 운동으로 인한 강성 변화를 고려하는 충격을 받는 외팔 보의 운동 방정식과 이에 근거한 해석 결과를 제시하고 강체 운동의 크기 및 방향과 충격 위치가 과도 상태의 굽힘 방향 변위에 미치는 영향을 분석하였다. 충격이 작용하였을 때 변위의 형태는 강체 운동만 존재하였을 경우와는 현저한 차이를 보이나 강체 운동의 크기의 영향은 정상 상태에서 크지 않다는 것을 관찰할 수 있었으며 주어지는 강체 운동과 충격과의 방향 차이에 따라 최대 변위 및 overshoot 의 크기가 다르게 나타나는 것을 확인할 수 있었다. 또한 충격 위치에 따라서 굽힘 방향의 변위는 고정점 근처로 갈수록 작아지며, 나타나는 떨림의 형태가 작고 빠르게 변해가는 것을 관찰할 수 있었다.

후 기

이 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적설계신기술연구센터의 연구비 지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

(1) Southwell, R. and Gough, F., 1921, "The Free Transverse Vibration of Airscrew Blades", *British A.R.C. Reports and Memoranda*, No. 766

(2) Theodorsen, T., 1935, "Propeller Vibrations and the Effect of Centrifugal Force", *NASA TN*, No. 516.

(3) Schilhansl, M., 1958, "Bending Frequency of a Rotating Cantilever Beam", Transaction of ASME, *Journal of Applied*

Mechanics, Vol. 25, pp. 28-30.
(4) Putter, S. and Manor, H., 1978, "Natural Frequencies of Radial Rotating Beams", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 56. pp. 175-185.
(5) Bhat, R., 1986, "Transverse Vibration of a Rotating Uniform Cantilever Beam with Tip Mass as Predicted by Using Beam Characteristic Orthogonal Polynomials in the Rayleigh-Ritz Method", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 105, No. 2, pp. 199-210.
(6) Kane, T., Ryan, R. and Banerjee, A., 1987, "Dynamics of Cantilever Beam Attached to a Moving Base", *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, Vol.10, pp. 139-151.
(7) Yoo, .H.H., Ryan, R.R. and Scott, R.A., 1995, "Dynamics of Flexible Beams Undergoing Overall Motions", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 181, No. 2, pp. 261-278.
(8) Solberg, J.M. and Papadopoulos, P., 1998, "A finite Element Method for Contact/Impact", *Finite Elements in Analysis and Design*, Vol.30, pp. 297-311.
(9) Bittencourt, E. and Creus, G.J., 1998, "Finite Element Analysis of Three-Dimensional Contact and Impact in Large Deformation Problems", *Computers and Structures*, Vol.69, pp. 219-234.
(10) Demkowicz, L. and Bajer, A., 2001, "Conservative Discretization of contact/impact problems for nearly rigid bodies", *Computer. Methods in Applied. Mechanics and. Engineering* , Vol.190, pp. 1903-1924.