

## 고정된 원형 플레이트의 평면내 자유진동 Free In-plane Vibration of a Clamped Circular Plate

박찬일\*  
Chan IL Park

**Key Words :** Free in-plane Vibration(평면내 자유진동), Circular Plate(원형 플레이트), Helmholtz Decomposition.(Helmholtz 분해)

### ABSTRACT

The in-plane vibration response of a clamped circular plate should be predicted in many applications. Up to now, papers on the in-plane vibration of rectangular plate are published. However, analytical derivation on the in-plane vibration of the clamped circular plate is not carried out. Therefore, the in-plane vibration of the clamped circular plate is the concern of this paper. In order to derive the equations of motion for the clamped circular plate in the cylindrical coordinate, the kinetic energy and potential energy for the in-plane behavior are obtained by using the stress-strain-displacement expressions. Application of Hamilton's principle leads to two sets of differential equations. These displacement equations were highly coupled. It is possible to obtain a simpler set of equations by introducing Helmholtz decomposition. Substituting them into the coupled differential equations, we obtain the uncoupled equations of motion. In order to solve them, we assume that the solutions are harmonic. Then, they lead to the wave equations. Using the separation of variable, we obtain the general solutions for the equations. Based on the solutions, the displacements for r and  $\theta$  direction are assumed. Finally we obtain the frequency equation for the clamped circular plate by the application of boundary conditions. The derived equation is compared with the finite element analysis for validation by using the some numerical examples.

기호설명	
u, v, w	Displacements in the r, $\theta$ , z
$\epsilon$	normal strain
$\gamma$	shear strain
$\sigma$	normal stress
$\tau$	shear stress
$\nu$	Poisson's ratio
E	Young's modulus
G	shear modulus
$\rho$	density
$\Phi, H$	Helmholtz functions
$J_n$	Bessel function of the first kind.
$Y_n$	Bessel function of the second kind.
r, $\theta$ , z	cylindrical coordinate
$\omega$	circular frequency
t	time

$\hat{e}$  unit vector

### 1. 서론

플레이트 구조물에서 가로 진동이 외력에 의해 쉽게 가진되기 때문에 중요하다. 그러나 대부분의 적용에서 판구조물에 전달된 힘은 제조 조립상의 불완전이나 지지하는 마운트의 어긋남 때문에 평면내 진동을 가진다. 플레이트의 평면 모드는 비교적 고주파수에서 일어나고 설계 관점으로부터 중요하다. 평면내 진동은 구조물을 통하여 고주파수 진동 전달에 중요한 역할을 한다. 그러므로 정확한 해석은 이 진동의 존재를 고려해야 한다. 지금까지 연구는 가로진동의 연구[1-3]와 직사각형 평면내 진동[4-5]에 국한되어 왔다. 그러므로 이 연구의 목적은 고정된 원형 플레이트의 평면내 진동을 위한 운동 방정식을 유도하고 이 식으로 평면내 자유 진동의 주파수 식을 유도한다. 이 유도된 식을 검증하기 위해 유한요소해석을 수행한다.

\* 강릉대학교 정밀기계공학과  
E-mail : pci@kangnung.ac.kr  
Tel : (033) 640-2392, Fax : (033) 640-2244

## 2. 평면내 원형 플레이트의 방정식 유도

이 연구에서는 구속된 원형 플레이트가 고려된다. 플레이트는  $r$ -평면에 있고 플레이트의 중심 평면은  $z=0$  에 있다. 평면내 진동을 위한 운동 방정식이 Hamilton's principle 을 이용하여 유도된다. 이러한 변위는 연성 되어 있으므로 Helmholtz 분해로 비연성화 시키고, 이 식을 이용하여 구속된 원형 플레이트의 주파수 식을 유도한다.

### 2.1 평면내 진동을 위한 운동 방정식

원통 좌표계에서 변형을 변위 관계식은 다음으로 주어진다.

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad (1)$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \quad (2)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \quad (3)$$

Hooke's law 를 적용하면 다음과 같이 된다.

$$\sigma_r = (\varepsilon_r + \nu \varepsilon_\theta) \frac{E}{1-\nu^2} = \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \nu \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r} \right) \frac{E}{1-\nu^2} \quad (4)$$

$$\sigma_\theta = (\varepsilon_\theta + \nu \varepsilon_r) \frac{E}{1-\nu^2} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} + \nu \frac{\partial u}{\partial r} \right) \frac{E}{1-\nu^2} \quad (5)$$

$$\tau_{r\theta} = G \gamma_{r\theta} = G \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \right) \quad (6)$$

평면내 거동을 위한 운동에너지는 다음과 같다.

$$T = \frac{1}{2} \iint \rho (\dot{u}^2 + \dot{v}^2) r dr d\theta \quad (7)$$

또한 위치에너지는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \iint (\sigma_r \varepsilon_r + \sigma_\theta \varepsilon_\theta + \tau_{r\theta} \gamma_{r\theta}) r dr d\theta \\ &= \frac{1}{2} \iint \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial r} + \nu \frac{\partial v}{r \partial \theta} + \frac{u}{r} \right) \frac{E}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial r} \right. \\ &\quad \left. + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} + \nu \frac{\partial u}{\partial r} \right) \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r} \right) \right. \\ &\quad \left. + G \left( \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r} \right)^2 \right\} r dr d\theta \quad (8) \end{aligned}$$

이 에너지식으로 Hamilton's Principle 을 적용

하면 두개의 운동방정식으로 된다.

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{r \partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{u}{r^2} \right) \\ &\quad + G \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial v}{\partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \frac{E}{1-\nu^2} \left( \nu \frac{\partial^2 u}{r \partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + G \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2} \right) \quad (10) \end{aligned}$$

### 2.2 평면내 진동을 위한 주파수 방정식

운동의 변위식은 매우 복잡하다. 그러므로 Helmholtz 분해로 알려진 스칼라와 벡터 포텐셜 (scalar and vector potential)을 도입함으로써 운동방정식을 유도하는 것이 가능하다.

$$\bar{u} = \nabla \Phi + \nabla \times \bar{H}, \quad \nabla \cdot \bar{H} = 0 \quad (11)$$

$$\text{여기서 } \bar{u} = u \hat{e}_r + v \hat{e}_\theta + w \hat{e}_z$$

그러므로 변위는 다음으로 주어진다.

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} - \frac{\partial H_\theta}{\partial z} \quad (12)$$

$$v = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \frac{\partial H_r}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \quad (13)$$

$$w = \frac{\partial \Phi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial H_r}{\partial \theta} \quad (14)$$

$r$  과  $\theta$  방향에서 평면내 운동이 고려되기 때문에  $\frac{\partial}{\partial z} = 0$  이 되고, 평면내 변위만 고려하면, 다음과 같이 주어진다.

$$u = \frac{\partial \Phi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial H_z}{\partial \theta} \quad (15)$$

$$v = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} - \frac{\partial H_z}{\partial r} \quad (16)$$

식(15), (16)을 식(9)로 대입하면 두 개의 미분 방정식이 얻어진다.

$$\rho \frac{\partial \ddot{\Phi}}{\partial r} \hat{e}_r = E^* \left( \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^3} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \theta^2} + \right.$$

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r \partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \hat{e}_r \quad (17)$$

$$\rho \frac{\partial \ddot{H}_z}{r \partial \theta} \hat{e}_r = G \left( \frac{1}{r} \frac{\partial^3 H_z}{\partial r^2 \partial \theta} + \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 H_z}{\partial \theta^3} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 H_z}{\partial r \partial \theta} \right) \hat{e}_r \quad (18)$$

같은 방법으로 식(15), (16)을 식(10)으로 대입하면 또 다른 두 개의 미분방정식이 얻어진다.

$$\rho \frac{\partial \ddot{\Phi}}{r \partial \theta} \hat{e}_\theta = E^* \left( \frac{1}{r^3} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial \theta^3} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r} \frac{\partial^3 \Phi}{\partial r^2 \partial \theta} \right) \hat{e}_\theta \quad (19)$$

$$\rho \frac{\partial \ddot{H}_z}{\partial r} \hat{e}_\theta = G \left( \frac{\partial^3 H_z}{\partial r^3} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^3 H_z}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 H_z}{\partial r^2} - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 H_z}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial H_z}{\partial r} \right) \hat{e}_\theta \quad (20)$$

여기서

$$E^* = \frac{E}{1-\nu^2}$$

식(17), (19)는 다음 식으로 변형된다.

$$\nabla^2 \Phi = \frac{1}{c_1^2} \ddot{\Phi} \quad (21)$$

또한 식(18), (20)은 다음 식으로 변형된다.

$$\nabla^2 H_z = \frac{1}{c_2^2} \ddot{H}_z \quad (22)$$

여기서

$$c_1^2 = \frac{E^*}{\rho} = \frac{E}{\rho(1-\nu^2)}, \quad c_2^2 = \frac{G}{\rho}$$

식(21)을 풀기 위하여, 식은  $\Phi = \hat{\Phi}(r, \theta)e^{i\omega t}$ 의 조화해로 가정한다. 그러면 식(21)은 다음과 같이 된다.

$$\nabla^2 \hat{\Phi} + k_p^2 \hat{\Phi} = 0 \quad (23)$$

$$\text{여기서 } k_p = \frac{\omega}{c_1}$$

$\hat{\Phi} = X(r)\Theta(\theta)$ 의 변수분리를 사용하면

$$X''\Theta + \frac{1}{r}X'\Theta + \frac{1}{r^2}X\Theta'' + k_p^2 X\Theta = 0 \quad (24)$$

다음 조건이 만족한다면 분리가 일어난다.

$$r^2 \frac{X''}{X} + r \frac{X'}{X} + k_p^2 r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta} = k^2 \quad (25)$$

그러면  $\Theta$ 를 위한 해는 다음으로 주어진다.

$$\Theta = \sin k\theta, \cos k\theta \quad (26)$$

연속조건으로부터,  $\hat{\Phi}(r, \theta) = \hat{\Phi}(r, \theta + 2\pi)$   $k=n$ 이 되고, 여기서  $n$ 은 정수이다.

식(25)로부터 차수  $n$ 의 Bessel's equation 이 분리된다.

$$X'' + \frac{1}{r}X' + (k_p^2 - \frac{n^2}{r^2})X = 0 \quad (27)$$

$X$ 를 위한 해는 다음으로 주어진다.

$$X(r) = CJ_n(k_p r) \quad (28)$$

여기서 두 번째 해  $Y_n(k_p r)$ 는 원점에서 무한대 거동을 하기 때문에 버린다.

$H_z = \hat{H}_z e^{i\omega t}$ 의 조화해로 가정하면, 식(22)는 다음으로 된다.

$$\nabla^2 \hat{H}_z + k_s^2 \hat{H}_z = 0 \quad (29)$$

$$\text{여기서 } k_s = \frac{\omega}{c_2}$$

$\hat{H}_z = Y(r)\Omega(\theta)$ 의 변수분리를 사용하여, 식(26)과 같은  $\Omega(\theta)$  위한 같은 해가 얻어진다.  $Y$ 를 위한 해는 다음으로 주어진다.

$$Y(r) = DJ_n(k_s r) \quad (30)$$

$\Theta(\theta)$ 과  $\Omega(\theta)$ 에서 sine 이나 cosine 항을 버리면, 식(23), (29)을 위한 해가 얻어진다.

$$\hat{\Phi} = AJ_n(k_p r) \cos(n\theta) \quad (31)$$

$$\hat{H}_z = BJ_n(k_s r) \sin(n\theta) \quad (32)$$

그러면  $u = \hat{u}e^{i\omega t}$ 과  $v = \hat{v}e^{i\omega t}$ 를 위한 변위는 다음으로 주어진다.

$$\hat{u} = A \frac{dJ_n(k_p r)}{dr} \cos(n\theta) + \frac{nB}{r} J_n(k_s r) \cos(n\theta) \quad (33)$$

$$\hat{v} = -\frac{nA}{r} J_n(k_p r) \sin(n\theta) - B \frac{dJ_n(k_s r)}{dr} \sin(n\theta) \quad (34)$$

$r=a$ 에서  $u=0$ 과  $v=0$ 의 구속조건을 적용하면 다음 식으로 된다.

$$\begin{bmatrix} \frac{dJ_n(k_p a)}{dr} & \frac{n}{a} J_n(k_s a) \\ -\frac{n}{a} J_n(k_p a) & -\frac{dJ_n(k_s a)}{dr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = 0 \quad (35)$$

이 식이 항상 성립하기 위해서는 행렬의 행렬식이 0 이 되어야 하고, 이 식은 다음과 같이 고정된 원형 플레이트의 주파수 식이 된다.

$$-\frac{dJ_n(k_p a)}{dr} \cdot \frac{dJ_n(k_s a)}{dr} + \frac{n^2}{a^2} J_n(k_p a) J_n(k_s a) = 0 \quad (36)$$

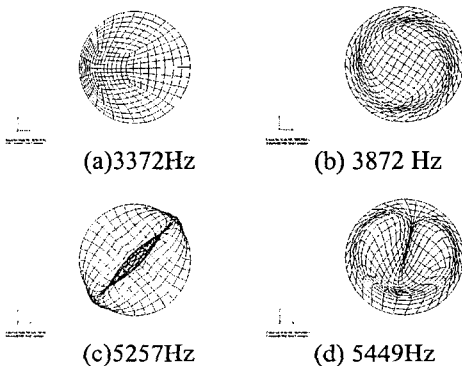
### 3. 해석결과 및 검토

수치예제를 위해 반경 0.5m 두께 5mm 의 구속된 알루미늄 플레이트(탄성계수 71GPa, 밀도 2700kg/m<sup>3</sup>, 푸아송비 0.33, 구조감쇠계수 0.001)를 사용하였다. 유도된 주파수 식을 사용하여 주파수 범위 0-6000Hz 에서 고유진동수를 Matlab 으로 계산한다.

해석 결과를 검증하기 위해 공진주파수와 모드를 상용유한요소해석코드 MSC NASTRAN 으로 계산하였다. 사용된 요소는 4 노드 Q4 타입의 104 개의 플레이트 요소이다. Table 1 은 제안된 방법과 유한요소 해석법의 고유진동수 결과를 비교하였다. Fig.1 은 유한요소법으로 계산된 각 고유진동수에서의 모드 형태이다. 그 결과, 두 방법의 차이는 최소 0.5%에서 최대 1.2%으로 본 유도된 수식들의 타당성을 입증할 수 있다.

**Table 1** Comparison of resonance frequencies between the proposed method and FEM.

Mode number	1	2	3	4
Frequency Hz (proposed method)	3362	3835	5219	5383
Frequency Hz (FEM)	3379	3872	5257	5449
Difference (%)	0.5	1.0	0.7	1.2



**Fig. 1** Mode shapes calculated by FEM.

### 4. 결론 및 요약

이 연구에서는 평면내 고정된 원형 플레이트의 운동방정식이 Hamilton 원리를 이용하여 유도되었다. 이 연성된 식을 Helmholtz 분해에 의해 비연성화 시켜서, 고정된 원형 플레이트를 위한 주파수 방정식을 유도하였다. 이 유도된 식을 이용하여 수치 예제에 적용하여, 고정된 원형 플레이트의 고유진동수를 계산하였다. 그 결과를 검증하기 위해 유한요소해석 결과와 비교하여, 본 유도된 식의 정확성을 입증하였다.

### 후 기

본 연구는 한국학술진흥재단 지역대학 우수과학자 지원연구(과제번호: R05-2004-000-10905-0)지원으로 수행되었으며 관계자에게 감사 드립니다.

### 참 고 문 헌

- (1) A. Leissa, 1993, *Vibration of Plates*, Acoustical Society of America, Woodbury, NY.
- (2) W. Soedel, 1993, *Vibrations of Shells and Plates*, 2nd ed. Marcel Dekker, Inc. USA .
- (3) Karl F. Graff, 1991, *Wave motion in elastic solids*, Dover, New York, USA .
- (4) N.H. Farag and J. Pan, 1998, *Free and forced in-plane vibration of rectangular plates*, J. Acoust. Soc. Am., 103(1), pp.408-413.
- (5) N.S. Bardell et al., 1996, *On the Free In-plane vibration of Isotropic Rectangular Plates*, Journal of Sound and Vibration, 191(3), pp.459-467.
- (6) S.A. Rizzi and J.F. Doyle, 1992, *Spectral Analysis of Wave Motion in Plane Solids With Boundaries*, Transactions of the ASME, Journal of Vibration and Acoustics, Vol.114, pp.133-140.
- (7) J.D. Achenbach, 1973, *Wave Propagation in Elastic Solid*, North-Holland Publishing, Amsterdam.
- (8) J.F. Doyle, 1997, *Wave Propagation in Structures*, 2<sup>nd</sup> ed. Springer-Verlag, New York, USA.