

탄성매체에 근입된 변단면 말뚝의 진동 특성

Vibration Characteristics of Tapered Piles Embedded in an Elastic Medium

오상진[†] · 강희종* · 이재영** · 박광규*** · 모정만****

Sang Jin Oh, Hee Jong Kang, Jae Young Lee, Kwang Kyou Park and Jeong Man Mo

Key Words : Tapered Pile(변단면 말뚝), Embedded Pile(근입 말뚝), Elastic Medium(탄성매체), Free Vibration(자유진동), Natural Frequency(고유진동수)

ABSTRACT

The free vibration of tapered piles embedded in soil is investigated. The pile model is based on the Bernoulli-Euler beam theory and the soil is idealized as a Winkler model for mathematical simplicity. The governing differential equations for the free vibrations of such members are solved numerically. The square tapered piles with one free and the other hinged end with rotational spring are applied in numerical examples. The lowest two natural frequencies are obtained over a range of non-dimensional system parameters: the rotational spring parameter, the embedded ratio, the foundation parameter, the width ratio of the contact area and the section ratio.

1. 서론

지반 위에 놓인 구조물의 정, 동적거동에 관한 연구는 구조공학, 기초공학 및 진동제어분야에서 중요한 연구과제로 다루어지고 있어 이에 대한 많은 연구⁽¹⁻⁵⁾가 이루어져 왔다. 지반과 구조물의 상호거동 해석을 위해서는 지반특성을 표현할 수 있는 지반모형의 개발이 이루어져야 한다. 그러나 자연계의 지반이나 기타 구조물과 접하는 면은 성질이 다양하고 복잡하여 수학적으로 모형화하기 어려워 지반과 구조물의 상호거동을 규명하는 것은 매우 어려운 문제이다. 이러한 문제를 해결하기 위한 시도로써 Winkler, Hentenyi, Pasternak, Filonenko-Borodich, Vlasov, Kerr 등은 다양한 지반특성을 설명하기 위한 여러 가지 수학적 모형을 제시하였다⁽⁶⁾. 이 중 Winkler 가 제안한 모형은 지반을 무한개의 독립된 스프링으로 표현한 가장 간단한 모형이지만, 비교적 이론전개가 용이하기 때문에 많은 관련 연구에 이용되고 있다.

말뚝은 부재축을 통해 상부하중을 수직으로 분배시키거나 선단을 통해 지지층에 하중을 직접 전달시키기 위하여 사용될 뿐만 아니라 때로는 사면 활동을 방지하기 위한 목적 등에도 이용되고 있다. 이와 같은 목적에 이용되는 말뚝은 지반에 전근입(fully embedded) 또는 부분근입(partially embedded)

상태에 있기 때문에 말뚝 강성과 말뚝 주변의 지반특성을 고려한 해석이 필요하다.

이 논문에서는 Winkler 가 제안한 지반모형을 사용하여 직사각형 단면을 갖는 선형 변단면 말뚝의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 무차원 형태로 나타냈으며, 이를 수치해석하여 고유진동수를 산출하였다. 해석예에서는 상단은 자유, 하단은 회전지점과 회전스프링으로 이루어진 말뚝을 대상으로 다양한 제변수 변화에 따른 무차원 고유진동수를 산출하고 그 결과를 고찰하였다.

2. 수학적 모형

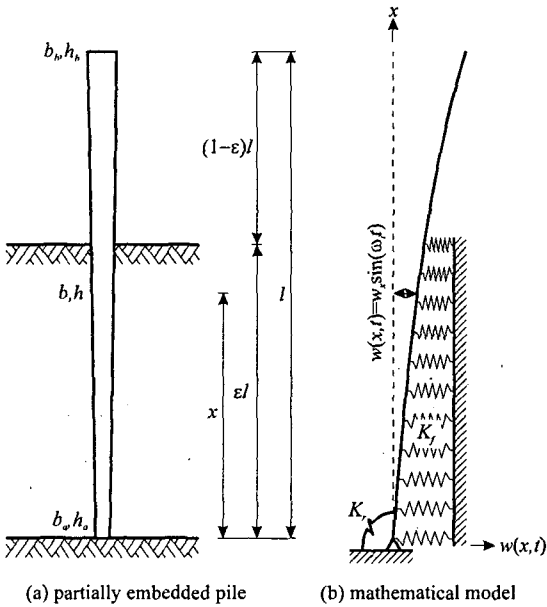
Fig. 1 (a)는 지반에 일부가 근입된 지반길이 l 인 변단면 말뚝을 나타낸 것이며, Fig. 1 (b)는 지반을 Winkler 가 제안한 탄성스프링으로 모형화하여 진동형의 예를 나타낸 것이다. 이 그림에서 (b_a, h_a) , (b_b, h_b) 및 (b, h) 는 각각 말뚝 하단, 상단 및 부재 축상 임의점 x 에서 부재단면의 단면폭 및 단면높이이며, ϵ 은 말뚝의 근입정도를 나타내는 근입비(embedded ratio), K_f 는 지반탄성계수, K_r 은 회전스프링상수이다. 그리고 $w(x,t)$ 는 부재 축상 임의점에서의 진동변위를 나타낸다.

Bernoulli-Euler 보이론에 의한 말뚝의 자유진동을 지배하는 편미분방정식은 식 (1)과 같다⁽⁷⁾.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} + K_f b w(x,t) = 0, \quad 0 \leq x \leq \epsilon l \quad (1a)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[EI \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} \right] + \rho A \frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad \epsilon l \leq x \leq l \quad (1b)$$

[†] 남도대학 토목환경과
E-mail : sjoh@namdo.ac.kr
Tel : (061) 380-8502, Fax : (061) 380-8679
* 원광대학교 대학원 토목환경공학과
** 호원대학교 토목공학과
*** 대전대학교 토목공학과
**** 전주농림고등학교 농업토목과



(a) partially embedded pile (b) mathematical model
Fig. 1 Partially embedded pile and mathematical model.

윗 식에서 I 와 A 는 각각 부재 축상 임의점에서의 단면 2 차모멘트와 단면적이며, E 와 ρ 는 각각 재료의 탄성계수 및 단위체적당 질량이다.

말뚝이 조화진동을 한다고 가정하면, 횡방향 변위에 대한 조화진동식은 식 (2)와 같이 나타낼 수 있다.

$$w(x,t) = w_x \sin(\omega_i t), \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

여기서 w_x 는 x 에 관한 함수로서 조화진동의 진폭이고, ω_i 는 고유각진동수(rad/s), i 는 모드번호, t 는 시간이다.

본 연구에서는 식 (3), (4)에 보인 바와 같이 하단의 단면폭 및 단면높이를 기준으로 부재 단면의 단면폭과 단면높이가 직선적으로 변화하는 직사각형 단면의 선형 변단면 말뚝을 택하였다. 식 (3), (4)을 이용하여 부재 축상 임의점에서의 단면적 및 단면 2 차모멘트를 나타내면 식 (5), (6)과 같다.

$$b = b_a [1 + (\alpha_b - 1)x/l], \quad h = h_a [1 + (\alpha_h - 1)x/l] \quad (3,4)$$

$$A = A_a [1 + (\alpha_b - 1)x/l][1 + (\alpha_h - 1)x/l] \quad (5)$$

$$I = I_a [1 + (\alpha_b - 1)x/l][1 + (\alpha_h - 1)x/l]^3 \quad (6)$$

여기서 A_a 와 I_a 는 각각 말뚝 하단의 단면적과 단면 2 차모멘트이며, $\alpha_b (= b_b/b_a)$ 와 $\alpha_h (= h_b/h_a)$ 는 각각 단면폭비 및 단면높이비이다. 따라서 $\alpha_b = \alpha_h$ 이면 정방형 변단면, $\alpha_b = 1$ 인 경우 변화

높이 변단면, $\alpha_h = 1$ 인 경우 변화폭 변단면, $\alpha_b \neq \alpha_h$ ($\alpha_b \neq 1$ 그리고 $\alpha_h \neq 1$)인 경우에는 폭과 높이가 각각 변화하는 변단면을 의미한다.

지배미분방정식을 무차원 형태로 표현하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 사용한다.

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \eta = \frac{w_x}{l}, \quad C_i = \omega_i l^2 \sqrt{\frac{\rho A_a}{EI_a}} \quad (7-9)$$

$$k_r = \frac{K_r l}{EI_a}, \quad k_f = \frac{K_f l^5}{EI_a}, \quad \beta = \frac{b_a}{l} \quad (10-12)$$

식 (9)에서 C_i 는 무차원 고유진동수(frequency parameter)이며, 식 (10)-(12)에서 k_r 은 회전스프링 상수(rotational spring parameter), k_f 는 지반계수(foundation parameter), β 는 접촉면의 폭 비(width ratio of contact area)이다.

식 (2)-(6)을 식 (1)에 대입하여 정리하고, 무차원 변수를 이용하여 표현하면 식(13)에 보여진 상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = -\frac{2[(\alpha_b - 1)[1 + (\alpha_h - 1)\xi] + 3(\alpha_h - 1)[1 + (\alpha_b - 1)\xi]]}{[1 + (\alpha_b - 1)\xi][1 + (\alpha_h - 1)\xi]} \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} - \frac{6(\alpha_h - 1)(\alpha_b - 1)[1 + (\alpha_h - 1)\xi] + (\alpha_h - 1)[1 + (\alpha_b - 1)\xi]}{[1 + (\alpha_b - 1)\xi][1 + (\alpha_h - 1)\xi]^2} \times \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + \left\{ \frac{C_i^2}{[1 + (\alpha_h - 1)\xi]^2} - \frac{k_f \beta}{[1 + (\alpha_h - 1)\xi]^2} \right\} \eta, \quad 0 \leq \xi \leq \varepsilon \quad (13a)$$

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = -\frac{2[(\alpha_b - 1)[1 + (\alpha_h - 1)\xi] + 3(\alpha_h - 1)[1 + (\alpha_b - 1)\xi]]}{[1 + (\alpha_b - 1)\xi][1 + (\alpha_h - 1)\xi]} \frac{d^3 \eta}{d\xi^3} - \frac{6(\alpha_h - 1)(\alpha_b - 1)[1 + (\alpha_h - 1)\xi] + (\alpha_h - 1)[1 + (\alpha_b - 1)\xi]}{[1 + (\alpha_b - 1)\xi][1 + (\alpha_h - 1)\xi]^2} \times \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + \frac{C_i^2}{[1 + (\alpha_h - 1)\xi]^2} \eta, \quad \varepsilon \leq \xi \leq 1 \quad (13b)$$

이상에서 식 (13)은 단면폭과 단면높이가 부재 축을 따라 직선적으로 변화하는 선형 변단면 말뚝의 자유진동을 지배하는 상미분방정식이다.

말뚝 하단은 회전단과 회전스프링으로 구성되어 있으므로 횡방향변위 w_x 가 발생하지 않으며, 휨모멘트 $EI_a d^2 w_x / dx^2 = K_r dw_x / dx$ 이므로 식 (14),

Table 1 Frequency ratio C_i/C_{0i} for pile with $\varepsilon=0$

$\alpha_b = \alpha_h$	i	Rotational spring parameter, k_r				
		10^8	1000	100	10	
1.2	1	1(3.254)*	0.9977	0.9779	0.8275	0.4205
	2	1(22.97)	0.9979	0.9799	0.8753	0.7435
0.8	1	1(3.855)	0.9983	0.9832	0.8614	0.4686
	2	1(21.06)	0.9982	0.9826	0.8825	0.7317

* Values in parentheses represent the frequency parameter for $k_r = 10^8$.

Table 2 Frequency ratio C_f/C_{0i} for embedded pile with $\alpha_b = \alpha_h = 1.2$

(a) $\varepsilon = 0.25$

β	k_f	i	Rotational spring parameter, k_r				
			10^8	1000	100	10	1
0.01	2	1	1(3.254)*	0.9977	0.9779	0.8275	0.4205
		2	1(22.97)	0.9979	0.9799	0.8753	0.7435
	200	1	1(3.255)	0.9977	0.9779	0.8279	0.4229
		2	1(22.98)	0.9979	0.9799	0.8754	0.7438
	2000	1	1(3.261)	0.9978	0.9783	0.8312	0.4435
		2	1(23.00)	0.9979	0.9801	0.8763	0.7460
0.05	2	1	1(3.254)	0.9977	0.9779	0.8275	0.4206
		2	1(22.97)	0.9979	0.9799	0.8753	0.7435
	200	1	1(3.257)	0.9977	0.9781	0.8294	0.4322
		2	1(22.98)	0.9979	0.9800	0.8758	0.7448
	2000	1	1(3.287)	0.9979	0.9797	0.8450	0.5199
		2	1(23.09)	0.9979	0.9806	0.8804	0.7555

(b) $\varepsilon = 0.5$

β	k_f	i	Rotational spring parameter, k_r				
			10^8	1000	100	10	1
0.01	2	1	1(3.254)	0.9977	0.9779	0.8275	0.4207
		2	1(22.97)	0.9979	0.9799	0.8753	0.7435
	200	1	1(3.269)	0.9978	0.9783	0.8310	0.4394
		2	1(22.99)	0.9979	0.9800	0.8756	0.7442
	2000	1	1(3.399)	0.9981	0.9815	0.8589	0.5680
		2	1(23.16)	0.9979	0.9804	0.8785	0.7504
0.05	2	1	1(3.255)	0.9977	0.9779	0.8277	0.4215
		2	1(22.97)	0.9979	0.9799	0.8753	0.7436
	200	1	1(3.328)	0.9979	0.9798	0.8443	0.5042
		2	1(23.07)	0.9979	0.9802	0.8769	0.7470
	2000	1	1(3.888)	0.9990	0.9903	0.9299	0.8151
		2	1(23.91)	0.9981	0.9823	0.8905	0.7759

(c) $\varepsilon = 0.75$

β	k_f	i	Rotational spring parameter, k_r				
			10^8	1000	100	10	1
0.01	2	1	1(3.255)	0.9977	0.9779	0.8276	0.4212
		2	1(22.97)	0.9979	0.9799	0.8753	0.7435
	200	1	1(3.338)	0.9979	0.9793	0.8398	0.4807
		2	1(23.00)	0.9979	0.9800	0.8756	0.7442
	2000	1	1(4.009)	0.9987	0.9877	0.9078	0.7376
		2	1(23.26)	0.9979	0.9804	0.8786	0.7505
0.05	2	1	1(3.258)	0.9977	0.9780	0.8281	0.4239
		2	1(22.97)	0.9979	0.9799	0.8753	0.7436
	200	1	1(3.654)	0.9983	0.9839	0.8774	0.6332
		2	1(23.12)	0.9979	0.9802	0.8769	0.7470
	2000	1	1(6.028)	0.9997	0.9974	0.9815	0.9529
		2	1(24.43)	0.9981	0.9824	0.8911	0.7770

(d) $\varepsilon = 1.$

β	k_f	i	Rotational spring parameter, k_r				
			10^8	1000	100	10	1
0.01	2	1	1(3.257)	0.9977	0.9779	0.8278	0.4221
		2	1(22.97)	0.9979	0.9799	0.8753	0.7435
	200	1	1(3.509)	0.9980	0.9810	0.8539	0.5413
		2	1(23.01)	0.9979	0.9800	0.8757	0.7446
	2000	1	1(5.274)	0.9991	0.9917	0.9389	0.8312
		2	1(23.36)	0.9979	0.9806	0.8797	0.7535
0.05	2	1	1(3.267)	0.9977	0.9781	0.8290	0.4284
		2	1(22.98)	0.9979	0.9799	0.8753	0.7436
	200	1	1(4.382)	0.9988	0.9879	0.9095	0.7410
		2	1(23.17)	0.9979	0.9803	0.8775	0.7486
	2000	1	1(9.834)	0.9998	0.9977	0.9837	0.9570
		2	1(24.85)	0.9982	0.9829	0.8948	0.7865

* Values in parentheses represent the frequency parameter for $k_r = 10^8$.

Table 3 Frequency ratio C_f/C_{0i} for embedded pile with $\alpha_b = \alpha_h = 0.8$

(a) $\varepsilon = 0.25$

β	k_f	i	Rotational spring parameter, k_r				
			10^8	1000	100	10	1
0.01	2	1	1(3.855)*	0.9983	0.9832	0.8614	0.4686
		2	1(21.06)	0.9982	0.9826	0.8825	0.7317
	200	1	1(3.856)	0.9983	0.9833	0.8617	0.4709
		2	1(21.06)	0.9982	0.9826	0.8827	0.7320
	2000	1	1(3.862)	0.9983	0.9835	0.8646	0.4915
		2	1(21.08)	0.9982	0.9827	0.8838	0.7349
0.05	2	1	1(3.855)	0.9983	0.9832	0.8614	0.4687
		2	1(21.06)	0.9982	0.9826	0.8825	0.7317
	200	1	1(3.859)	0.9983	0.9834	0.8630	0.4803
		2	1(21.07)	0.9982	0.9827	0.8831	0.7333
	2000	1	1(3.888)	0.9984	0.9847	0.8764	0.5675
		2	1(21.17)	0.9983	0.9834	0.8885	0.7473

(b) $\varepsilon = 0.5$

β	k_f	i	Rotational spring parameter, k_r				
			10^8	1000	100	10	1
0.01	2	1	1(3.855)	0.9983	0.9832	0.8614	0.4688
		2	1(21.06)	0.9982	0.9826	0.8825	0.7317
	200	1	1(3.872)	0.9983	0.9835	0.8644	0.4865
		2	1(21.08)	0.9982	0.9826	0.8829	0.7326
	2000	1	1(4.014)	0.9986	0.9862	0.8882	0.6097
		2	1(21.28)	0.9982	0.9832	0.8866	0.7410
0.05	2	1	1(3.856)	0.9983	0.9832	0.8616	0.4695
		2	1(21.06)	0.9982	0.9826	0.8826	0.7317
	200	1	1(3.936)	0.9984	0.9848	0.8757	0.5483
		2	1(21.17)	0.9982	0.9829	0.8846	0.7364
	2000	1	1(4.538)	0.9993	0.9932	0.9478	0.8458
		2	1(22.17)	0.9985	0.9853	0.9014	0.7756

(c) $\varepsilon = 0.75$

β	k_f	i	Rotational spring parameter, k_r				
			10^8	1000	100	10	1
0.01	2	1	1(3.856)	0.9983	0.9832	0.8615	0.4692
		2	1(21.06)	0.9982	0.9826	0.8825	0.7317
	200	1	1(3.953)	0.9984	0.9844	0.8715	0.5224
		2	1(21.09)	0.9982	0.9826	0.8829	0.7326
	2000	1	1(4.724)	0.9991	0.9909	0.9275	0.7621
		2	1(21.43)	0.9982	0.9832	0.8865	0.7406
0.05	2	1	1(3.860)	0.9983	0.9833	0.8619	0.4716
		2	1(21.06)	0.9982	0.9826	0.8826	0.7317
	200	1	1(4.317)	0.9988	0.9879	0.9023	0.6633
		2	1(21.24)	0.9982	0.9829	0.8845	0.7362
	2000	1	1(6.995)	0.9998	0.9984	0.9879	0.9647
		2	1(22.91)	0.9985	0.9853	0.9014	0.7753

(d) $\varepsilon = 1.$

β	k_f	i	Rotational spring parameter, k_r				
			10^8	1000	100	10	1
0.01	2	1	1(3.858)	0.9983	0.9832	0.8616	0.4699
		2	1(21.06)	0.9982	0.9826	0.8825	0.7317
	200	1	1(4.153)	0.9985	0.9855	0.8816	0.5708
		2	1(21.11)	0.9982	0.9827	0.8832	0.7333
	2000	1	1(6.222)	0.9993	0.9935	0.9480	0.8325
		2	1(21.59)	0.9983	0.9834	0.8885	0.7469
0.05	2	1	1(3.871)	0.9983	0.9834	0.8626	0.4751
		2	1(21.06)	0.9982	0.9826	0.8826	0.7318
	200	1	1(5.176)	0.9990	0.9906	0.9248	0.7495
		2	1(21.33)	0.9982	0.9830	0.8856	0.7395
	2000	1	1(11.58)	0.9998	0.9980	0.9839	0.9500
		2	1(23.61)	0.9985	0.9861	0.9073	0.7934

* Values in parentheses represent the frequency parameter for $k_r = 10^8$.

말뚝 상단은 자유단이므로 휨모멘트와 전단력이 발생하지 않으므로 식 (15)와 같이 무차원 경계조건식으로 나타낼 수 있다.

$$\eta = \frac{d^2\eta}{d\xi^2} - k_r \frac{d\eta}{d\xi} = 0, \quad \xi = 0 \text{ 에서} \quad (14a,b)$$

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} = \frac{d^3\eta}{d\xi^3} = 0, \quad \xi = 1 \text{ 에서} \quad (15a,b)$$

본 연구에서는 식 (13)의 상미분방정식을 4 개의 1 계 연립미분방정식으로 변환하여 초기치 문제로 형성한 후 식 (14), (15)의 경계조건식을 이용하여 Runge-Kutta 법으로 수치적분하였으며, 대상구조의 무차원 고유진동수를 결정하기 위해서는 시행착오적 행렬값 탐사법을 적용하는 과정에서 Regula-Falsi 법을 이용하였다.

3. 수치해석 예 및 고찰

본 연구에서는 해석결과로서 $\alpha_b = \alpha_h$ 인 경우 즉 정방형 변단면 말뚝에 대하여 회전스프링상수, 근입비, 지반계수 및 접촉면의 폭비 변화에 따른 최저차 2 개의 고유진동수를 산출하고, 그 결과를 고찰하였다.

Table 1 은 $\varepsilon = 0$ 즉 지반에 근입되지 않은 단면비($\alpha_b = \alpha_h$)가 각각 1.2 및 0.8 인 변단면 말뚝의 하단에서의 회전스프링상수 k_r 이 1, 10, 100, 1000, 10^8 인 경우 고유진동수비 C_i/C_{0i} 를 나타낸 것이다. 여기서 C_{0i} 는 $k_r = 10^8$ 일 때의 무차원 고유진동수이며, C_i 는 각각의 회전스프링상수 k_r 에 대응되는 무차원 고유진동수이다.

Table 2 와 3 은 단면비($\alpha_b = \alpha_h$)가 각각 1.2 및 0.8 인 변단면 말뚝의 근입비가 0.25, 0.5, 0.75, 1 일 때 회전스프링상수 k_r , 지반계수 k_f , 접촉면의 폭비 β 에 따른 무차원 고유진동수비 C_i/C_{0i} 를 나타낸 것이다. 여기서 C_{0i} 는 각각의 제변수를 갖는 말뚝 하단에서 회전스프링상수 $k_r = 10^8$ 일 때의 무차원 고유진동수이며, C_i 는 각각의 회전스프링상수 k_r 에 대응되는 무차원 고유진동수이다. 본 연구에서 회전스프링상수 k_r 은 1, 10, 100, 1000, 10^8 , 지반계수 k_f 는 2, 200 및 2000 을 고려하였다.

Table 1-3 에서 회전스프링상수 k_r , 근입비 ε , 지반계수 k_f , 접촉면의 폭비 β 가 증가할수록 무차원 고유진동수는 증가함을 알 수 있다.

한편 근입비 ε 이 작을수록, 지반계수 k_f 가 작을수록, 접촉면의 폭비 β 가 작을수록 무차원 고유진동수비 C_i/C_{0i} 가 작음을 알 수 있다. 이는 이들 값들이 작을수록 회전스프링상수 k_r 이 고유진동수에 미치는 영향이 큼을 의미한다.

Table 2 와 3 에서 k_r 이 1 인 경우를 제외하고는 단면비($\alpha_b = \alpha_h$)가 1.2 인 경우보다는 0.8 인 경우 무차원 고유진동수비가 더 큼을 알 수 있다. 이는 단면비가 1.2 인 경우가 회전스프링상수 k_r 이 고유진동수에 미치는 영향이 큼을 의미한다.

4. 요약

본 연구는 지반에 근입된 변단면 말뚝의 자유진동에 관한 연구이다. 이 논문에서는 말뚝이 근입된 지반을 Winkler 형으로 이상화하여 변단면 말뚝의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 무차원 형으로 표현하였으며, 이를 수치해석하여 대상구조의 고유진동수를 산출하였다. 수치해석 예에서는 상단이 자유, 하단이 회전지점과 회전스프링으로 이루어진 말뚝을 대상으로 회전스프링상수, 근입비, 지반계수, 접촉면의 폭비에 따른 고유진동수를 산출하고 그 결과를 고찰하였다.

참고문헌

- (1) Valsangkar, A.J. and Pradhanang, R.B., 1987, "Free Vibration of Partially Supported Piles," *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, Vol. 113, pp.1244-1247.
- (2) Lee, S.Y. and Yang, C.C., 1994, "Non-Conservative Instability of Non-Uniform Beams Resting on an Elastic Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 169, pp.433-444.
- (3) Eisenberger, M., 1994, "Vibration Frequencies for Beams on Variable One- and Two-Parameter Elastic Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 176, pp.577-584.
- (4) West, R.P. and Pavlovic, M.N., 1999, "A Parametric Study of the Clustering of Modes in the Vibration of Partially Embedded Beams," *International Journal of Mechanical Science*, Vol. 41, pp.547-559.
- (5) Lee, B.K., Oh, S.J. and Park, K.K., 2002, "Free Vibrations of Shear Deformable Circular Curved Beams Resting on Elastic Foundations," *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 2, pp.77-97.
- (6) Selvadurai, A.P.S., 1979, *Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction*, Elsevier.
- (7) Selvadurai, A.P.S., 1979, *Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction*, Elsevier.