

# 전달함수합성법에서 연결자유도 변화에 따른 구조물 진동특성 변화에 대한 연구

## A case Study on Vibration Characteristic Variation Due to Connective Degree of Freedom of Structure in FRF Synthesis Method

김극수\*· 최수현\* 조성재\* 진봉만\*

Kuk-Su Kim, Su-Hyun Choi, Sung-Je Jo and Bang-Man Jin

**Key Words** : Vibration Characteristic(진동특성), Modal Force Equation(힘모드방정식), Baseline Structure(기본 구조물), Additional Structure(부가 구조물), Modified Structure(변경 구조물), Frequency Response Function(주파수 응답함수)

### ABSTRACT

본 연구는 전달함수 합성법을 이용하여 보강후 구조물의 진동특성을 예측하는 방법이다. 이 방법은 보강후 구조물의 진동특성을 보강전 구조물의 전달함수를 이용하여 예측하는 기술로, 이에 관한 이론은 많이 알려져 있다. 하지만 실제 실험으로 전달함수를 계측할 경우 회전자유도에 대한 전달함수를 계측하기가 어렵다. 따라서 병진자유도만으로 전달함수 합성법을 적용할 경우 발생하는 고유진동수 추정 오차를, 전체 자유도를 이용한 경우와 간단한 구조물의 수치해석을 통해서 비교해 보고자 한다.

차 및 경계조건의 영향이 이미 반영되어 있다.<sup>(3)</sup>

### 1. 서론

최근 진동문제 해결을 위한 방법으로 연구되고 있는 구조변경기법<sup>(1)</sup> 원하는 진동특성을 얻기 위하여 구조물의 재설계안을 도출하는 방법이다. 대부분의 구조변경은 보강전의 유한요소모델에 대해 진동해석을 수행하고, 모달 테스트를 통하여 유한요소모델을 보정한 후, 구조보강안을 세우고 보강안에 대한 진동해석을 통해 구조변경후의 진동특성을 예측하는 순서로 진행된다. 하지만 유한요소 모델의 경우 복잡한 실제 구조물의 모델링에 많은 시간이 걸리고, 경계조건이나 모델링 오차등의 영향을 고려하기가 어렵다. 보강후 구조물의 진동특성을 예측하기 위해 기존의 유한요소 모델을 이용하는 방법과는 달리, 계측한 진동 실험자료를 직접 이용하여 보강된 구조물의 진동특성을 예측하는 방법<sup>(2)</sup> 또한 연구되고 있다. 이 방법은 보강후의 진동특성을 보강전의 구조물로부터 측정된 전달함수를 직접 사용하여 계산하므로, 기존의 구조물에 대한 유한요소 모델이 필요 없기 때문에 모델링 및 유한요소 보정에 걸리는 시간을 줄일 수 있다. 또한 진동실험 결과에도 오차가 존재하고 있으나, 실험 결과에는 이미 복잡한 실제 구조물의 여러 가지 불확실한 변수로 인한 오

차 계측한 전달함수를 이용하여 전달함수합성법을 이용하여 변경구조물의 고유진동수를 추정하려 할 때, 실험으로부터 회전자유도에 대한 전달함수를 계측하기가 어렵으므로 현실적으로 병진자유도만의 전달함수를 이용하여 변경구조물의 고유진동수를 추정하게 된다. 이때 자유도가 부족한 전달함수를 이용하여 변경구조물의 고유진동수 추정하므로 고유진동수 추정시 오차가 발생한다.

전달함수합성법을 이용하여 고유진동수 추정시, 채용하는 자유도에 따라 추정된 고유진동수가 다르다. 따라서 본 연구에서는 채용하는 자유도에 따라 추정된 고유진동수의 오차를 살펴보고, 실제 간단한 모형을 제작 실험을 통하여 변경구조물의 고유진동수를 추정하고자 한다.

### 2. 기본 이론

#### 2.1 모드힘 방정식

변 절에서는 전달함수합성법을 이용하여 변경 구조물의 동특성을 추정하는 방법중 하나인 모드 힘 합성법의 이론을 살펴 보기로 한다. 변경된 구조물은 기본 구조물과 기본 구조물의 진동특성을 바꾸기 위한 여러 개의 부가구조물로 구성되어

\* 대우조선해양(주) 진동소음연구팀  
E-mail : kuksu@dsme.co.kr  
Tel : (055) 680-5548, Fax : (055) 680-2174

있고, 기본구조물과 부가구조물은 Fig.1 과 같이 A,B,C 점에서 연결되어 있다. 자유진동에 대한 운동방정식은 외력이 없고 연결부에서 내력만 존재하므로, 전달함수를 사용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$H_p(w)f_p = x_p \quad (1)$$

여기서  $H_p(w)$ 는 연결점에서 내력에 의한 기본구조물과 부가구조물의 주파수응답함수 이고,  $f_p$ 는 연결점에서 내력 벡터이고,  $x_p$ 는 연결점에서의 응답벡터로 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$H_p = \begin{bmatrix} H_{AA}^b & H_{AB}^b & H_{AC}^b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{BA}^b & H_{BB}^b & H_{BC}^b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ H_{CA}^b & H_{CB}^b & H_{CC}^b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{AA}^{m1} & H_{AB}^{m1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{BA}^{m1} & H_{BB}^{m1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{AA}^{m2} & H_{AB}^{m2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & H_{BA}^{m2} & H_{BB}^{m2} \end{bmatrix} \quad (2)$$

$$x_p = [x_A^{bT}, x_B^{bT}, x_C^{bT}, x_A^{m1T}, x_B^{m1T}, x_B^{m2T}, x_C^{m2T}]^T \quad (3)$$

$$f_p = [f_A^{bT}, f_B^{bT}, f_C^{bT}, f_A^{m1T}, f_B^{m1T}, f_B^{m2T}, f_C^{m2T}]^T \quad (4)$$

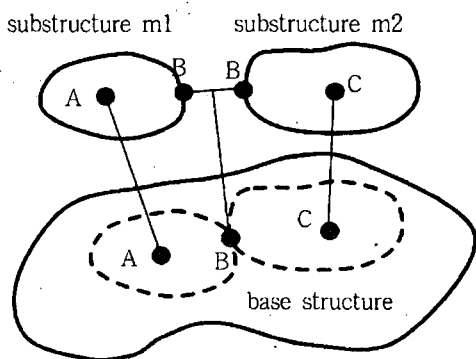


Fig. 1 Schematic diagram of structural dynamic modification

여기서 상첨자 b, m1 과 m2 는 기본 구조물과 2 개의 부가구조물을 나타내며 A,B,C 는 연결점을 나타낸다. 각 점에 여러자유도가 존재하며, 각 구조물들이 서로 연결되므로 연결점에서 기하학적인

변위 접합조건과 힘의 평형에 대한 구속조건으로 각 구조물의 변위와 힘들 사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

$$x_A^b = x_A^{m1}, x_B^b = x_B^{m1} = x_B^{m2}, x_C^b = x_C^{m2} \quad (5)$$

$$f_A^b + f_A^{m1} = 0, f_B^b + f_B^{m1} + f_B^{m2} = 0, f_C^b + f_C^{m2} = 0 \quad (6)$$

이러한 조건을(식 5, 6) 적용하면 변위와 힘벡터인  $x_p, f_p$ 의 요소들은 더 이상 서로 독립이 아니다. 따라서 독립적인 요소만의 변위와 힘벡터인  $x_s, f_s$ 를 이용하여 각 구조물의 변위와 힘을 나타내는 식 3 과 식 4를 다시 쓰면 다음과 같다.

$$x_p = Ux_s, f_p = Qf_s \quad (7)$$

여기서  $U$ 와  $Q$ 는 독립좌표계와 기본 좌표계 사이의 변환 행렬로 다음과 같고 독립좌표계는 부가구조물의 변위와 힘벡터로 나타낼 수 있다.

$$U = \begin{bmatrix} I_A & 0 & 0 \\ 0 & I_B & 0 \\ 0 & 0 & I_C \\ I_A & 0 & 0 \\ 0 & I_B & 0 \\ 0 & I_B & 0 \\ 0 & 0 & I_C \end{bmatrix}, Q = \begin{bmatrix} -I_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -I_B & -I_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_C \\ I_A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_B & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_B & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_C \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$x_p = [x_B^{m1T}, x_B^{m2T}, x_C^{m2T}]^T \quad (9)$$

$$f_p = [f_A^{m1T}, f_B^{m1T}, f_B^{m2T}, f_C^{m2T}]^T \quad (10)$$

독립좌표계에 의한 식 (7)을 운동방정식에 대입하고  $Q^T$ 를 곱하면

$$H_p(w)f_p = x_p \quad (11)$$

$$Q^T H_p(w) Q f_s = Q^T U x_s = 0 \quad (12)$$

또는

$$H(w)f = 0 \quad (13)$$

여기서

$$f = f_s$$

$$H(w) = Q^T H_p(w) Q \quad (14)$$

식 (14)를 풀어 쓰면

$$H(w) = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} H_{AA}^b & H_{AB}^b & H_{AB}^b & H_{AC}^b \\ H_{BA}^b & H_{BB}^b & H_{BB}^b & H_{BC}^b \\ H_{BA}^b & H_{BB}^b & H_{BB}^b & H_{BC}^b \\ H_{CA}^b & H_{CB}^b & H_{CB}^b & H_{CC}^b \end{bmatrix} \\ + \begin{bmatrix} H_{AA}^{m1} & H_{AB}^{m1} & 0 & 0 \\ H_{BA}^{m1} & H_{BB}^{m1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & H_{AA}^{m2} & H_{AB}^{m2} \\ 0 & 0 & H_{BA}^{m2} & H_{BB}^{m2} \end{bmatrix} \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$= (H^b(w) + H^m(w))$$

식 (15)를 모드힘 방정식(modal force equation)이라고 한다.

모드힘 벡터  $f$  는 기본구조물과 부가구조물이 결합할 때 연결점에서 작용하는 내력 벡터이고, 모드힘 방정식은 기본구조물의 전달함수 행렬  $H^b(w)$  와 부가구조물의 전달함수 행렬  $H^m(w)$  의 합으로 표현된다.<sup>(2)</sup> 실험으로 측정한 전달함수는 식(15)를 적용하면 모드힘 방정식에 사용될 수 있고 이 방정식을 이용하여 변경구조물의 고유진동수를 계산할 수 있다.

## 2.2 변경 구조물의 고유진동수

변경된 구조물의 고유진동수와 모드힘은 모드힘 방정식인 식 (13)의 해이다. 모드힘 방정식이 비자명해를 갖기 위한 조건은 행렬식이 (Determinant) 0 이 되어야 한다. 따라서 변경된 구조물의 고유진동수는 다음식의 해가 된다.

$$Det(H(w)) = 0 \quad (16)$$

이 전달함수  $H(w)$  가 주파수에  $w$  대해 분수식의 형태로 되어 있기 때문에, 행렬식은 결합하기 전 구조물의 고유진동수 부근에서 불안정하므로 다음과 같이 행렬식을 변경하는 것이 제안되었다.<sup>(2)</sup>

$$Det(H(w)) \cdot \prod_{k=1}^{N_s} \prod_{j=1}^{S_k} ((w_j^k)^2 - w^2) = 0 \quad (17)$$

여기서  $w_j^k$  는  $k$  번째 부가 구조물의  $j$  번째 고유진동수이고,  $N_s$  는 부가 구조물의 수,  $S_k$  는  $k$  번째 부가 구조물의 관심 주파수 영역에서 모드 갯수이다. 이 행렬식은 부가구조물의 고유진동수

부근에서 일어나는 수치적인 불안정성을 피할 수 있다. 이러한 이유로 안정된 행렬식인 식 (18)이 주로 사용된다.

이러한 행렬식은 고유진동수에 감쇠가 포함되지 않은 경우에 적용될 수는 있지만 일반적인 구조물에서는 감쇠가 포함되어 있어 행렬식 탐색이 어렵다. 또한 이론적으로 감쇠가 없는 주파수 응답함수의 생성시 모드자름 오차가 생기게 되며 현장에서 쉽게 적용하기도 어렵다. 따라서 다음과 같은 행렬식을 제안하고자 한다.

$$\log_{10} \left( \frac{1}{|Det(H(w))|} \right) = Peak \quad (19)$$

이 행렬식은 감쇠가 없는 전달함수를 재생성할 필요도 없고 다른 행렬식에서와 같이 수치들의 스케일 차이가 커서 그래프상에서 찾기 어려운 고유진동수의 값을 그래프상에서 Peak 값으로 고유진동수를 찾을 수 있는 장점이 있다.

## 3. 수치해석

Fig.2 와 같이 간단한 구조물의 전달함수를 이용하여 변경구조물의 고유진동수를 추정하고자 한다.

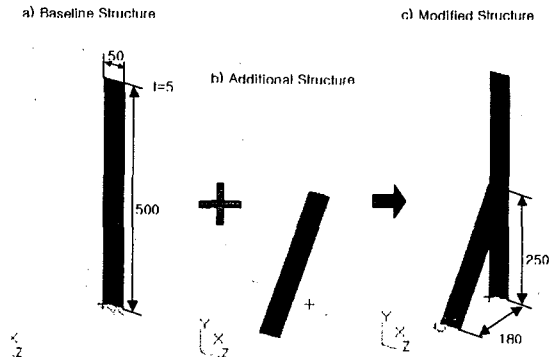


Fig. 2 Baseline structure, additional structure and modified structure

기본구조물의 중앙부에 부가 구조물을 Fig.2 에서 와 같이 대각선 방향으로 붙였을 경우 구조가 변경된 구조물의 고유진동수를 계산하려고 한다. 계산에 사용된 구조물의 치수와 물성치는 Table-1 과 같다.

TABLE -1 DIMENSIONS OF STRUCTURE AND MATERIAL PROPERTIES

Structure	Type	Size and Property
Baseline structure	Breadth	50 mm
	Height	500 mm
	Thickness	5 mm
Additional structure	Breadth	50 mm
	Height	308 mm
	Thickness	5 mm
Material property	Young's modulus	206 Gpa
	Poisson ratio	0.3
	Density	7850 Kg/m <sup>3</sup>

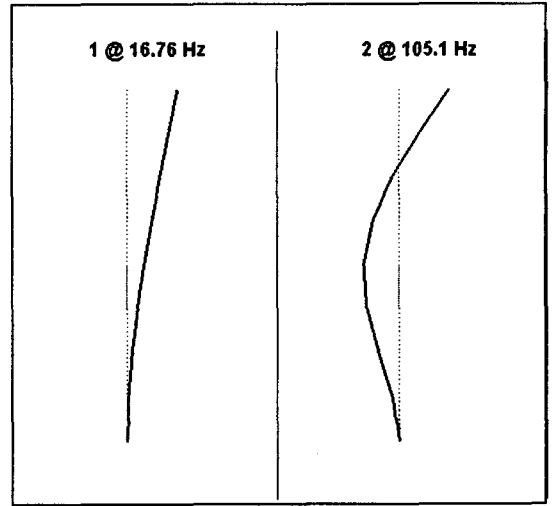


Fig. 4 Mode shape of baseline structure

### 3.1 기본 구조물의 전달함수 계산

먼저 기본구조물과 부가 구조물의 연결점에서의 전달함수를 각각 계산하였다. 기본구조물에서의 전달함수는(Inertance) 연결점에서 각각의 방향으로 가진하여 각각의 방향에 대해 응답을 계산하여야 한다. 연결점에서의 전달함수중 구조물의 중앙에서 x 방향으로 가진하여 계산한 x 방향의 가속도 응답은 Fig.3 과 같다. 기본구조물의 고유진동수는 16.8 과 105.1 Hz 이며 이에 대응하는 모드는 Fig.4 와 같다.

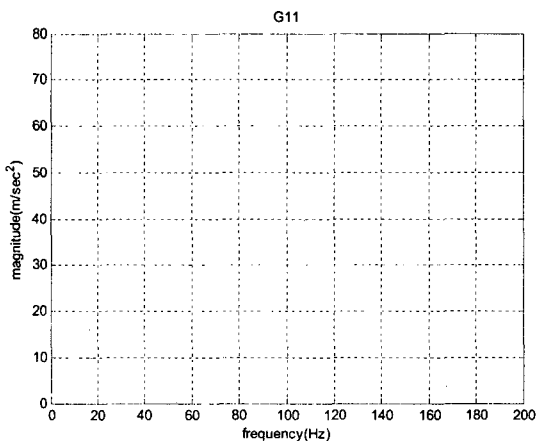


Fig. 3 Frequency response function of baseline structure

### 3.2 부가구조물의 전달함수와 모드

다음은 Fig.2 의 그림과 같이 기본구조물의 보강을 위하여 사용하는 대각선 방향의 부가구조물의 전달함수를 계산하여야 한다. 기본구조물과 연결점에서 각 방향별 전달함수와 모드가 계산되며 계산된 전달함수 중 x 방향을 가진하여 x 방향의 가속도 응답을 계산한 결과는 Fig.5 와 같고, 부가 구조물의 고유진동수는 44.2Hz 이며 이에 대응하는 모드는 Fig.6 과 같다.

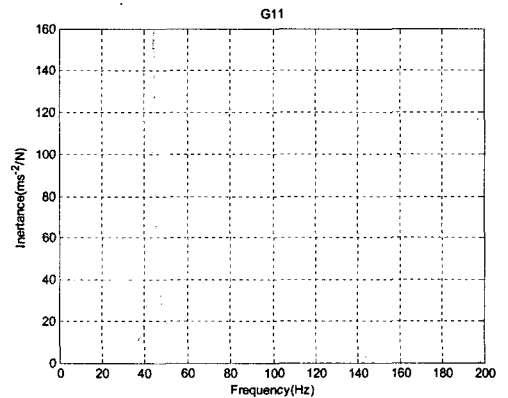


Fig. 5 Frequency response function of additional structure

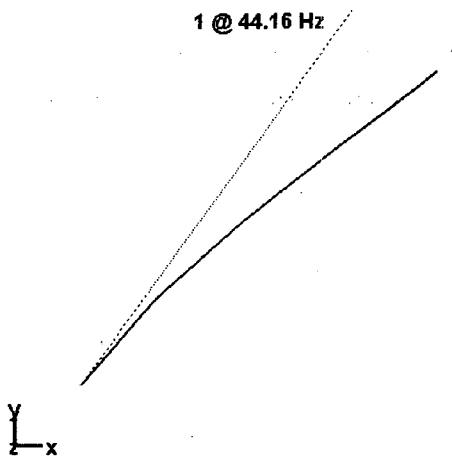


Fig. 6 Mode shape of additional structure

### 3.3 변경구조물의 고유진동수

기본구조물에 부가구조물이 연결될 경우 변경 구조물의 고유진동수를 예측하고자한다. 위에서 계산한 기본구조물과 부가구조물의 연결점에서의 전달함수를 이용하면 식 (13)와 같이 모드힘 방정식을 구성할 수 있다. 변경 후 구조물의 고유진동수는 식 (16)에서와 같이 행렬식이 0 이 되는 주파수이다. 따라서 각 주파수에 대한 행렬식의 그래프를 그리면 Fig.7 과 같다. 이 경우 그림을 보고 행렬식이 0 이 되는 지점을 찾기란 쉽지가 않다.

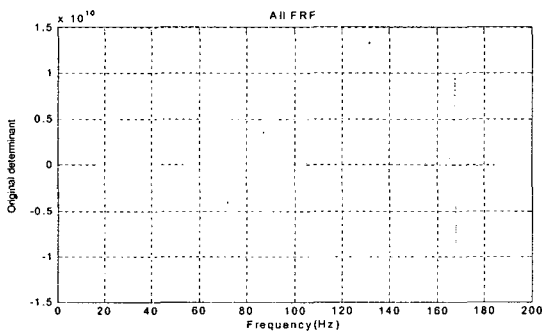


Fig. 7 Original determinant of modal force matrix

또 다른 방법인 식 (17)과 같이 기본구조물과 부가구조물의 고유진동수 부근의 행렬식에서 발생하는 불안정성을 제거한 경우는 Fig.8 과 같다. 그림에서 보는 바와 같이 불연속적인 부분들은 많이 없어졌으나 그림에서 행렬식이 0 이 되는 부분을 찾기란 쉽지 않다. 이는 행렬식의 계산치가

서로 크게 차이가 나기 때문이다. 따라서 고유진동수 부근에서 행렬식이 0 이 되는 성질을 이용하면 행렬식의 역수의 절대값에 상용로그를 취한 식 (18)은 고유진동수 부근에서 피크가 된다. 이 행렬식을 사용한 경우 다른 행렬식을 사용한 경우와 달리 Fig.9 와 같이 변경된 구조물의 고유진동수인 53Hz 근방에서 피크치를 쉽게 찾을 수 있다. 행렬식 탐색에 사용되는 전달함수의 자유도와 감쇠의 영향은 5 절에 정리하였다. 위에서 구한 변경구조물의 고유진동수를 확인하기 위하여 변경구조물 전체를 진동해석 하였다. 변경구조물의 전달함수는 Fig.10 과 같고 고유진동수는 52.8Hz 로 전달함수 합성법에 의해 추정된 고유진동수와 거의 일치한다. 고유진동수는 52.8Hz 에 상응하는 모드는 Fig.11 과 같다.

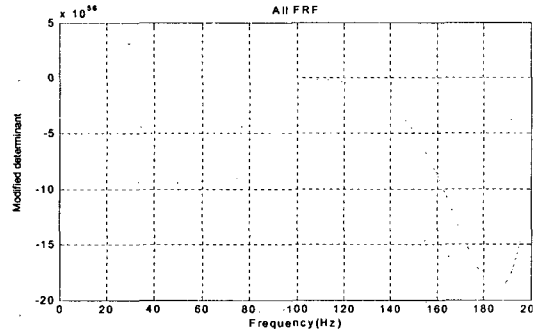


Fig. 8 Modified determinant of modal force matrix

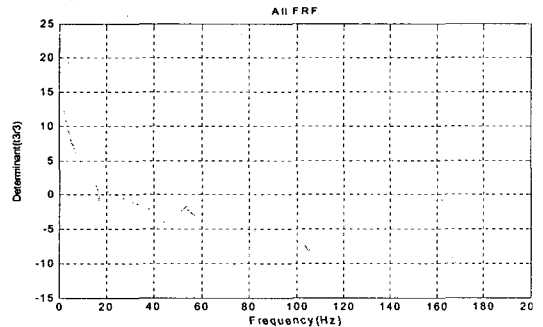


Fig. 9 Suggested determinant of modal force matrix

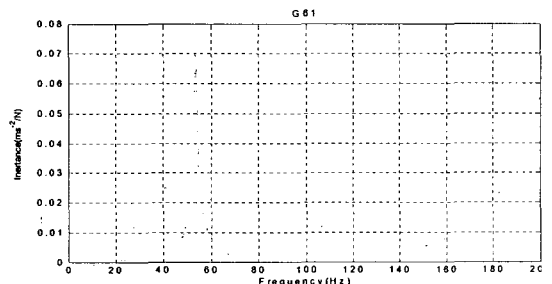


Fig. 10 Frequency response function of modified structure

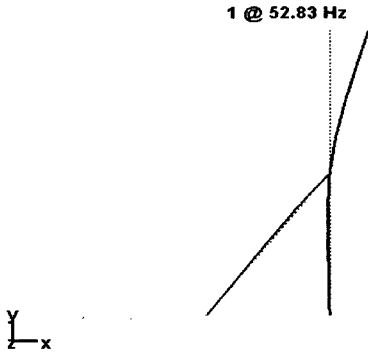


Fig. 11 Mode shape of modified structure

### 3.4 모형실험

이 절에서는 전달함수 합성법에 의한 변경구조물의 고유진동수를 실제 실험을 통하여 확인하려 한다. 실험 모델은 수치실험모델과 같은 재원으로 Fig. 12와 같이 제작하였다. 그림의 오른쪽에 보이는 외팔보는 기본구조물이고, 오른쪽의 보강된 구조물은 변경구조물이며, 그리고 보강하기 위해 대각선 방향으로 추가한 보강재는 부가구조물이다.

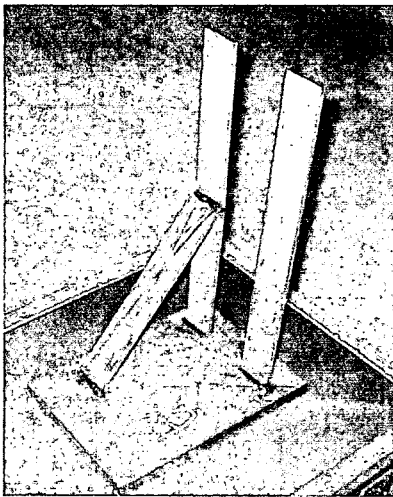


Fig. 12 Test model

먼저 기본구조물의 연결점에서 전달함수를 실험을 통하여 계측하였으며, 부가구조물의 전달함수는 유한요소법을 이용하여 계산하였다. 이 전달함수를 이용하여 모드해방 방정식을 구성하고 모드해방 방정식의 행렬식을 이용하여 변경구조물의 고유진동수를 추정하면 Fig.13에서 보듯이 55.0Hz로 추정된다. 변경 구조물의 계측 고유진동수는

57.5Hz로 추정된 고유진동수와 4%정도의 오차를 보이고 있다.

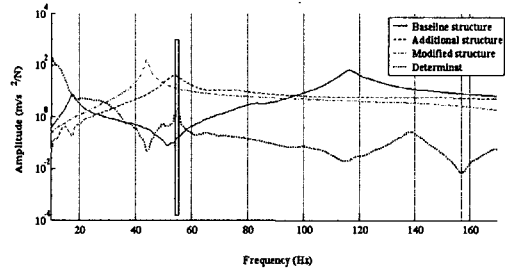


Fig. 13 Frequency response functions and determinant

## 4. 자유도부족에 의한 고유진동수 추정 오차 및 감쇠의 영향

### 4.1 자유도에 따른 고유진동수 추정오차

실제 구조물은 한 점에서 6 자유도의 운동을 하고 있으나 회전운동은 계측하기 어렵기 때문에 기본구조물과 부가구조물의 연결점의 자유도에 따른 고유진동수의 추정오차를 검토하려고 한다.

Fig.2의 구조물을 사용할 경우, 먼저 6 자유도의 전달함수를 이용하여 추정된 변경된 구조물의 고유진동수는 Fig.14와 같이 53.3Hz로 정확하게 추정되어지고, 3개의 자유도를(병진운동 X와 Y 회전운동  $\theta_z$ ) 이용하여 예측한 고유진동수 또한 Fig.15에서 보듯이 변경구조물의 고유진동수를 정확하게 추정할 수 있다. 이는 구조물이 평면운동을 하는 경우이므로 병진운동 X와 Y 그리고 회전운동  $\theta_z$ 의 자유도를 사용하여 운동을 묘사할 수 있기 때문이다. 회전방향 자유도가 없는 병진운동만의 전달함수의 행렬식으로 추정된 고유진동수는 Fig. 16에서 보듯이 47Hz로 실제고유진동수보다 약 10%정도의 작은 값으로 추정되어진다. 전달함수 1나만 사용할 경우 고유진동수는 Fig.17와 같이 매우 많은 오차를 가진다. 이는 구조물의 운동을 1자유도로 묘사할 수 없기 때문이다. 요약하면 일반적으로 행렬식에 사용된 자유도가 감소함에 따라 고유진동수를 추정에서 발생하는 오차가 증가한다.

한편 Fig.14에서 변경된 구조물의 고유진동수가 anti-resonance 처럼 나타나게 되는 데 이는 식 17의 역수의 절댓값에 상용로그를 취하면 없어져서 Fig.18과 같이 안정된 그래프를 얻을 수 있고 식은 다음과 같다.

$$\log_{10} \left( \frac{1}{\text{Det}(H(w)) \cdot \prod_{k=1}^{N_s} \prod_{j=1}^{S_k} ((w_j^k)^2 - w^2)} \right) = \text{Peak} \quad (20)$$

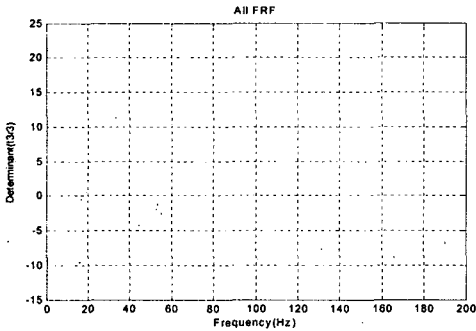


Fig. 14 Determinant using all frf

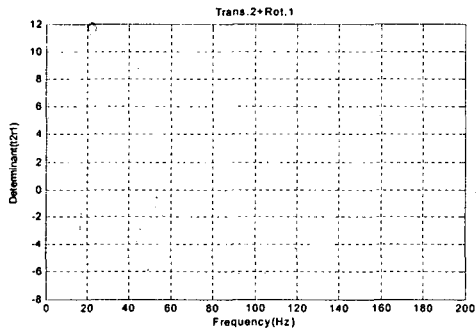


Fig. 15 Determinant using 3dof (trans. x,y rot.  $\theta_z$ )

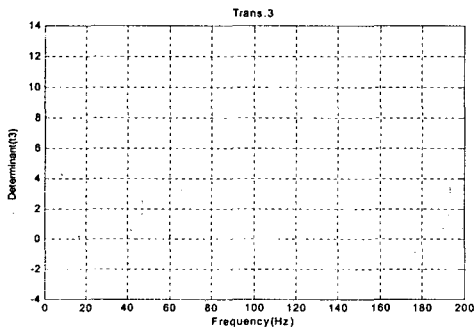


Fig. 16 Determinant using 3dof (trans. x,y,z)

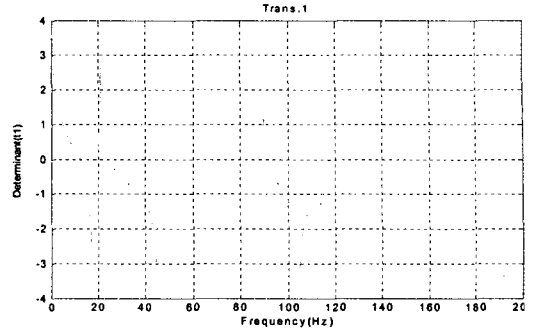


Fig. 17 Determinant using 1dof (trans. x)

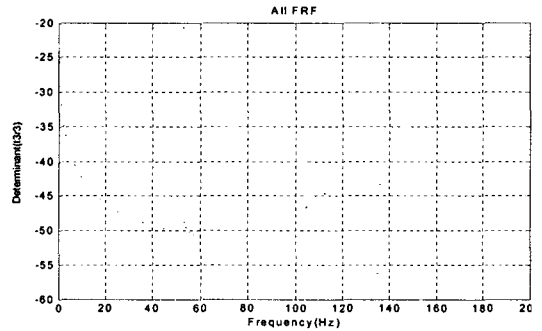


Fig. 18 Modified determinant using all frf

## 4.2 감쇠의 영향

지금까지 감쇠가 없는 구조물의 전달함수를 이용하여 고유진동수를 추정하였다. 하지만 일반적인 구조물에서는 감쇠가 존재하며 감쇠가 있을 경우 행렬식은 실수와 허수로 나누어서 나오게 되므로 행렬식 (16)은 적용을 할 수 없지만, 제안한 식 (18)는 감쇠가 있는 경우에도 고유진동수를 찾을 수 있다. 또한 실험에서 측득된 전달함수를 사용할 경우 감쇠가 포함되어 있으므로 식 (16)을 사용하려면 감쇠가 없는 전달함수를 다시 계산하여야 하는 어려움이 있다.<sup>(3)</sup> 또한 이 경우 저차 몇 개의 모드만 사용하므로 모드자름 오차가 발생하게 된다. 제안된 행렬식인 식(19)를 사용하여 감쇠가 있는 경우 고유진동수를 추정한 경우에도 Fig.19 와 같이 변경 구조물의 고유진동수를 정확하게 추정할 수 있다. 변경전 구조물의 고유진동수 부근에서 발생하는 불안정성을 없애기 위해 사용한 식(20)을 사용하여 고유진동수를 추정한 것은 Fig.20 과 같이 오히려 변경전 구조물의 고유진동수 부근에서 피크가 나타난다. 따라서 실험으로 변경된 구조물의 고유진동수를 추정할 경우 식 (19)를 사용하는 것이 좋다.

## 참고문헌

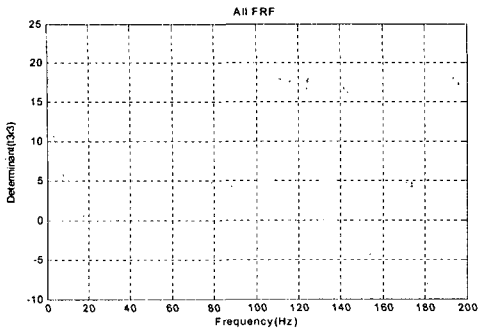


Fig. 19 Determinant with damping

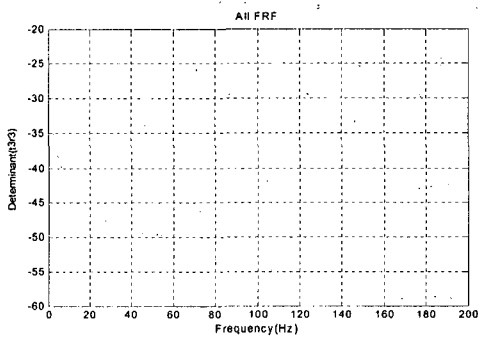


Fig. 20 Modified determinant with damping

## 5. 결론

본 과제를 통해 보강 전 구조물의 계측한 전달 함수와 보강재 전달함수를 이용하여, 보강 후 구조물의 진동특성을 예측하는 방법을 정리하였고, 수치해석 및 실험모델을 제작하여 검증하였다. 기존의 힘모드 방정식에서 고유진동수를 추정시 사용하는 행렬식의 탐색이 어렵기 때문에 다른 행렬식을 제안하여 그래프상에서 변경구조물의 고유진동수를 찾을 수 있도록 하였고 감쇠가 있는 전달함수에도 쉽게 이용할 수 있도록 하였다.

- (1) 박윤식, 구조물 동특성 연구 분야 및 동향, 한국 소음진동공학회지, 제 9 권 3 호, pp457-460, 1999
- (2) 박용화, 1999, 주파수 응답 함수 결합을 이용한 최적 구조 변경법 및 응용, 학국과학기술원 박사학위논문, 1999
- (3) 변성준, 주파수 응답함수 결합법을 이용한 승용차 핸들지지 T 빔의 진동 저감 재설계, 한국 소음진동공학회 논문집, 11 권 5 호, pp123-130, 2001.
- (4) 정재훈, 다중전달함수 합성법을 이용한 구조물의 동특성해석, 한국 소음진동공학회지 제 8 권 1 호, pp. 139-145, 1998.
- (5) Pater Avitabile, Twenty years of structural dynamic modification, Sound and vibration, January, 2003