한국소음진동공학회 2005년도 춘계학술대회논문집, pp.117~119.

부분 구조물 합성으로 이루어진 고유치 문제 해석

Partitioned structural eigenvalue analysis

정 의 일*·나 혜 중**·노 석 홍***·전 두 환****
Jung Eui Il, Na Hye Joong, No Suk Hong and Chun Du Hwan

Key Words : Eigenvalue(고유치), Partitioned Sstructure(부분 구조물)

ABSTRACT

For large structural eigen-analysis, the whole structure is divided into some partitioned structures and through synthesis of partitioned structural model the eigen-data of structure can be obtained. In that case, eigenvalue problem consists of semidefinite mass matrix form because of displacement constraint condition. In this work the eigenvalue problem is considered by means of several method, determinant search and null space reduction method.

1. 서 론

크고 복잡한 구조물의 동적 특성을 계산하는 경우에 있어서 계산의 편리성과 효율성을 위해 전체 구조물을 작은 부분 구조물로 나누어, 부분 구조물의 해석을 통해 전체 구조물의 특성을 파악하는 방법이 연구되어 왔다. 전체 구조물의 자유도는 상당히 커서 전체 구조물의 동적 특성을 계산하기에는 계산 성능에 많은 부하가 작용할 수 있다. 그 대안으로 전체 구조물을 작은 부분 구조물로 나누어, 각각의 부분 구조물의 동적 특성 해석을 통해서 전체 구조물의 특성을 파악하는 것이 계산 성능에 부하를 적게 줄 수 있으며, 전체 구조물 중 일부분이 변경되었을 경우 전체 구조물을 다시 해석할 필요가 없이, 변경된 부분 구조물만 재해석을 수행함으로써 전체 구조물의 특성을 파악할 수 있는 장점이 있다.

이와 같이 전체 구조물을 작은 부분 구조물로 나누어 합성하는 경우, 경계 변위 구속 조건은 라그랑지 승수를 사용하여 구속시키며, 이때 발생하기 쉬운 구속 조건의 과도성을 피하기 위해 Park 은 기준 변위를 통해 경계 변위를 구속시키는 시도를 하기도 하였다[1]. 합성된 구조물의 고유치 문제는 부분 구조물에 작용하는 힘 평형 방정식과 변위 구속 조건 그리고 내력의 평형 방정식으로 구성되며, 질량 행렬이 비정칙 행렬로 표현된다.

본 연구에서는 합성된 구조물의 고유치 문제가 비정칙 행렬로 표현됨을 알아보고, 이를 해결하기 위한 여러가지 고유치 해결 방법중 행렬식 탐색법과 영공간 축소법을 이용한 고유치 문제 해결에 대해 살펴보겠다.

* 한국섬유기계연구소 인증시험팀
E-mail : jung_ei@kotmi.re.kr
Tel : (053) 819-3060, Fax : (053) 819-3119

** 한국섬유기계연구소 인증시험팀 연구원

*** 한국섬유기계연구소 연구 실장

*** 한국섬유기계연구소 소장

2. 본 론

2.1 부분 구조 합성을 이용한 고유치 문제

그림 1 의 좌측과 같은 구조물을 해석하기 위해서 전체 구조물을 3 개의 부분 구조물로 분해하여 합성하는 경우를 살펴보자. 부분 구조물의 합성은 구조물의 경계 사이에 경계 기준면(interface frame)을 만들고 이 경계 기준면에 부분 구조물의 경계 변위를 일치시키므로 해서 구조물을 합성할 수 있다. 전체 구조물의 지배 방정식을 세우기 위해 해밀턴의 원리와 경계 결합 조건식을 함께 사용하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\delta\int_{t_1}^{t_2}(T-V+\Pi_\lambda)dt=0 \tag{1}$$

여기서

$$\Pi_\lambda=\sum_{s=1}^{s=n_s}\int_{\Gamma^{(s)}}\bar{\lambda}^{(s)T}(\bar{u}^{(s)}-\bar{u}^{f})\,d\Gamma \tag{2}$$

을 나타낸다. n_s 는 부분 구조물의 개수를 나타내며, $\bar{u}^f$는 가상의 경계 기준면의 변위를 나타낸다. $\bar{\lambda}^{(s)}$는 라그랑지 승수를 나타낸다. 변위를 적당한 형상 함수로 이산화하면 다음과 같이 된다.

$$\bar{u}^{(s)}=N_u^{(s)}u^{(s)},\ \bar{\lambda}^{(s)}=N_\lambda^{(s)}\lambda^{(s)},\ \bar{u}_f=N_f u_f \tag{3}$$

여기서 $N_u^{(s)}$, $N_\lambda^{(s)}$, N_f은 각각 부분 구조물의 변위 함수, 라그랑지 승수의 형상 함수, 경계 기준

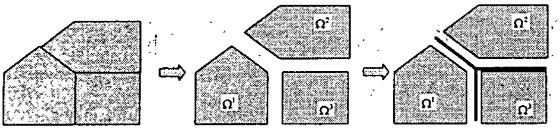

그림 1. 부분 구조물 합성

면의 형상 함수이다. 위의 이산화 과정을 통해서 식(1)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_{s=1}^{s=N_s} \left(\frac{1}{2}\dot{u}^{(s)T} M^{(s)} \dot{u}^{(s)T} - \frac{1}{2} u^{(s)T} K^{(s)} u^{(s)T} + f^{(s)T} u^{(s)T} + \lambda^{(s)T} C^{(s)} u^{(s)} - \lambda^{(s)T} C_f^{(s)} u_f^{(s)}\right) dt = 0$$

$$C^{(s)} = \int_{\Omega^s} N_\lambda^T N_u d\Gamma,\ C_f = \int_{\Gamma^{(s)}} N_\lambda^T N_f d\Gamma \tag{4}$$

식(4)로부터 적분항의 미소 변화량을 영으로 취하면 다음과 같이 이산화된 지배 방정식을 세울 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{u}} \\ \ddot{\boldsymbol{\lambda}} \\ \ddot{\mathbf{u}}_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{-C}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{-C} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_f \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_f^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{u}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{5}$$

여기서 M, K와 C는 전체 구조물의 질량 행렬, 강성 행렬, 연결 행렬로써 각 부분 구조물의 행렬값이 대각 성분에 위치한다.

합성된 구조물의 고유치 문제는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{-B}^T & \mathbf{0} \\ \mathbf{-B} & \mathbf{0} & \mathbf{C}_f \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_f^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{u}_f \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{u}_f \end{bmatrix} \tag{6}$$

식(6)을 $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{x} = \nu\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{x}$ 로 표현하자. $\tilde{\mathbf{B}}$ 행렬이 비정칙 행렬(singular)인 특징이 있다.

2.2 행렬식 탐색법

행렬식 탐색법은 고유치 문제의 행렬식을 영으로 만드는 근을 탐색함으로써 합성된 구조물의 고유치를 찾는 단순한 방법을 말하며, Simpson 이 연구한 바 있다[2]. 행렬식 탐색법은 질량 행렬이 비정칙 행렬로 표현되더라도 사용할 수 있으며, 행렬식을 계산하는 손쉬운 방법으로 널리 사용되고 있다.

전체 구조물의 절점 수는 보통 경계 절점의 수보다 많으므로, 위 식의 크기를 줄이기 위해서 식(6)의 첫 번째 행으로부터 $\mathbf{u}$을 구하면 다음과 같다.

$$\mathbf{u} = \mathbf{H}(\omega)\mathbf{B}^T\boldsymbol{\lambda} \tag{7}$$

식 (7)을 식 (6)에 넣고 정리하면 다음과 같이 축소된 특성 방정식을 얻을 수 있다.

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{H}_{bb}(\omega) & \mathbf{C}_b \\ \mathbf{C}_f^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{u}_f \end{bmatrix} = E(\omega) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{u}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{8}$$

여기서 밑 첨자 bb 는 구조물의 경계 자유도를 의미하며, $\mathbf{H}_{bb}(\omega) = \mathbf{C}\mathbf{H}(\omega)\mathbf{C}^T$ 는 부분 구조물의 경계 자유도에 대한 주파수 응답 함수를 대각 성분으로 하는 대각 행렬이다. 합성된 구조물의 자유진동에 대한 고유 진동수 ω_r 는 다음과 같이 식(8)의 행렬식이 영이 되어야 함을 이용한다. 그러나, 실제로 행렬식 탐색법으로 고유 진동수를 찾고자 할 때, 합성되기 전의 고유치 부근에서 수치적으로 불안정한 모습을 보인다. Yee 와 Tsuei 는 수치적 불안정성을 피하기 위해 다음과 같이 수정된 특성 방정식을 제안하기도 하였다[3].

$$\det E(\omega) \Pi_{i=1}^{n_s} \Pi_{j=1}^{n_m} (\omega_{ij}^2 - \omega^2) = 0 \tag{9}$$

여기서, ω_{ij} 는 i 번째 부분 구조물이 합성되기 전의 j 번째 고유 진동수이며, n_m 은 i 번째 부분 구조물의 관심있는 영역에서 모우드 개수를 나타낸다. r 번째 고유 진동수 ω_r 를 구한 후, 모우드 형상은 식 (8)의 영공간(null space)으로부터 구할 수 있다.

축소된 고유치 방정식을 살펴보면, 합성된 구조물의 고유 진동수를 알아내기 위해서는 부분 구조물의 경계 자유도에서 구한 주파수 응답 함수를 이용하고 있음을 보여주고 있다. 고유치 방정식에 사용되는 주파수 응답함수를 실험에서 구한다면, 모델링에 사용되는 시간을 절약하고 모델 개선과 같은 과정이 필요없는 정확한 데이타를 얻을 수 있는 장점이 있다. 실험에서 구한 데이타를 사용할 때의 단점은, 실험 에러가 들어가서 직접 사용하기에 어렵다는 것이다. 실험에서 구한 주파수 응답 함수로부터 모달 해석을 통해 모우드 형상과 고유 진동수를 구하여 재생성된 주파수 응답 함수를 사용하는 것이 보다 효과적인 방법이 될 수 있다. 또한, 행렬식 탐색법은 고유치를 계산하기 위해 행렬식의 값을 조사하는 것인데, 행렬식의 값은 행렬의 각 요소를 곱해서 계산되므로 요소의

값에 따라 행렬식의 값의 변화가 심하여 로그 값으로 표현하든가 행렬의 크기를 일정하게 유지하기 위한 정규화 과정이 추가로 필요하겠다.

2.3 영공간 축소법을 이용한 고유치 문제

축소법을 통한 고유치 문제는, 벡터 공간을 구속 조건식을 만족하는 공간으로 축소시킴으로써 정칙 행렬(nonsingular matrix)을 비정칙 행렬(singular)로 만드는데 핵심이 있다. Ohayon 는 특이치 분해(singular value decomposition)를 이용하여 벡터 공간을 축소하기도 하였다[4]. 여기서는 두 번의 벡터 공간 축소를 통해 일반적인 고유치 문제로 전환하는 방법을 알아보겠다.

식(6)과 같은 고유치 문제가 있을 때, $\mathbf{u}_f$ 을 소거하기 위해, λ 를 $\mathbf{C}_f^T$ 의 영공간을 만족하도록 다음과 같이 치환한다.

$$\boldsymbol{\lambda} = N_{C_f}\,\boldsymbol{\lambda}_f,\; N_{C_f} = Null(\mathbf{C}_f^T) \tag{10}$$

(10)을 식(6)에 대입하면 다음과 같은 식을 구할 수 있다.

$$\omega^2\begin{bmatrix}\mathbf{M} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ \boldsymbol{\lambda}_f\\ \mathbf{u}_f\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{K} & -\mathbf{B}^T\mathbf{N}_{C_f} & \mathbf{0}\\ -\mathbf{N}_{C_f}^T\mathbf{B} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_{C_f}^T\mathbf{C}_f\\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_f^T\mathbf{N}_{C_f} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ \boldsymbol{\lambda}_f\\ \mathbf{u}_f\end{bmatrix} \tag{11}$$

위 영공간 연산자 N_{C_f} 는 $\mathbf{C}_f$ 에 대하여 다음과 같은 식을 만족함을 알 수 있다.

$$C_f^T\mathbf{N}_{C_f} = 0 \tag{12}$$

그러므로 식 (11)은 다음과 같이 $\mathbf{u}$ 와 λ_f 에 관한 식으로 줄일 수 있다.

$$\omega^2\begin{bmatrix}\mathbf{M} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ \boldsymbol{\lambda}_f\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{K} & -\mathbf{B}^T\mathbf{N}_{C_f}\\ -\mathbf{N}_{C_f}^T\mathbf{B} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}\\ \boldsymbol{\lambda}_f\end{bmatrix} \tag{13}$$

λ_f 를 소거하기 위해 $\mathbf{u}$ 를 다음과 같이 치환한다.

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}_{C_b}\underline{\mathbf{u}},\quad \mathbf{N}_{C_b} = Null(\mathbf{N}_{C_f}^T\mathbf{B}) \tag{14}$$

식(14)을 식(13)에 대입하면 다음과 같은 식을 구할 수 있다.

$$\omega^2\begin{bmatrix}\mathbf{N}_{C_b}^T\mathbf{M}\mathbf{N}_{C_b} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{\mathbf{u}}\\ \boldsymbol{\lambda}_f\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{N}_{C_b}^T\mathbf{K}\mathbf{N}_{C_b} & -\mathbf{N}_{C_b}^T\mathbf{B}^T\mathbf{N}_{C_f}\\ -\mathbf{N}_{C_f}^T\mathbf{B}\,\mathbf{N}_{C_b} & \mathbf{0}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\underline{\mathbf{u}}\\ \boldsymbol{\lambda}_f\end{bmatrix} \tag{15}$$

위의 영공간 연산자 N_{C_b} 는 다음과 같은 식을 만족함을 알 수 있다.

$$\mathbf{N}_{C_f}^T\mathbf{B}\,\mathbf{N}_{C_b} = 0 \tag{16}$$

그러므로 식(15)는 다음과 같이 $\underline{\mathbf{u}}$ 에 관한 식으로 줄일 수 있다

$$\omega^2\mathbf{M}_u\underline{\mathbf{u}} = \mathbf{K}_u\underline{\mathbf{u}},\ \mathbf{M}_u = \mathbf{N}_{C_b}^T\mathbf{M}\mathbf{N}_{C_b}\,and\,\mathbf{K}_u = \mathbf{N}_{C_b}^T\mathbf{K}\mathbf{N}_{C_b} \tag{17}$$

이와 같이 두 번의 영공간 축소를 통하여 비정칙 행렬인 고유치 문제를 정칙 행렬로 전환할 수 있다. 그러나, 축소법을 통한 해석은 일반적인 고유치 문제로 전환이 가능하다는 장점이 있지만, 행렬의 밴드(band) 특성을 상실하는 약점이 있다 그러므로 행렬의 밴드(band) 특성을 유지하면서 고유치를 해결할 수 있는 방법과 연동해서 해석함이 필요하겠다.

3. 결 론

일반적인 고유치 문제와 달리 질량 행렬이 비정칙 행렬이 되는 특징이 있었으며, 이 문제를 해결하는 방법으로 행렬식 탐색법, 영공간을 통한 축소법을 살펴보았다. 행렬식 탐색법은 이론이 단순하여 쉽게 접근할 수 있는 장점이 있지만, 행렬의 크기에 따라 행렬식 값의 변화가 심한 단점이 있었으나, 경계 절점의 개수가 적은 경우에는 효과적으로 사용할 수 있었다. 축소법을 통한 해결방법은 두번의 영공간 축소를 통하여 비정칙 행렬을 정칙 행렬로 전환할 수 있었으나, 행렬의 밴드 특성을 상실하는 약점이 있었다.

참 고 문 헌

(1) Park, K. C. and Felippa, C. A.,2000, A Variational Principle for The Formulation of Partitioned Structural Systems International Journal for Numerical Methods in Engineering, 47, pp.395-418.

(2) A. Simpson, A., 1973, Kron's method: A Consequence of the minimization of the Primitive Lagrangian in the Presence of Displacement Constraints, Journal of Sound and Vibration, 27(3), pp. 377-386.

(3) Yee, E. K. and Tsuei, Y. G,1989, Direct Component Modal Synthesis Technique for System Dynamic Analysis, AIAA Journal, Vol. 27, No. 8, pp. 1083-1088, August.

(4) Ohayon , R., Sampaio, R. and Soize, C., Dynamic Substructuring of damped structures using singular value decomposition, Transaction of the ASME, Vol.64, JUNE, pp. 292-298.