한국소음진동공학회 2005년도 춘계학술대회논문집, pp. 59~ 68.

회전기계의 진동저감을 위한 자동볼평형장치

2005. 05

정 진 태
(한양대학교)

회전기계의 진동저감을 위한 자동볼평형장치

Automatic Ball Balancer for Vibration Reduction of Rotating Machines

정 진 태*

Jintai Chung

Key Words : Rotor Vibration (회전체 진동), Automatic Ball Balancer (자동 볼 평형장치), Dynamic Stability (동적 안정성), Perturbation Method (섭동법), Time Integration (시간적분법)

ABSTRACT

In this study, we establish a theory for dynamic behaviors of an automatic ball balancer, analyze its dynamic characteristics, and provide its design guide line. Equations of motion are derived by using the polar coordinate system instead of the rectangular coordinate system which was previously used in other researches. After non-dimensionalization of the equations, the perturbation method is applied to locate the equilibrium positions and to obtain the linearized equations of motion around the equilibrium positions. The Eigenvalue problem is used to verify the dynamic stability around the equilibrium positions. On the other hand, the time responses are computed from the nonlinear equations of motion by using a time integration method.

1. 서 론

자동 볼 평형장치는 자동차, 공작기계, 세탁기, 인공위성과 같이 가변적인 질량 불평형이 진동의 주된 원인이 되는 회전체의 질량 불평형을 자동적으로 제거하는 장치이다. 질량 불평형이 운전조건에 대해 일정한 회전체는 1 회의 밸런싱을 하면 되지만, 질량 불평형이 사용조건에 따라 변하는 회전체에 대해서는 1 회의 밸런싱으로 소기의 성과를 얻을 수 없다. 따라서 이러한 가변적인 질량 불평형을 갖는 회전체에 자동 볼 평형장치를 장착하면 회전체의 진동을 감소시킬 수 있다.

자동 볼 평형장치의 넓은 응용분야에도 불구하고 작동원리, 동적해석 및 설계방향 제시가 매우 미미한 실정이다. Thearle[1]는 자동 볼 평형장치에 볼을 유체로 대체했을 때 밸런싱을 할 수 없음을 지적하였다. 그리고 Alexander[2]는 자동 볼 평형장치의 이론적 분석결과를 발표하였는데, 편심이 있는 회전체의 기동상태에서 초기 불평형이 자동 볼 평형장치의 볼에 의해서 감소됨을 보였다. 그러나 어떠한 원리로 자동 볼 평형장치가 자동적으로 평형상태에 도달하는지에 대한 분석을 제시하지 않았다. Cade[3]는 자동 볼 평형장치의 작동조건을 제시하였는데, 역시 이에 대한 근거가 명확하지 않다. Lee 와 Moorhem[4]은 자동 볼 평형장치의 작동원리를 해석적인 방법으로 설명하였다. 이 연구에서 직교좌표계를 이용하여 자동평형원리의 일부를 규명하였으나 통일적인 이론적 근거를 제시하지 못하였다. 이들은 자동 볼 평형장치의 중심점의 좌표를 직교좌표계로 표시하여 운동방정식을 유도하였기 때문에 모든 평형위치를 고려할 수 없었다.

본 연구의 목적은 자동 볼 평형장치의 작동원리에 대한 이론정립, 자동 볼 평형장치의 동

* 한양대학교 공학대학 기계공학과

특성 규명, 그리고 자동 볼 평형장치의 설계기준 확립에 있다. 이를 위해 기존의 직교좌표계를 이용하는 방법 대신 극좌표계를 이용하여 얻어진 운동방정식을 무차원화하고, 섭동법을 적용하여 평형위치와 평형위치 부근에서 선형화된 운동방정식을 구하였다. 그리고 고유치문제에 의해 각 평형위치에서 동적 안정성을 검증하며, 이와 동시에 볼의 질량, 축계의 질량, 감쇠와 강성, 그리고 회전수가 진동과 안정성에 끼치는 영향을 고찰하였다. 다음 명시적 시간적분법을 이용하여 비선형 운동방정식으로부터 자동 볼 평형장치의 시간응답을 구해 평형위치, 동적 안정성을 검증하였다.

2. 운 동 방 정 식

자동 볼 평형장치는 Fig. 1 에 도시된 것 처럼 Jeffcott 로터에 레이스를 파고 레이스 안에 여러 개의 볼들이 자유롭게 회전할 수 있는 구조를 하고 있다. 회전속도가 ω 인 회전체의 도심의 좌표를 Fig. 2 와 같이 r 과 θ 로 표시하고, 회전체 질량중심의 위치는 편심량 ε 과 X 축으로부터의 각도 ωt 로 나타낼 수 있다. 그리고 각 볼의 위치는 회전체의 도심과 질량중심을 잇는 직선을 기준으로 반시계방향으로 측정된 각도 ϕ_i (단, $i = 1, 2, \cdots, n$, n 은 볼의 개수), 레이스의 반경 R 로 정의 할 수 있다. 이와 같은 극좌표의 선정은 회전체의 도심을 직교좌표계의 X 와 Y 로 표현한 기존 연구자들의 한계를 극복할 수 있는 장점이 있다.

운동방정식은 Lagrange 방정식으로 유도된다. 즉,

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k}\right] - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial U}{\partial q_k} = Q_k^{nc}$$

$$k = r, \theta, \phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_n \qquad (1)$$

여기서 T 는 운동에너지, U 는 위치에너지, Q_k^{nc} 는 일반화된 비보존력이며, 일반좌표 q_k 는 $r, \theta, \phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ 을 나타낸다. 따라서 볼의 개수가 n 이라면 $n+2$ 개의 운동방정식이 얻어진다.

운동에너지를 구하기 위해 회전체 질량중심과 각 볼의 선속도와 회전체의 각속도를 구할 필요가 있다. 볼의 반경이 회전체의 반경에 비해 일반적으로 매우 작기 때문에 볼 중심에 대한 볼의 질량관성모멘트를 무시하면, 자동 볼 평형장치의 운동에너지를 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$T = \frac{1}{2} I_G \omega^2 + \frac{1}{2} M \dot{\mathbf{r}}_G \cdot \dot{\mathbf{r}}_G + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{r}}_{B_i} \cdot \dot{\mathbf{r}}_{B_i} \qquad (2)$$

여기서 I_G, M 그리고 m 은 각각 회전체의 질량중심에 대한 질량관성모멘트, 회전체의 질량, 그리고 볼의 질량을 나타내며, $\mathbf{r}_G$ 는 회전체의 질량중심에 대한 위치벡터를, $\mathbf{r}_{B_i}$ 는 볼의 위치벡터를 나타낸다. 즉,

$$\mathbf{r}_G = [r + \varepsilon \cos(\omega t - \theta)]\mathbf{e}_r + \varepsilon \sin(\omega t - \theta)\mathbf{e}_\theta \qquad (3)$$

$$\mathbf{r}_{B_i} = [r + R\cos(\phi_i + \omega t - \theta)]\mathbf{e}_r + R\sin(\phi_i + \omega t - \theta)\mathbf{e}_\theta \qquad (4)$$

위치에너지는 중력의 영향을 무시하면

$$U = \frac{1}{2} k r^2 \qquad (5)$$

로 표시되는데, k 는 축계의 상당강성을 표시한다. 한편, 축계의 감쇠계수를 c 라 하고, 레이스 안의 윤활유의 점성계수를 D 라 하면 비보존력은 다음으로 쓸 수 있다.

$$Q_r^{nc} = c\dot{r},\ Q_\theta^{nc} = cr^2\dot{\theta},\ Q_{\phi_i}^{nc} = D\dot{\phi}_i \qquad (6)$$

식 (2), (5)와 (6)을 식 (1)에 대입하면 $n+2$ 개의 비선형 운동방정식이 다음과 같이 얻어진다.

$$(M+nm)(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) + c\dot{r} + kr - mR\sum_{i=1}^{n}[\ddot{\phi}_i \sin(\phi_i + \omega t - \theta) + (\dot{\phi}_i + \omega)^2 \cos(\phi_i + \omega t - \theta)] = M\varepsilon\omega^2 \cos(\omega t - \theta) \qquad (7)$$

$$(M+nm)(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) + cr\dot{\theta} + mR\sum_{i=1}^{n}[\ddot{\phi}_i \cos(\phi_i + \omega t - \theta) - (\dot{\phi}_i + \omega)^2 \sin(\phi_i + \omega t - \theta)] = M\varepsilon\omega^2 \sin(\omega t - \theta) \qquad (8)$$

$$mR^2\ddot{\phi}_i + D\phi_i + mR(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\cos(\phi_i + \omega t - \theta) + mR(r\dot{\theta}^2 - \ddot{r})\sin(\phi_i + \omega t - \theta) = 0$$

$$\text{for } i = 1, 2, \cdots, n \qquad (9)$$

해석을 용이하게 하고 섭동법을 적용하기 위해서, 식 (7)-(9)로 주어진 운동방정식을 무차원화 시킨다. 각 변수에 대한 무차원수를 $\tilde{r} = r/R$, $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon/R$, $\tilde{m} = m/M$, $\tilde{t} = \omega_n t$, $\tilde{\omega} = \omega/\omega_n$ 로 정의하였다. 여기서 ω_n 은 축계의 고유진동수로 $\omega_n = \sqrt{k/M}$ 로 표현된다. 무차원수를 사용하여 운동방정식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$(1+n\tilde{m})\left[\ddot{\tilde{r}} - \tilde{r}(\tilde{\omega}-\dot{\psi})^2\right] + 2\zeta\dot{\tilde{r}} + \tilde{r} - \tilde{m}\sum_{i=1}^{n}\left[\ddot{\phi}_i \sin(\phi_i+\psi) + (\dot{\phi}_i+\tilde{\omega})^2\cos(\phi_i+\psi)\right] = \tilde{\varepsilon}\tilde{\omega}^2\cos\psi \quad (10)$$

$$(1+n\tilde{m})\left[-\tilde{r}\dot{\psi} + 2\dot{\tilde{r}}(\tilde{\omega}-\dot{\psi})\right] + 2\zeta(\tilde{\omega}-\dot{\psi}) + \tilde{m}\sum_{i=1}^{n}\left[\ddot{\phi}_i\cos(\phi_i+\psi) - (\dot{\phi}_i+\tilde{\omega})^2\sin(\phi_i+\psi)\right] = \tilde{\varepsilon}\tilde{\omega}^2\sin\psi \quad (11)$$

$$\ddot{\phi}_i + \left[2\dot{\tilde{r}}(\tilde{\omega}-\dot{\psi}) - \tilde{r}\ddot{\psi}\right]\cos(\phi_i+\psi) + \left[\tilde{r}(\tilde{\omega}-\dot{\psi})^2 - \ddot{\tilde{r}}\right]\sin(\phi_i+\psi) + \beta\dot{\phi}_i = 0$$

for $i = 1, 2, \cdots, n$ (12)

여기서 각 변수 위의 점은 무차원화된 시간 $\tilde{t}$ 에 대한 미분을 나타내며,

$$\psi \equiv \omega t - \theta \quad (13)$$

$$\zeta = \frac{c}{2\sqrt{kM}}, \quad \beta = \frac{D}{m\omega_n R^2} \quad (14)$$

식 (13)과 같이 $\omega t - \theta$ 를 ψ 로 정의하면, 비독립계(non-autonomous system)인 식 (7)-(9)가 독립계(autonomous system)인 식 (10)-(12)로 변환되어 지배방정식에 시간이 명시적으로 나타나는 항이 존재하지 않는다. 기존의 연구는 직교좌표계를 이용하여 지배방정식을 유도하였기 때문에, 비독립계인 지배방정식을 독립계로 변환이 불가능하였다. 이로 인해 기존의 연구에서 안정성 해석을 위해 번거롭고 계산시간이 많이 들며 해석에 많은 한계를 갖는 Floquet 이론의 적용이 불가피하였다.

3. 평형위치와 섭동방정식

평형위치와 평형위치 부근에서 선형화된 섭동방정식을 얻기 위해 본 연구에서는 섭동법(perturbation method)를 적용하였다. 변수 $\tilde{r}$, ψ 와 ϕ_i 를 평형위치 $\tilde{r}_0$, ψ_0 와 ϕ_{0i} 에 대하여 다음과 같이 급수 형태로 표현할 수 있다.

$$\tilde{r} = \tilde{r}_0 + \delta\tilde{r}_1 + O(\delta^2) \quad (15)$$

$$\psi = \psi_0 + \delta\psi_1 + O(\delta^2) \quad (16)$$

$$\phi_i = \phi_{0i} + \delta\phi_{1i} + O(\delta^2) \quad \text{for } i = 1, 2, \cdots, n \quad (17)$$

여기서 δ 는 매우 작은 양을 나타내는 인수이며 $\tilde{r}_1$, ψ_1 와 ϕ_{1i} 는 각각 $\tilde{r}$, ψ 와 ϕ_i 에 대한 평형위치에서 섭동된 양이다.

식 (15)-(17)를 무차원화된 운동방정식 (10)-(12)에 대입하여 δ 에 관하여 정리하면 평형위치에 관한 방정식과 평형위치 부근에서 선형화된 섭동방정식을 얻게 된다. 평형위치를 나타내는 관계식은 다음과 같다.

$$\left[1-(1+n\tilde{m})\tilde{\omega}^2\right]\tilde{r}_0 - \tilde{m}\tilde{\omega}^2\sum_{i=1}^{n}\cos(\phi_{0i}+\psi_0) = \tilde{\varepsilon}\tilde{\omega}^2\cos\psi_0 \quad (18)$$

$$2\zeta\tilde{r}_0\tilde{\omega} - \tilde{m}\tilde{\omega}^2\sum_{i=1}^{n}\sin(\phi_{0i}+\psi_0) = \tilde{\varepsilon}\tilde{\omega}^2\sin\psi_0 \quad (19)$$

$$\tilde{r}_0\tilde{\omega}^2\sin(\phi_{0i}+\psi_0) = 0 \quad (20)$$

그리고 섭동방정식은 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$(1+n\tilde{m})(\ddot{\tilde{r}}_1 + 2\zeta\tilde{r}_0\tilde{\omega}\dot{\psi}_1 - \tilde{\omega}^2\tilde{r}_1) + 2\zeta\dot{\tilde{r}}_1 + \tilde{r} - \tilde{m}\sum_{i=1}^{n}[\ddot{\phi}_{1i}\sin(\phi_{0i}+\psi_0) + 2\tilde{\omega}\cos(\phi_{0i}+\psi_0) - \tilde{\omega}^2(\phi_{1i}+\psi_1)\sin(\phi_{0i}+\psi_0)] = -\tilde{\varepsilon}\tilde{\omega}^2\psi_1\sin\psi_0 \quad (21)$$

$$(1+n\tilde{m})(2\tilde{\omega}\dot{\tilde{r}}_1 - \tilde{r}_0\ddot{\psi}_1) + 2\zeta(-\tilde{r}_0\dot{\psi}_1 + \tilde{\omega}\tilde{r}_1) + \tilde{m}\sum_{i=1}^{n}[\ddot{\phi}_{1i}\cos(\phi_{0i}+\psi_0) - 2\tilde{\omega}\sin(\phi_{0i}+\psi_0) - \tilde{\omega}^2(\phi_{1i}+\psi_1)\cos(\phi_{0i}+\psi_0)] = \tilde{\varepsilon}\tilde{\omega}^2\psi_1\cos\psi_0 \quad (22)$$

$$\ddot{\phi}_{1i} + \beta\dot{\phi}_i + \left[2\tilde{\omega}\dot{\tilde{r}}_1 - \tilde{r}_0\ddot{\psi}_1 + \tilde{r}_0\tilde{\omega}^2(\phi_{1i}+\psi_1)\right]\cos(\phi_{0i}+\psi_0) + (-2\tilde{r}_0\tilde{\omega}\dot{\psi}_1 + \tilde{\omega}^2\tilde{r}_1 - \ddot{\tilde{r}}_1)\sin(\phi_{0i}+\psi_0) = 0 \quad (23)$$

평형위치를 자동 볼 평형장치가 밸런싱의 목적을 달성하는 경우($\tilde{r}_0 = 0$)와 달성하지 못하는 경우($\tilde{r}_0 \neq 0$)경우의 두 가지로 구분할 수 있

다. 먼저 $\tilde{r}_0 = 0$ 일때 평형위치를 다음과 같이 간단하게 표현할 수 있다.

$$\tilde{r}_0 = 0 \tag{24}$$

$$\tilde{m}\sum_{i=1}^{n}\cos\phi_{0i} + \tilde{\varepsilon} = 0 \tag{25}$$

$$\tilde{m}\sum_{i=1}^{n}\sin\phi_{0i} = 0 \tag{26}$$

한편, $\tilde{r}_0 \neq 0$ 일 때의 평형위치는 다음 식으로 정의된다.

$$\tilde{r}_0 = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - AC}}{A} \tag{27}$$

$$\psi_0 = \sin^{-1}\left(\frac{2\zeta\,\tilde{r}_0\tilde{\omega}}{\tilde{\varepsilon}\,\tilde{\omega}^2}\right) \tag{28}$$

$$\phi_{0i} = -\psi_0 \tag{29}$$

여기서,

$$A = \left[1-(1+n\tilde{m})\tilde{\omega}^2\right]^2 + (2\zeta\tilde{\omega})^2 \tag{30}$$

$$B = -\left[1-(1+n\tilde{m})\tilde{\omega}^2\right]n\tilde{m}\tilde{\omega}^2 \tag{31}$$

$$C = (n\tilde{m}\tilde{\omega}^2)^2 - (\tilde{\varepsilon}\tilde{\omega}^2)^2 \tag{32}$$

4. 동적 안정성 분석

평형위치 부근에서 선형화하여 얻어진 섭동방정식인 식 (21)–(23)은 평형위치가 결정되면, 계수가 상수인 2 차 상미분방정식이 되며 행렬-벡터 방정식으로 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{a}\ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{b}\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{c}\mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{33}$$

여기서 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 와 $\mathbf{c}$ 는 $(n+2)\times(n+2)$ 상수 행렬이며,

$$\mathbf{x} = \{\,\tilde{r}_1,\ \psi_1,\ \phi_{11},\ \phi_{12},\ \cdots,\ \phi_{1n}\,\} \tag{34}$$

식 (33)의 해를

$$\mathbf{x} = \mathbf{X}e^{\lambda t} \tag{35}$$

라고 가정하여 식 (33)에 대입하면 복소고유치문제를 얻을 수 있다. 복소고유치문제를 풀어 고유치 λ 의 실수부가 음수인지 양수인지로 자동볼 평형장치의 동적 안정성을 판별할 수 있다. 만약 λ 의 실수부가 음수 값을 가지면 이 시스템은 안정하고, 양수 값을 가지면 불안정함을 의미한다.

전술한 두 가지 평형위치 중 밸런싱의 목적을 달성하는 평형위치, 즉 $\tilde{r}_0 = 0$ 의 평형위치인 경우 행렬 $\mathbf{a}$ 의 determinant 가 0 이기 때문에 식 (33)을 갖고 고유치 해석을 할 수 없다. 이러한 현상이 나타나는 이유는 $\tilde{r}_0 = 0$ 에 해당하는 평형위치에서 ψ_0 의 값이 정의되지 않기 때문이다. 그러므로 $\tilde{r}_0 = 0$ 의 평형위치인 경우 고유치를 구하기 위해서 섭동방정식인 식 (21)–(23)에 $\tilde{r}_1 = Re^{\lambda t}$, $\psi_1 = \Psi e^{\lambda t}$, $\phi_{1i} = \Phi e^{\lambda t}$ 을 대입하여 당연해(trivial solution)를 갖지 않는 조건인 특성방정식을 유도한 후, 특성방정식으로부터 고유치를 구한다. 특성방정식은 볼이 2 개인 경우 다음과 같이 λ 에 대한 8 차식으로 표현된다.

$$C_8\lambda^8 + C_7\lambda^7 + \cdots + C_1\lambda + C_0 = 0 \tag{36}$$

논의를 간단히 하기 위해서 자동 볼 평형장치의 볼 수가 2 개일 때의 동적 안정성을 분석하였다. 자동 볼 평형장치가 밸런싱을 이루는 경우의 평형위치는 식 (24)–(26)에 의해서 다음과 같이 결정된다.

$$\tilde{r}_0 = 0,\quad \phi_{01} = -\phi_{02} = \tan^{-1}\sqrt{(2\tilde{m}/\tilde{\varepsilon})^2 - 1}\,/(-1) \tag{37}$$

식 (37)에 의해 정의되는 평형위치 부근에서의 자동 볼 평형장치의 동적 안정성을 규명한 결과를 Fig. 3 과 Fig. 4 에 도시하였다. Fig. 3 은 $\tilde{\varepsilon} = 0.02$, $\zeta = 0.0707$ 그리고 $\beta = 0.1168$ 일 때, $\tilde{\omega}$ 와 $\tilde{m}$ 의 변화에 대한 안정성을 나타낸다. Fig. 3 에서 볼 수 있는 바와 같이 위험속도($\tilde{\omega} = 1$) 이하에서 식 (37)로 정의되는 평형위치 부근의 동적 안정성은 보장되지 않고, 점으로 표시된 부분에서 자동 볼 평형장치가 동적 안정성을 확보함을 알 수 있다. 그리고 $\tilde{m}$ 가 일정한 값 이상이 되어야 자동 볼 평형장치가 안정영역에 들어 갈 수 있음을 알 수 있다. Fig. 4 는 $\tilde{\omega} = 1.6$, $\zeta = 0.0707$ 이고 $\beta = 0.1168$ 일 때 $\tilde{m}$ 과 $\tilde{\varepsilon}$ 의 의 변화에 대한 식 (37)의 평형위치 부근에서 자동 볼 평형장치의 안정성을 표시한다. Fig. 3 과 Fig. 4 는 자동 볼 평형장치가 밸런싱의 목적을 달성하기 위한 각 설계인수의 제한 조건을 설계자에게 제공한다. 다시 말해, 자동 볼 평형장치가 Fig. 3 과 Fig. 4 의 안정영역에 존재하게 설계하면, 회전체의 질량 불평형을 제거하여 진동을 감소시킬 수 있다.

$\tilde{r}_0 \neq 0$ 에 해당하는 평형위치는 식 (27)-(29)에 의해서 결정되며, 이 때는 자동 볼 평형장치가 밸런싱의 기능을 수행하지 못한다. $\tilde{r}_0 \neq 0$ 에 해당하는 평형위치 부근에서의 안정성은 식 (33)으로부터 복소고유치문제를 유도하여 분석할 수 있다. 이 경우는 행렬 **a** 의 determinant 가 0 이 아니므로 일반적인 복소고유치문제로 고유치를 계산할 수 있다. $\tilde{\varepsilon} = 0.02$, $\zeta = 0.0707$, $\beta = 0.1168$ 일 때, $\tilde{r}_0 \neq 0$ 에 해당하는 평형위치 부근에서 $\tilde{\omega}$ 와 $\tilde{m}$ 의 변화에 따른 자동 볼 평형장치의 안정성을 Fig. 5 에 도시하였다. Fig. 5 에서 볼 수 있듯이 위험속도의 좌측에서 자동 볼 평형장치가 $\tilde{r}_0 \neq 0$ 에 해당하는 평형위치 부근에서 안정 영역을 갖을 수 있다. $\tilde{\omega} = 0.6$, $\zeta = 0.0707$, $\beta = 0.1168$ 일 때, 자동 볼 평형장치의 $\tilde{r}_0 \neq 0$ 에 해당하는 평형위치 부근에서의 $\tilde{m}$ 과 $\tilde{\varepsilon}$ 의 변화에 대한 안정성을 Fig. 6 에 나타내었다. 회전속도가 안정 영역에 있으므로, 즉 $\tilde{\omega} = 0.6$ 이므로 대부분의 $\tilde{m}$ 과 $\tilde{\varepsilon}$ 의 값에 대해 자동 볼 평형장치가 $\tilde{r}_0 \neq 0$ 에 해당하는 평형위치 부근에서 안정적임을 알 수 있다.

자동 볼 평형장치의 안정성에 관한 Fig. 3 과 Fig. 5 를 정리하면 안정성에 관한 영역을 크게 3 개의 영역으로 구분할 수 있다. 첫째, $\tilde{r}_0 = 0$ 에 해당하는 평형위치 부근에서의 안정 영역, 둘째, $\tilde{r}_0 \neq 0$ 에 해당하는 평형위치 부근에서의 안정 영역, 셋째, 이들 양자에 속하지 않는 불안정 영역으로 구분할 수 있다. 마지막의 불안정 영역은 Fig. 3 의 안정 영역과 Fig. 5 의 안정 영역에 포함되지 않는 부분이다.

5. 시간응답에 의한 안정성 검증

자동 볼 평형장치의 비선형 운동방정식에 대한 시간응답을 계산하여 자동 볼 평형장치의 안정성 분석 결과를 검증하였다. 시간응답의 계산은 Chung 과 Lee[5]에 의해 개발된 시간적분법에 의해 수행되었다. 시간적분법을 적용하기 위해서 무차원화된 운동방정식인 식 (10)-(12)를 행렬-벡터 방정식으로 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\mathbf{M}(\mathbf{x}(t))\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{N}(\mathbf{x}(t), \dot{\mathbf{x}}(t)) = 0 \qquad (38)$$

여기서 **M** 는 $(n+2)\times(n+2)$ 질량행렬을 표시하며 질량행렬은 변위의 함수이다. **N** 은 $(n+2)\times 1$ 내력벡터를 표시하며 변위와 속도의 비선형 함수이다.

시간응답 계산을 위한 자동 볼 평형장치의 물성치는 $n = 2$, $\tilde{m} = 0.0328$, $\zeta = 0.0707$, $\tilde{\varepsilon} = 0.02$, $\beta = 0.1168$ 이며, 초기조건은 $\tilde{r}(0) = 0.01$, $\psi(0) = 0$, $\phi_1(0) = 10°$, $\phi_2(0) = 20°$ 으로 주어졌다. 그리고 계산에 사용된 시간적분법의 알고리즘 상수는 $\beta = 1$ 이며, 시간간격은 $\Delta t = 5\times 10^{-5}$ 이다.

위의 물성치와 초기조건을 갖고 $\tilde{\omega} = 1.6$ 일 때, 즉 $\tilde{r}_0 = 0$ 에 해당하는 평형위치 부근에서 자동 볼 평형장치가 안정영역에 있을 때, 회전체 중심의 진폭에 대한 시간응답을 계산하면 Fig. 7 과 같다. 이 경우 시간이 경과함에 따라 $\tilde{r}$ 가 0 으로 수렴하여 완전히 진동이 제거됨을 알 수 있다. 자동 볼 평형장치를 부착하지 않은 경우, 즉 볼의 개수가 0 인 경우에 질량 불평형 때문에 진동이 제거되지 않는다. Fig. 8 은 볼의 위치에 대한 시간응답을 보여 주는데 시간이 경과됨에 따라 일정한 위치로 수렴한다. 수렴된 볼의 위치는 회전체의 질량중심 반대 쪽에 위치하여 질량 불평형을 보상하여 밸런싱의 목적을 달성한다.

$\tilde{r}_0 \neq 0$ 에 해당하는 평형위치 부근에서 안정한 경우, 즉 $\tilde{\omega} = 0.6$ 인 경우의 시간응답을 계산했을 때, 시간이 경과함에 따라 $\tilde{r}$ 은 Fig. 9 에서 보는 바와 같이 0 으로 수렴되지 않고 자동 볼 평형장치를 사용하지 않았을 경우의 보다 더 큰 진폭을 갖는다. 이 때 볼의 위치는 Fig. 10 과 같이 일정한 값으로 수렴하고, 수렴된 볼의 위치는 회전체의 질량중심과 같은 방향으로 위치하여 오히려 질량 불평형을 가중시켜 더 큰 진폭을 발생시킨다.

$\tilde{r}_0 = 0$ 와 $\tilde{r}_0 \neq 0$ 의 양 경우에 해당하는 평형위치 부근에서의 안정 영역에 속하지 않는 경우, 즉 $\tilde{\omega} = 1$ 인 경우의 시간응답을 고찰하여 보자. 이 경우에 $\tilde{r}$ 는 Fig. 11 에서와 같이 $\tilde{r}_0 = 0$ 의 평형위치에 수렴하지도 않을 뿐 아니라 $\tilde{r}_0 \neq 0$ 의

평형위치에도 수렴하지 않고, 주기적으로 증감하며, 볼은 Fig. 12 와 같이 회전체에 대하여 상대운동을 계속함을 알 수 있다.

6. 결 론

자동 볼 평형장치의 동특성을 분석하기 위해서 기존 연구자들이 수행했던 직교좌표계에 의한 해석 대신 극좌표계에 의해 운동방정식을 유도하였다. 그리고 기존의 연구자들이 규명하지 못한 자동 볼 평형장치의 두 가지 평형위치가 존재하며, 이들 두 평형위치는 회전체의 회전속도와 볼의 질량과 밀접한 관계를 가지고 있음을 확인하였다.

본 연구의 평형위치와 평형위치 부근에서의 안정성을 분석은 실제 자동 볼 평형장치가 회전체의 질량 불평형을 제거하여 진동을 감소시킬 수 있는 설계 기준을 제시하였다.

참 고 문 헌

(1) Thearle, E, L., 1932, "A new type of dynamic balancing machine", *ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. 54, pp. 131-141.

(2) Alexander, J. D., 1964, "An automatic dynamic balancer", *Proceeding, 2nd Southeastern Conference*, pp. 415-426.

(3) Cade, J. W., 1965, "Self-compensating balancing in rotating mechanisms" *Design News*, pp. 234-239.

(4) Lee, J. and Van Moorhem, W. K., 1996, "Analytical and experimental analysis of a self-compensating dynamic balancer in a rotating mechanism" *ASME Journal of Dynamic System, Measurement, and Control*, Vol. 118, pp. 468-475.

(5) Chung, J. and Lee, J. M., 1994, "A new family of explicit time integration methods for linear and non-linear structural dynamics," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 37, pp. 3961-3976.

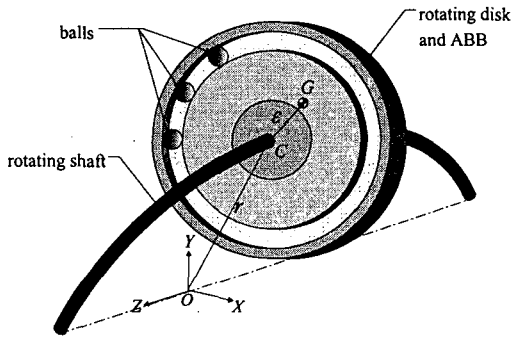

Fig. 1 Jeffcott rotor with the automatic ball balancer.

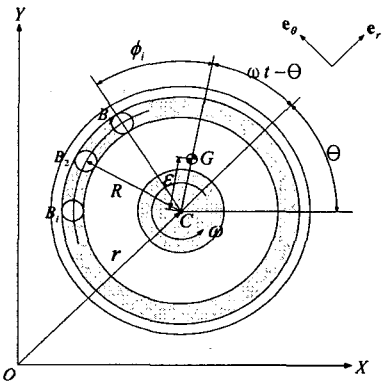

Fig. 2 Configuration of the automatic ball balancer.

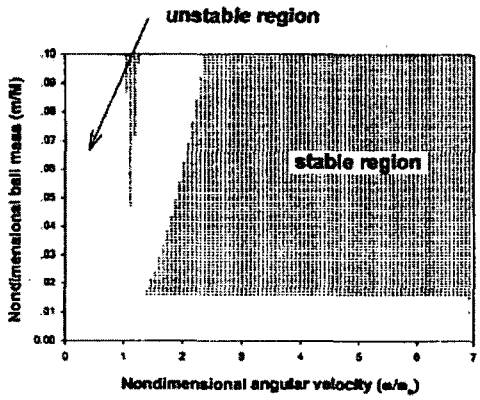

Fig. 3 Stability for $\tilde{\omega}$ vs. $\tilde{m}$ in the neighborhood of the equilibrium position corresponding to $\tilde{r}_0 = 0$ ($\tilde{\varepsilon} = 0.02$, $\zeta = 0.0707$ and $\beta = 0.1168$).

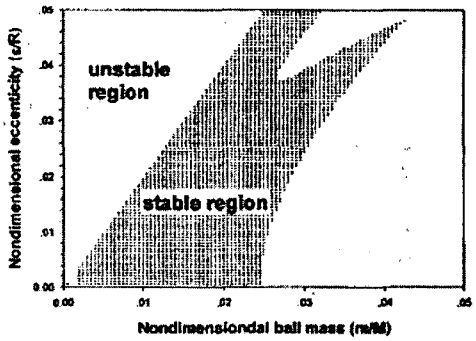

Fig. 4 Stability for $\tilde{m}$ vs. $\tilde{\varepsilon}$ in the neighborhood of the equilibrium position corresponding to $\tilde{r}_0 = 0$ ($\tilde{\omega} = 1.6$, $\zeta = 0.0707$ and $\beta = 0.1168$).

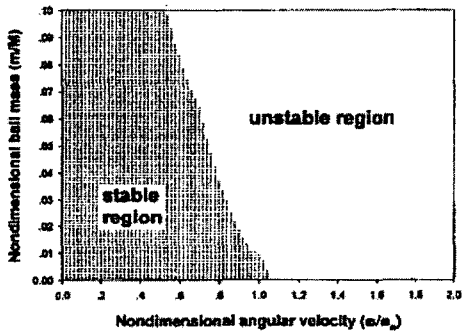

Fig. 5 Stability for $\tilde{\omega}$ vs. $\tilde{m}$ in the neighborhood of the equilibrium position corresponding to $\tilde{r}_0 \neq 0$ ($\tilde{\varepsilon} = 0.02$, $\zeta = 0.0707$ and $\beta = 0.1168$).

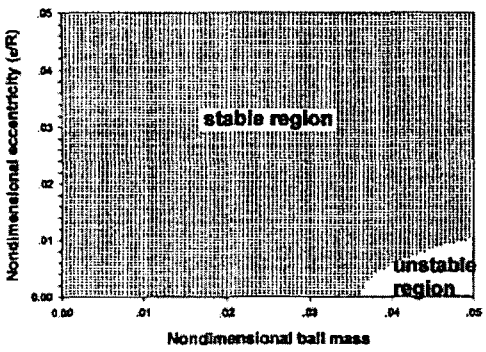

Fig. 6 Stability for $\tilde{m}$ vs. $\tilde{\varepsilon}$ in the neighborhood of the equilibrium position corresponding to $\tilde{r}_0 \neq 0$ ($\tilde{\omega} = 0.6$, $\zeta = 0.0707$ and $\beta = 0.1168$).

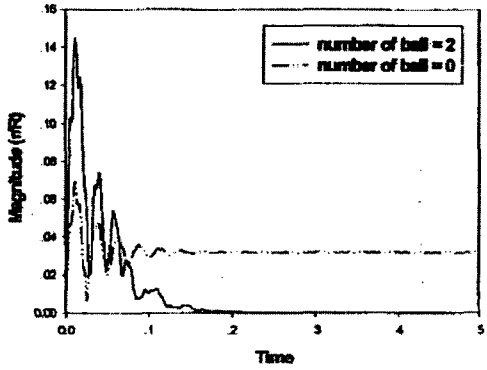

Fig. 7 Time history of $\tilde{r}$ when the automatic ball balancer is in the stable region corresponding to $\tilde{r}_0 = 0$ ($\tilde{\omega} = 1.6$, $\zeta = 0.0707$, $\tilde{\varepsilon} = 0.02$, $\beta = 0.1168$).

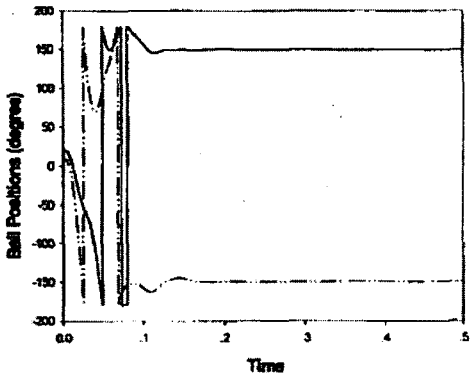

Fig. 8 Time history of ϕ_1 and ϕ_2 when the automatic ball balancer is in the stable region corresponding to $\tilde{r}_0 = 0$ ($\tilde{\omega} = 1.6$, $\zeta = 0.0707$, $\tilde{\varepsilon} = 0.02$, $\beta = 0.1168$).

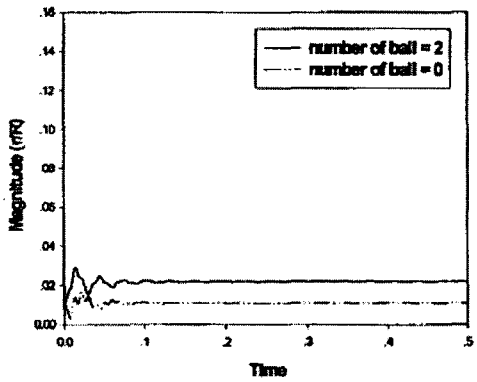

Fig. 9 Time history of $\tilde{r}$ when the automatic ball balancer is in the stable region corresponding to $\tilde{r}_0 \neq 0$ ($\tilde{\omega} = 0.6$, $\zeta = 0.0707$, $\tilde{\varepsilon} = 0.02$, $\beta = 0.1168$).

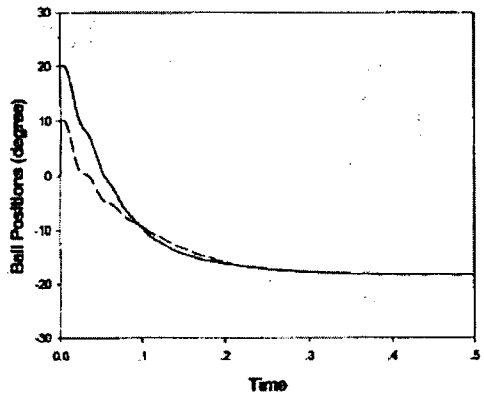

Fig. 10 Time history of ϕ_1 and ϕ_2 when the automatic ball balancer is in the stable region corresponding to $\tilde{r}_0 \neq 0$ ($\tilde{\omega} = 0.6$, $\zeta = 0.0707$, $\tilde{\varepsilon} = 0.02$, $\beta = 0.1168$).

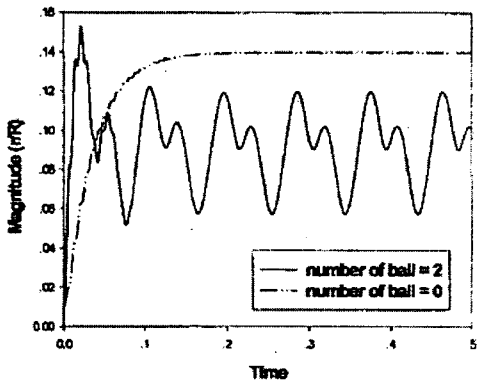

Fig. 11 Time history of $\tilde{r}$ when the automatic ball balancer is not in the stable region corresponding to either $\tilde{r}_0 = 0$ or $\tilde{r}_0 \neq 0$ ($\tilde{\omega} = 1$, $\zeta = 0.0707$, $\tilde{\varepsilon} = 0.02$, $\beta = 0.1168$).

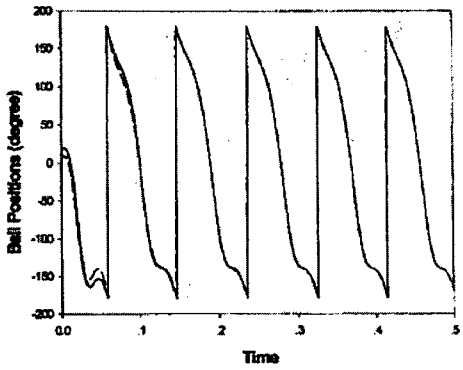

Fig. 12 Time history of ϕ_1 and ϕ_2 when the automatic ball balancer is not in the stable region corresponding to either $\tilde{r}_0 = 0$ or $\tilde{r}_0 \neq 0$ ($\tilde{\omega} = 1$, $n = 2$, $\tilde{m} = 0.0328$, $\zeta = 0.0707$, $\tilde{\varepsilon} = 0.02$, $\beta = 0.1168$).