

## 평균 유동을 고려한 1차원 그린 함수를 이용한 덕트 내부의 음장 예측 방법

Prediction of Sound Field Inside Duct with Moving Medium by using one Dimensional Green's function

전종훈 † · 김양한 \*

Jong-Hoon Jeon, Yang-Hann Kim

**Key Words :** Acoustic Holography(음향 홀로그래피), Convective Wave Equation(대류 파동 방정식), Green's Function(그린 함수), Kirchhoff-Helmholtz Integral Equation(키르히호프-헬름홀츠 적분방정식)

### ABSTRACT

Acoustic holography uses Kirchhoff-Helmholtz integral equation and Green's function which satisfies Dirichlet boundary condition. Applications of acoustic holography have been taken to the sound field neglecting the effect of flow. The uniform flow, however, changes sound field and the governing equation, Green's function and so on. Thus the conventional method of acoustic holography should be changed. In this research, one possibility to apply acoustic holography to the sound field with uniform flow is introduced through checking for the plane wave in a duct. Change of Green's function due to uniform flow and one method to derive modified form of Kirchhoff-Helmholtz integral is suggested for 1-dimensional sound field. Derivation results show that using Green's function satisfying Dirichlet boundary condition, we can predict sound pressure in a duct using boundary value.

### 1. 서 론

음장을 예측하는 방법에는 여러 가지가 있으며, 이 중 음향 홀로그래피[1-3]는 홀로그램면의 음향 신호를 이용하여 다른 평면상의 다양한 음향 물리량(음압, 속도, 인텐시티)을 예측할 수 있는 장점이 있다. 이 방법을 적용함에 있어 기본적인 가정은 홀로그램면의 측정 신호들이 서로 상관(coherent)이어야 한다는 것이다. 즉, 관심 있는 주파수에서 측정 신호 사이의 기여도 합수가 1 이어야 한다. 만약 기여도 합수가 1 보다 작은 경우에는 예측면에서 오차가 커질 수 있다. 기여도 합수가 1 보다 작은 대표적인 예로 여러 개의 독립 소음원에 의해 형성된 음장 또는 측정 잡음의 영향을 무시할 수 없는 경우를 들 수 있다. 이를 줄이기 위해 다수의 기준 신호를 이용하여 측정 오차를 줄이는 방법에 대해 연구가 되었고[4-5], 많은 수의 기준 신호를 사용할수록 측정 오차를 줄일 수 있음이 증명되었다[6]. 특히, 유동에 의해서 발생하는 소음을 측정하는 경우(예: 자동차 공력 소음 측정 등)에는 유동이 측정 신호의 기여도 합수를 낮추는 결과를 초래하기 때문에[7] 참고문헌 6의 결과를 적용할 수 있다.

그러나 유동이 있는 경우에는 측정 신호뿐만 아니라 음장 자체에도 영향을 준다. 즉, 음장을 지배하는 파동 방정식이 유동의 영향에 의해 변하게 된다[8]. 음향 홀로그래피는 파동 방정식을 만족하는 만족하는 해를 이용하여 음장을 예측하는 방법이기 때문에 유동이 있다면 이 또한 수정되어야 한다. 유동이 있는 경우 평면 음향 홀로그래피를 적용하는 방법 또한 연구가 되었지만[9], 이는 파수 영역에서 그린 함수(Green's function)의 변화 및 파수 영역 필터의 변화에 대해서 주로 다루었고 구체적인 물리적 상황의 표현에 대해서는 다루지 않았다. 유동이 있는 경우의 음향 홀로그래피를 이해하기 위해서는 유동이 있는 경우의 파동 방정식의 변화부터 시작해서 그린 함수의 변화, 음향 홀로그래피의 근간이 되는 키르히호프-헬름홀츠 적분 방정식(Kirchhoff-Helmholtz integral equation)이 수학적으로 어떻게 변화하며, 이들이 물리적으로 어떤 의미를 갖는지에 대해 살펴보아야 한다. 이들을 간단하면서도 쉽게 살펴볼 수 있는 방법 중 하나로 평면파만 전파하는 경우 즉, 덕트 내부의 음장에 대해 위의 3 가지 요소가 어떤 형태를 갖는지에 대해 우선적으로 살펴 볼 필요가 있다.

### 2. 유동이 있는 경우 1차원 음장의 표현

#### 2.1 유동이 있는 경우 파동 방정식

우선 유동이 있는 경우에 파동 방정식이 어떻게

† 정회원, 한국과학기술원 기계공학과

E-mail : echovel@kaist.ac.kr

Tel : (042)869-3065, Fax : (042)869-8220

\* 정회원, 한국과학기술원 기계공학과

변하는 지를 살펴 보자. 관심 있는 유체에서 유체에 작용하는 압력과 유체 밀도, 그리고 속도는 유체 입자의 미세한 움직임에 따라 변화하거나 그렇지 않은 물리량으로 나누어 표현할 수 있다. 즉,

$$p_t(x, t) = p_0 + p(x, t),$$

$$\rho_t(x, t) = \rho_0 + \rho(x, t),$$

$$\bar{u}_t(x, t) = U + u(x, t).$$

$p_0$ 는 대기압,  $\rho_0$ 는 압력 변화가 없는 경우의 대기 밀도,  $U$ 는 유체 흐름(flow)의 속도를 나타낸다. 또한  $p(x, t)$ 는 유체 밀도의 미세한 변화에 의한 압력의 변화량, 즉 음압을 나타내며  $\rho(x, t)$ 는 유체 밀도의 미세한 변화,  $u(x, t)$ 는 유체 입자의 진동 속도를 나타낸다. 전자의 세 향은 온도 변화가 없는 경우 일정한 값을 가지며, 후자의 세 향은 전자에 비해 매우 작은 크기를 갖는다고 가정한다. 유동이 있는 경우, 즉  $U \neq 0$ 인 경우 과동방정식은

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = \frac{1}{c^2} \left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{d}{dx} \right)^2 p \quad (2)$$

와 같이 쓸 수 있다[8].  $U = 0$ 인 경우 식 (2)는 선형 파동 방정식(linearized wave equation)과 정확히 같다.  $p(x, t) = P(x)e^{-j\omega t}$ , 즉 유체 입자가 단순 조화 진동을 하는 경우 식 (2)는 다시

$$\frac{d^2 P(x)}{dx^2} + \left( k + jM \frac{d}{dx} \right)^2 P(x) = 0 \quad (3)$$

과 같이 나타낼 수 있다. 여기서  $M = U/c$ , 즉 유동이 없는 경우의 파동의 전파 속도에 대한 유동 속도의 비를 나타낸다. 본 연구에서는 유동 속도가 음의 전파 속도보다 작은 경우, 즉  $M < 1$ 인 경우에 대해서만 다룬다.

## 2.2 1차원 음장에 대한 그린 함수

음장 예측을 위해서는 식 (2)와 같은 파동 방정식이 지배하는 해를 이용하여 키르히호프-헬름홀츠 방정식을 유도해야 한다. 하지만 그 전에, 덕트 내부에 크기 1의 음원이 있을 때 파동 방정식을 만족하는 해, 즉 그린 함수를 구할 필요가 있다.

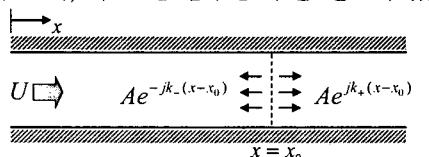


Fig. 1 Schematic expression of plane wave excitation at  $x_0$  with uniform flow

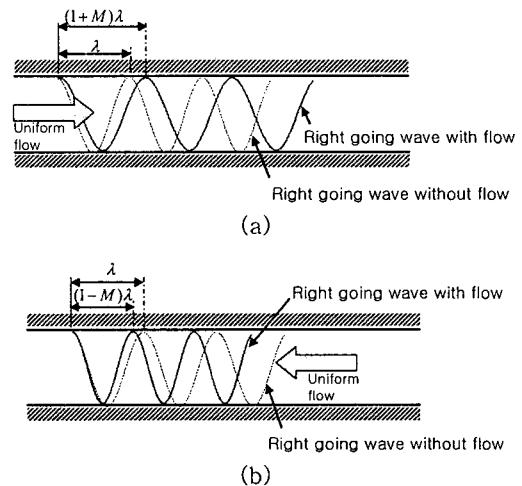


Fig. 2 Change of wavelength due to flow speed when (a) direction of propagation is the same to direction of flow, and (b) opposite to direction of flow.

그 이유는 키르히호프-헬름홀츠 적분 방정식을 음장 예측에 적용하기 위해서는 반드시 그린 함수를 알고 있어야 하기 때문이다. 본 장에서는 유동이 있는 경우 덕트 내부 음장에 대한 그린 함수를 구하는 방법을 소개한다. Fig. 1과 같이  $x$  방향으로 유체가  $U$ 의 속도로 움직이며,  $x_0$ 에 델타 함수(delta function) 형태의 가진이 있다고 생각하자. 즉

$$\frac{d^2 G(x|x_0)}{dx^2} + \left( k + jM \frac{d}{dx} \right)^2 G(x|x_0) = -\delta(x - x_0) \quad (4)$$

식 (4)를 만족하는  $G(x|x_0)$ 가 평면파에 대한 그린 함수이다. 식 (4)의 괄호 안의 항을 풀어 쓰면

$$(1 - M^2) \frac{d^2 G}{dx^2} + j2Mk \frac{dG}{dx} + k^2 G = -\delta(x - x_0) \quad (5)$$

와 같이 정리할 수 있다. 양변을 미세한 구간  $[x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon]$ 에 대해 적분하면

$$(1 - M^2) \frac{dG}{dx} \Big|_{x=x_0-\varepsilon}^{x=x_0+\varepsilon} = -1 \quad (6)$$

과 같이 쓸 수 있다(식 (5)의 좌변의 두, 세 번째 항은 그린함수의 연속성에 의해 적분값이 0이 된다). 여기서 그린 함수의 형태에 대해 생각해 볼 필요가 있다.  $x_0$ 에 델타 함수 형태의 가진이 있고, 이러한 가진에 대해서 양쪽 방향으로 파동이

전파하기 때문에  $x > x_0$  인 경우에는 오른쪽으로 진행하는 평면파가,  $x < x_0$  인 경우에는 왼쪽으로 진행하는 평면파가 생성될 것이다(Fig. 1 참조). 이 때 유동의 영향에 의해 한 주기에 이동하는 파동의 거리 즉, 파장이 달라지게 되며, 이는 파동의 방향에 따라 달라지게 된다(Fig. 2 참조). 이를 토대로 계산하면 덕트 내부의 평면파에 대한 그린함수는

$$G(x|x_0) = \begin{cases} -\frac{1}{j2k} e^{\frac{j}{1+M}(x-x_0)}, & x > x_0 \\ -\frac{1}{j2k} e^{-\frac{j}{1-M}(x-x_0)}, & x < x_0 \end{cases} \quad (7)$$

과 같다. 이는 자유음장(free field)에 대한 해이므로 앞으로 위의 해를  $G_F(x|x_0)$  라 부르기로 하자.

### 3. 덕트 내부 음장 예측 방법

#### 3.1 키르히호프-헬름홀츠 적분방정식

앞서 다루었던 지배 방정식 및 그린함수를 이용하여 1 차원 키르히호프-헬름홀츠 적분방정식을 유도해 보자.

식 (3)의 양변에  $G(x|x_0)$  를 곱한 결과에서 식 (4)의 양변에  $P(x)$  를 곱한 결과를 빼서 정리하면

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( P \frac{dG}{dx} - G \frac{dP}{dx} \right) \\ + \frac{j2Mk}{(1-M^2)} \left( P \frac{dG}{dx} - G \frac{dP}{dx} \right) = -\frac{P\delta(x-x_0)}{(1-M^2)} \end{aligned} \quad (8)$$

과 같이 쓸 수 있다. 위 식을 잘 관찰하면

$$\frac{dy(x)}{dx} + qy(x) = r(x) \quad (9)$$

의 형태로 되어 있음을 알 수 있다. 식 (9)를 만족하는  $y(x)$  의 부정적분 형태는

$$y(x) = e^{-\int q dx} \left[ \int e^{\int q dx} r(x) dx + c \right] \quad (10)$$

이다[11]. 이를 통해 식 (8)을 관심영역  $[0, \infty]$  에 대해 적분하여 정리하면  $x = \infty$  에서의 경계값이 무시할 정도로 작다는 물리적 사실에 근거하여

$$P(x_0) = (1-M^2) e^{-\frac{2Mk}{1-M^2} x_0} \left[ \begin{aligned} & P(x) \frac{dG(x|x_0)}{dx} \\ & - G(x|x_0) \frac{dP(x)}{dx} \end{aligned} \right]_{x=0} \quad (11)$$

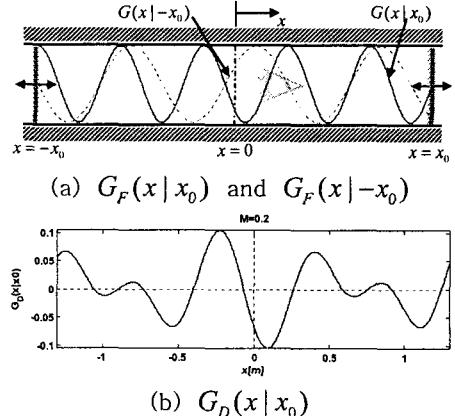


Fig. 3 Free field Green's function and Green's function dissatisfying Dirichlet boundary condition with flow ( $M = 0.2$ )

과 같이 쓸 수 있다.

#### 3.2 경계에서 음압을 이용하여 내부 음장을 예측하는 방법

식 (11)은 결국 덕트 내부에서 음압은 경계에서 음압 및 음압의 구배를 이용하여 구할 수 있음을 뜻한다. 그러나 실제 측정에 있어서 음압의 구배는 측정하기 쉬운 값이 아니다. 따라서 경계에서 값이 0이 되는 그린함수를 찾을 수 있다면, 즉, 디리클리트 경계 조건(Dirichlet boundary condition)을 만족하는 그린함수를 이용하면 경계에서 음압의 측정만으로 내부 음압을 예측할 수 있다. 이러한 생각이 음향 홀로그래피의 근간이 된다. 디리클리트 경계 조건을 만족하는 그린함수를  $G_D(x|x_0)$  라고 하자. 만약 덕트 내에 유동이 없는 경우라면, 즉  $M = 0$ 인 경우에는

$$G_D(x|x_0) = G_F(x|x_0) - G_F(x|-x_0) \quad (12)$$

와 같이 쓸 수 있다[10]. 여기서  $G_F(x|x_0)$  는 2장에서 언급하였던 자유음장 그린함수이며 식 (7)에서  $M = 0$ 인 경우를 뜻한다. 즉,  $x$ 를 중심으로 대칭인 점에 반대 위상을 갖는 자유음장 그린함수를 놓으면  $x = 0$ 에서  $G_D(x|x_0)$  는 0이 된다. 즉,  $G_F(x|x_0)$  와  $G_F(x|-x_0)$  가  $x = 0$ 에서 같다. 그렇지만 유동이 있는 경우에는 식 (12)와 같은 형태의 그린함수를 사용할 수 없다. 즉,  $x = 0$ 을 중심으로 대칭인 점에 반대 위상을 갖는 그린함수를 놓더라도 유동의 영향에 의해 파동의 전파 방향에 따라 파장이 달라지기 때문이다(Fig. 3 참조). 따라서 유동에 의해 변화되는 파장을

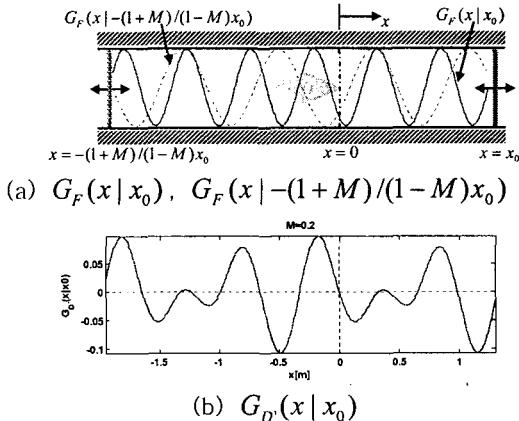


Fig. 4 Free field Green's function and Green's function satisfying Dirichlet boundary condition with flow( $M = 0.2$ )

고려하여 반대 위상을 갖는 그린 함수의 위치를 바꾸어야 한다. 본 연구에서 제안하는 그린 함수는

$$G_D(x|x_0) = G_F(x|x_0) - G_F(x|-\frac{1+M}{1-M}x_0) \quad (13)$$

과 같다. 즉, 유동의 영향 때문에 파장이 유동이 없는 경우에 비해 각각  $(1+M)$ ,  $(1-M)$  배로 늘어나기 때문에 이러한 영향을 보정해줄 수 있는 위치에 반대 위상의 그린 함수를 놓은 것이다. Fig. 4에서 이러한 물리적 상황을 설명해 주고 있다. 식 (13)을 식 (11)에 대입하여 정리하면

$$P(x_0) = P(0)e^{j\frac{k}{1+M}x_0} \quad (14)$$

와 같다. 즉,  $x = x_0$ 에서의 음압은  $x = 0$ 에서의 음압에서 위상이 바뀐 값이라는 사실을 키르히호프-헬름홀츠 적분방정식의 결과로부터 유추할 수 있으며, 이는 평면파의 경우 각 위치에 따라 위상만 변화하며 전파한다는 물리적 사실과 일치하는 결과이다. 위상에서 분모항의  $1+M$ 은 양의 크기를 가지는 유동의 영향에 의한 것이다. 따라서 유동이 있는 경우에도 경계의 음압 정보만 가지고도 음장을 예측할 수 있음을 알 수 있다.

#### 4. 결론

본 연구는 음향 홀로그래피의 근간이 되는 키르히호프-헬름홀츠 적분방정식을 유동이 있는 덕트 내부에 평면파가 전파하는 경우에 대해 적용해 보았다. 우선 유동의 영향에 의해서 파동 방정식의 형태가 변화하며, 그에 따라 자유음장 그린 함수

역시 다른 형태를 갖는다는 사실을 확인하였다. 두 번째로 유동이 있는 경우에도 키르히호프-헬름홀츠 적분 방정식을 유도할 수 있다는 사실 또한 확인하였다. 마지막으로, 유동의 영향에 의해 파동의 전파 방향에 따라 파장이 달라지므로, 이를 고려한 디리클리트 경계 조건을 만족하는 그린 함수를 제안하였다. 제안한 그린 함수를 이용해서 평면파에 대해 경계에서의 음압을 이용하여 음장을 예측할 수 있음을 검증하였다. 본 연구는 유동이 있는 경우 음향 홀로그래피의 적용 방법에 단서를 제공해줄 수 있을 것이다.

#### 후기

본 연구는 교육인적자원부의 BK21 사업에 의한 연구 지원으로 수행되었습니다.

#### 참고문헌

- (1) J.D. Maynard, E.G. Williams, and Y. Lee, "Nearfield acoustic holography: I. Theory of generalized holography and the development of NAH," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 78(4), pp. 1395-1413, 1985.
- (2) W. A. Veronesi and J. D. Maynard, "Nearfield acoustic holography (NAH): II. Holographic reconstruction algorithms and computer implementation," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 81(5), pp. 1307-1322, 1987.
- (3) 권휴상, 개선된 평면 음향 홀로그래피 방법을 이용한 음장의 가시화 (한국과학기술원 기계공학과, 박사학위 논문, 2000).
- (4) Y.-J. Kim, J. S. Bolton, and H.-S. Kwon, "Partial sound field decomposition in multireference near-field acoustical holography by using optimally located virtual references," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 115(4), pp. 1641-1652, 2004.
- (5) K.-U. Nam and Y.-H. Kim, "A partial field decomposition algorithm and its examples for near-field acoustical holography," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 116(1), pp. 172-185, 2004.
- (6) 남경숙, 낮은 상관 관계를 갖는 음장에서 음향 홀로그래피의 적용(한국과학기술원 기계공학과, 박사학위 논문, 2004).
- (7) J. Y. Chung, "Rejection of flow noise using a coherence function method," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 62(2), pp. 388-395, 1977.
- (8) P. M. Morse, K. U. Ingard, *Theoretical acoustics* (McGraw-Hill, Inc, 1968), pp. 700-704.
- (9) R. J. Ruhala, D. C. Swanson, "Planar near-field acoustical holography in a moving medium," *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 112(2), pp. 420-429, 2002.
- (10) 김양한, *음향학 강의*(청문각, 2005), Chap. A4. 4.
- (11) E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, 8th edition (John Wiley&Sons, Inc, 1999), pp. 33-38.