

## 비틀림 변환기용 압전 원판의 진동 해석

### Vibration Analysis of a Piezoelectric Disc for a Torsional Transducer

이정현\* · 김진오†

Jung Hyun Lee, Jin Oh Kim

Key Words : Piezoelectricity(압전), Transducer(변환기), Torsional Vibration(비틀림 진동), Natural Frequency(고유진동수)

#### ABSTRACT

The vibrational characteristics of the piezoelectric disc for a torsional vibration transducer is theoretically studied in this paper. The characteristic equation of the piezoelectric annular disc has been derived from Newton's 2nd law and Gibb's free energy equations. With an anisotropic material property of the disc, the characteristic equation has yielded resonance frequencies. Numerically-calculated results were compared with the values obtained by finite element analysis and experiments.

#### 1. 서 론

역학적 양인 응력과 전기적 양인 전압간의 상호 변환인 압전 현상은 요즘 다양한 분야에서 활용되고 있다. 압전 현상이 활용되면서 그 응용범위도 넓어지고 있는 분야의 하나가 센서와 액추에이터이다. ① 그중 압전 변환기는 전기 신호를 받아 초음파를 발생시키는 역압전 현상과, 감지된 초음파를 전기신호로 바꿔주는 정압전 현상을 모두 활용한다. 압전 변환기들의 대부분은 압전체의 두께 방향 종진동을 이용하고, 일부는 전단운동을 이용한 비틀림 진동을 이용한다.

본 논문에서는 비틀림 진동과 반경방향 진동을 이용한 초음파 모터 개발의 일환으로 압전 비틀림 변환기를 대상으로 연구한다. 비틀림 변환기는 종진동 변환기나 원통형 진동 변환기보다 제작과정이 매우 복잡하지만, 몇가지 제작 방법이 보고되어 있다. ② 본 논문은 초음파 모터에 사용되는 비틀림 변환기를 제작하기 위해 설계하는 과정에서 필요한 진동 특성을 다룬다. 앞선 연구에서 이와 유사한 시도가 있었지만, 이방성 압전체를 등방성으로 단순화하여 다루었다. ③ 압전 현상이 고려된 압전체의 비틀림 진동을 정식화하여 변환기의 특성방정식을 도출한다. 아울러 압전 소재의 이방성에 따른 압전체의 고유진동수를 수치 계산으로 찾는다. 유한요소해석 결과 및 실험 결과와 비교하여 확인한다.

#### 2. 압전 원판의 비틀림 진동

##### 2.1 압전 지배식

압전 현상을 나타내는 지배방정식은 Gibbs의 자유에너지 식을 열역학 1, 2법칙을 이용하여 얻을 수 있고, 이를 역학적 에너지 항과 전기적 에너지 항을 고려하여 나타낸 식은 다음과 같다. ④

$$S_i = s_{ij}^E T_j + d_m E_m \quad (1)$$

$$D_m = d_m T_i + \epsilon_{mk}^T E_k \quad (2)$$

식 (1)과 식 (2)를 응력  $T$ 와 전기적 변위  $D$ 에 대한 식으로 바꾸고 행렬의 형태로 정리하면 각각 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\{T\} = [c^E]\{S\} - [e]^T \{E\} \quad (3)$$

$$\{D\} = [e]\{S\} + [\epsilon^T]\{E\} \quad (4)$$

여기서,  $\{T\}$ ,  $\{S\}$ ,  $\{D\}$ ,  $\{E\}$ 는 각각 응력, 변형률, 전기적 변위, 전기장의 열행렬이다. 또한,  $[c^E]$ ,  $[e]$ ,  $[\epsilon^T]$ 는 각각 일정한 전기장에서의 강성, 압전 응력 상수, 일정한 변형률에서의 유전율의 행렬들이며, 이 상수 행렬들은 다음과 같이 표현된다.

$$[c^E] = [s^E]^{-1} \quad (5)$$

$$[e] = [d][c^E] \quad (6)$$

$$[\epsilon^T] = [\eta] - [e][d]^T \quad (7)$$

여기서  $[d]$ 는 압전 변형률 상수 행렬이고,  $[\eta]$ 는 응력이 일정한 상태에서의 유전율의 행렬이다.

비틀림 변환기의 압전 세라믹은 원주방향으로 분극처리

† 숭실대학교 공과대학 기계공학과  
E-mail : jokim@ssu.ac.kr  
Tel : (02) 820-0332, Fax : (02) 820-0338

\* 숭실대학교 대학원 기계공학과

를 하고 두께방향으로 전극을 위치시킨다.  $\theta$  이에 대한 좌표 설정에서  $r$  방향을 2번,  $\theta$  방향을 3번,  $z$  방향을 1번 방향으로 하고,  $r$  방향을 4번,  $\theta$  방향을 5번,  $z$  방향을 6번으로 한다.  $\epsilon_{\theta}$  변환기의 원주방향 비틀림 진동에 대한 전단응력  $T_5$ 와 전기적 변위  $D_1$ 은 식 (3)과 식 (4)로부터 다음과 같이 정리 된다.

$$T_5 = c_{55}^E S_5 - e_{51} E_1 \quad (8)$$

$$D_1 = e_{51} S_5 + \epsilon_{11} E_1 \quad (9)$$

식 (8)~(9)가 비틀림 진동하는 압전 세라믹에 대한 지배식이다.

## 2.2 운동방정식

단층의 압전 비틀림 변환기의 내부를 개략적으로 도시하면 Fig. 1(a)와 같다. 분극 작업시 전극이 배열되었던 영역과 원주방향으로 분극된 영역이 교대로 배치된다.  $\theta$  원판의 양쪽 평면에 전극이 설치된다. 이러한 변환기를 모델링하면 Fig. 1(b)와 같다. 원통좌표계  $(r, \theta, z)$ 에서 위치 좌표와 시간  $t$ 의 함수인 반경방향 변위  $u$ , 원주방향 변위  $v$ , 두께방향 변위  $w$ 와 전기 퍼텐셜  $\phi$ 로써 식 (8)과 식 (9)를 나타내면, 압전 변환기의 원형단면에 작용하는 전단응력  $\tau_{\theta z}$ 와 전기적 변위  $D_z$ 가 각각 다음과 같다.

$$\tau_{\theta z} = c_{55}^E \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) + e_{51} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (10)$$

$$D_z = e_{51} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) - \epsilon_{11} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (11)$$

또한, 원주방향의 비틀림 운동만 존재하므로 반경방향 변위  $u$ 와 두께방향 변위  $w$ 는 0이고, 원주방향 변위  $v$ 만 남는다. 그래서 식 (10)과 식 (11)을 다시 정리하면 최종적으로 다음과 같이 된다.

$$\tau_{\theta z} = c_{55}^E \frac{\partial v}{\partial z} + e_{51} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (12)$$

$$D_z = e_{51} \frac{\partial v}{\partial z} - \epsilon_{11} \frac{\partial \phi}{\partial z} \quad (13)$$

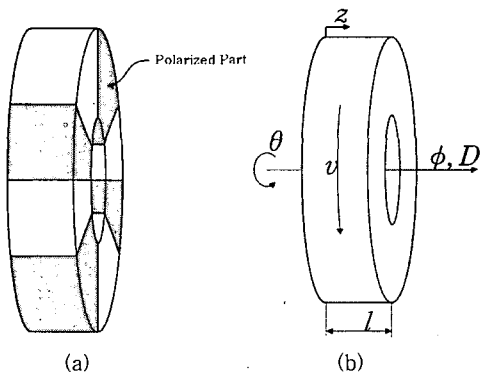


Fig. 1 Piezoelectric torsional transducer

한편, 비틀림 진동에 관한 응력 운동방정식은 원주방향 힘의 평형으로부터 다음과 같이 유도된다.  $\theta$

$$\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} = \rho \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \quad (14)$$

여기서  $\rho$ 는 밀도이다. 또한, 전기적 방정식은 다음과 같다.  $\theta$

$$\frac{\partial D_z}{\partial z} = 0 \quad (15)$$

식 (12)와 식 (13)을 식 (14)와 식 (15)에 각각 대입하여 정리하면, 다음과 같은 운동방정식을 얻는다.

$$\frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (16)$$

$$e_{51} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \epsilon_{11} \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \quad (17)$$

여기서  $c(\equiv \sqrt{G/\rho})$ 는 비틀림 파동의 전파속도이며,  $\mathcal{G}(=c_{55}^E + e_{51}^2/\epsilon_{11})$ 는 압전성이 포함된 전단탄성계수이다. 각 주파수  $\omega$ 는 전기 신호가 전극에 가해져 생기는 조화진동을 염두에 두고 변수분리를 위해  $v(r, \theta, z, t) = R(r) \Theta(\theta) \cdot \bar{v}(z) e^{i\omega t}$ 와  $\phi(r, \theta, z, t) = R(r) \Theta(\theta) \bar{\phi}(z) e^{i\omega t}$ 로 하여, 식 (16)과 식 (17)에 대입하면  $\bar{v}(z)$ 와  $\bar{\phi}(z)$ 에 대한 식을 각각 다음과 같이 얻는다.

$$\frac{d^2 \bar{v}}{dz^2} + k^2 \bar{v} = 0 \quad (18)$$

$$e_{51} \frac{d^2 \bar{v}}{dz^2} = \epsilon_{11} \frac{d^2 \bar{\phi}}{dz^2} \quad (19)$$

여기서  $k(\equiv \omega/c)$ 는 파동수이다. 식 (18)과 식 (19)의 해는 각각 다음과 같은 형태로 된다.

$$\bar{v}(z) = A \sin kz + B \cos kz \quad (20)$$

$$\bar{\phi}(z) = \frac{e_{51}}{\epsilon_{11}} (A \sin kz + B \cos kz) + az + b \quad (21)$$

## 2.3 특성방정식

압전 비틀림 변환기는 두께가  $l$ 이고, 전극에 가해지는 전압  $V_0 e^{i\omega t}$ 에 의해 구동된다. 변환기의 양단이 자유로울 때 경계조건은 다음과 같이 설정된다.

$$z=0 \text{ 에서, } \quad \bar{\tau}_{\theta z} = 0 \quad (22-a)$$

$$\bar{\phi} = 0 \quad (22-b)$$

$$z=l \text{ 에서, } \quad \bar{\tau}_{\theta z} = 0 \quad (22-c)$$

$$\bar{\phi} = V_0 \quad (22-d)$$

식 (20)과 식 (21)에 경계조건 (22)를 적용하여 미정계수를 결정하고,  $\bar{v}(z)$ 와  $\bar{\phi}(z)$ 의 해를 구하면 다음과 같다.

$$\bar{v}(z) = \frac{V_0 e_{51}}{2 \frac{e_{51}^2}{\epsilon_{11}} (1 - \cos kl) - \mathcal{G} kl \cos kl} \cdot [\cos k(l-z) - \cos kz] \quad (23)$$

$$\bar{\mathcal{Z}}(z) = \frac{V_0}{2 \frac{e_{51}^2}{S_{11}} (1 - \cos kl) - \bar{C}kl \cos kl} \cdot \left\{ \frac{e_{51}^2}{S_{11}} [\cos k(l-z) - \cos kz - \cos kl + 1] - (\bar{C}k \sin kl)z \right\} \quad (24)$$

식 (23)과 식 (24)에서 분모를 0으로 하는 특성방정식은 다음과 같다.

$$2 \frac{e_{51}^2}{S_{11}} (1 - \cos kl) - \bar{C}kl \cos kl = 0 \quad (25)$$

단,  $\cos kl \neq 1$ 이다.

압전 변환기의 비틀림 진동에 대한 공진 특성을 알아보는 방법으로, 주파수의 함수로 표현되는 임피던스 식을 유도한다. 변환기의 양단이 자유로운 경우의 전기적 변위에 대한 식을 구하기 위해서 식 (23)과 식 (24)를 식 (13)에 대입하여 정리하면 다음과 같이 된다.

$$D_z = \frac{V_0 \frac{S_{11}}{11} \bar{C}k \sin kl}{2 \frac{e_{51}^2}{S_{11}} (1 - \cos kl) - \bar{C}kl \sin kl} \quad (26)$$

또한, 전류  $I$ 는 다음과 같이 정의 된다.

$$I = - \frac{\partial}{\partial t} \int_A D_z da \quad (27)$$

식 (26)을 식 (27)에 대입하여 적분하고,  $Z = V_0/I$ 에 대입하여 임피던스  $Z$ 를 구한다. 이렇게 구해진 임피던스의 크기는 다음과 같다.

$$|Z| = \left| \frac{1}{\omega C} \left( 1 - \frac{2e_{51}^2(1 - \cos kl)}{\bar{C}kl \frac{S_{11}}{11} \sin kl} \right) \right| \quad (28)$$

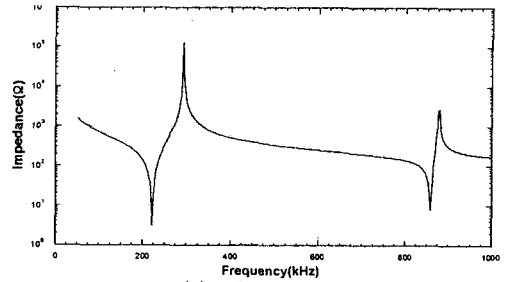
여기서,  $C (= \frac{S_{11}A}{11})$ 는 캐패시턴스에 해당하고,  $A$ 는 압전 변환기의 전극 면적이다.

### 3. 해석 결과 및 고찰

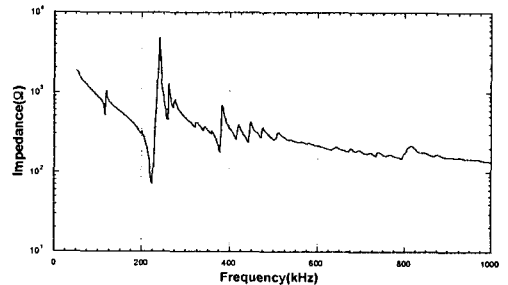
#### 3.1 수치 계산

본 논문에서 실험에 사용한 압전 원판은 미국 EDO사의 EC-65라는 PZT소재로 만들어졌다.  $\theta$  이 소재에 대한 물성치  $\omega$ 로부터 환산된 물성치가 Table 1에 정리되어 있다. 압전체의 크기는 외부 지름 30mm, 내부 지름 15mm, 두께 4mm이며, 원환 형상을 하고 있다. 이들이 수치 계산과 유한요소 해석에 사용되었다. 해석 결과를 확인하기 위하여, 앞 절에 유도된 식들에 Table 1의 물성치와 크기를 대입하여 수치 계산을 하였다. 파동수  $k$ 와 진동수  $f$ 는 다음과 같은 관계가 있다.

$$f = \frac{kc}{2\pi} \quad (29)$$



(a) calculation



(b) experiment

Fig. 2 Impedance curves

공진 주파수는 식 (25)로부터 구할 수 있다. Mathematica의 FindRoot 기능을 사용하여 근을 구하였고  $\omega$ , 파동수  $k$ 와 압전체의 두께  $l$ 이 곱해진 무차원수를 구한 후 진동수  $f$ 를 얻는다. 이렇게 계산된 고유진동수를 Table 2의 'theoretical analysis'에 기재하였다.

압전성이 고려된 진동 해석 결과에서 공진 주파수 221 kHz와 856 kHz를 찾았지만, 탄성 진동 해석에서는 211 kHz, 422 kHz와 633 kHz를 찾을 수 있었다. 식 (25)에서  $\cos kl \neq 1$ 이므로 강제 진동을 포함하여 짝수 모드의 공진 주파수가 압전 진동 해석에서는 나타나지 않기 때문이다.

#### 3.2 유한요소해석 결과와 비교

Fig. 1(a)와 같은 변환기를 Fig. 1(b)와 같이 단순화하여 이론적으로 해석한 것이 타당한지 확인하기 위하여, 유한요소 해석으로 비틀림 진동의 공진 주파수를 결정하고 이론적 해석 결과와 비교한다. 유한요소 해석에 Ansys  $\omega$ 를 이용하였으며, 유한요소 모델은 8 절점 육면체(SOLID5)로 두께방향과 반경방향으로 8등분, 원주방향으로 64등분해서 4096개 요소와 5472개 절점으로 구성되도록 하였다.

Table 2에 이론적 해석, 유한요소 해석과 측정된 결과를 반경 방향 모드  $m$ 과 두께 방향 모드  $n$ 으로 정리하였다. 압전성이 고려되지 않은 압전체의 공진 주파수와 압전성이 고려된 압전체의 공진 주파수를 비교하였다. 유한요소 해석에서는 Fig. 3과 같이 강제 모드 진동과 1차 모드 진동을 찾았다. 유한요소 모델은 Fig. 1(a)와 같이 8등분하여 4곳만을 선택하여 분극 처리된 압전체와 비압전체가 결합된 구조이다. 이론적 해석에서는 분극 영역을 구분하지 않았는데 (0, 1)

모드의 진동수로 계산된 221 kHz는 분극 영역을 제대로 구분한 유한요소해석의 결과인 228 kHz와 매우 유사하다.

### 3.3 실험결과와 비교

진동수  $f$ 의 함수로 임피던스 크기  $|Z|$ 를 식 (28)로부터 계산하고, 그 결과를 Fig. 2(a)에 그래프로 나타내었다. 이 그래프에서 극소점의 위치가 공진 주파수이다. 이론적 해석 결과를 확인하기 위해 압전 비틀림 진동 변환기를 사용하여 실험을 하였다. Impedance Gain/Phase Analyzer(HP 4194A)를 사용하여 주파수의 함수로 임피던스를 측정하는 결과를 Fig. 2(b)에 도시하였다. Fig. 2(b)에서 뚜렷한 극소점 위치인 235 kHz가 해석결과에 대응된다. 그 외에도 극소점들이 실험 결과에는 나타나지만 비틀림 진동 해석 결과와는 대응하지 않는다.

### 4. 결론

비틀림 변환기용 압전 원환의 진동특성을 해석하여 특성방정식을 유도하였다. 특성방정식에 물성치를 대입하여 고유진동수를 계산하였고, 유한요소해석을 수행하여 수치계산과 비교하였다.

원주방향으로 분극된 압전체를 이론적 해석의 모델로 삼았고, 8등분하여 4곳을 선택하여 분극한 구조를 유한요소해석 모델로 삼았다. 수치 계산 결과와 유한요소해석 결과가 유사하게 나타난다. 제작한 압전체로 실험하여 해석 결과와 잘 맞는 공진주파수를 측정하였다. 이와 같은 해석 결과를 토대로, 강제 모드와 1차 모드 진동의 압전 비틀림 진동 공진주파수를 확인하였다.

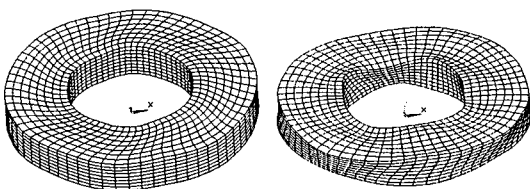
### 참고 문헌

Table 1 Material properties of PZT (EDO EC-65)

Properties		Values	
Mechanical	Mass density, $\rho$	$7.50 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$	
	Elastic stiffness	$C_{11}^E$	$97.6 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
		$C_{12}^E$	$48.8 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
		$C_{13}^E$	$79.2 \times 10^9 \text{ N/m}^2$
$C_{33}^E$		$21.4 \times 10^9 \text{ N/m}^2$	
Dielectric	Permittivity $\epsilon_{33}^T (=k_{33}^T/\epsilon_0)$	$15.2 \times 10^{-9} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$	
Electro-mechanical	Piezoelectric strain constants	$e_{31}$	$-9.2 \text{ C/m}^2$
		$e_{33}$	$15.4 \text{ C/m}^2$
		$e_{15}$	$12.5 \text{ C/m}^2$

Table 2 Comparison of natural frequencies

Mode (m, n)	Fundamental frequency (kHz)			
	Theoretical analysis		FEM	Experiment
	Elastic	Piezoelectric	Piezoelectric	
(0, 0)	0	-	-	-
(1, 0)	-	-	128.6	118.9
(0, 1)	211.1	221.1	228.5	235.2
(0, 2)	422.3	-	-	-



(a) (1, 0) mode (b) (0, 1) mode

Fig. 3 Mode shape obtained by FEM

- (1) I. J. Busch-Vishniac, 1999, Electromechanical Sensors and Actuators, Springer-Verlag, New York, Chapter 5.
- (2) Mishiro, S., 1987, "Torsional Vibration Apparatus", United States Patent 4,652,786
- (3) 권오수, 김진오, 2001, "압전 비틀림 파동 변환기 제작 및 평가", 비파괴검사학회지, 제21권 제4호, pp. 434~438.
- (4) 권오수, 김진오, 2000, "압전 비틀림 변환기의 진동특성 해석", 한국소음진동공학회지, 제10권 제6호, pp. 995~962.
- (5) M. Brissaud, N. Aurelle, D. Roche, C. Richard, 1996, "Two-dimensional model for shear piezoceramic characterization", Ultrasonics, Vol. 34, pp. 83~86.
- (6) IEEE Standard on Piezoelectricity, 1987, ANSI/IEEE Std. 176.
- (7) K. F. Graff, 1991, Wave Motion in Elastic Solids, Dover, New York, Chapter 2.
- (8) D. K. Miu, 1993, Mechatronics: Electromechanics and Contromechanics, Springer-Verlag, New York, Chapter 6.
- (9) EDO Corporation, 2003, Piezoelectric Ceramic Materials and Shapes Downloads, <http://www.edoceramic.com/Downloads/downloads.htm>, p. 2.
- (10) 이경희 역, 1991, 세라믹 유전체 공학, 대광문화사, 서울, 제 8장.
- (11) S. Wolfram, 1999, The Mathematica Book, 4th ed., Wolfram Media Inc., Cambridge University Press.
- (12) TaeSung Software & Engineering Inc., 2003, Introduction to Finite Element Analysis using Ansys, 4rd ed, Gye-Lim.