

개구부를 갖는 변단면 후판의 자유진동해석 Free Vibration Analysis of Tapered Opening Thick Plate

○ 김일중*
Kim, il jung

Abstract

This paper has the object of investigating natural frequencies of tapered thick plate, tapered ratio, thick plate's opening size by means of finite element method and providing kinetic design data for mat of building structures. Free vibration analysis that tapered thick plate in this paper. Finite element analysis of rectangular plate is done by use of rectangular finite element with 8-nodes. In order to analysis plate which is varied of plate thickness, the thickness is varied with 5, 10, 15, 20 and the tapered ratio is applied as 0.0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0 respectively. This paper is analyzed varying thickness by taper ratio.

키워드 : 유한요소 해석법, 고유진동수, 변단면 후판, 변단면율, 유공판

Key Words : Finite Element Method, Natural frequency, Tapered thick Plate, Taper ratio, Opening plate

1. 서론¹⁾

현대 건축물은 고층화, 대형화 되어가고 있으며 건축물이 요구하는 기능에 따라 다양한 기하학적 형태를 나타내고 있다. 건축물이 대규모화 되고 형태도 다양해짐에 따라 구조물의 경제성과 역학적인 효율성을 높이기 위해 변단면으로 시공되기도 한다. 예를 들어 지하층 바닥의 집수정, 파이프 덕트를 위한 개구부, 지하주차장 경사로 등로 등을 들 수 있다.

본 연구에서 다루는 개구부를 갖는 변단면 후판은 위의 경우와 같은 판구조를 이상화 하여 진동의 영향을 고려한 연구로, 국내에도 지진의 발생빈도가 증가되고 외력에 의한 건물의 진동영향을 조절하거나 방지 또는 억제할 수 있는 연구가 필요하여 이에 대한 적절한 대안을 제시할 수 있는 것으로 판단된다.

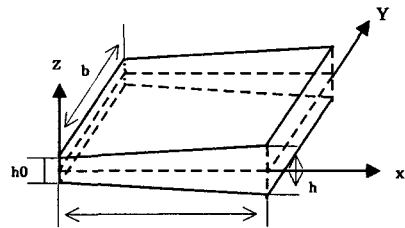
국내에서는 아직 이러한 연구의 필요성에 비해 현재까지 변단면 후판에 대한 연구는 활발히 이루어지지 못하였으나, 최근 연구동향으로는 전단층을 갖는 탄성지반위에 놓인 자유진동해석(6) 과 탄성보에 의해 지지된 등변분포 면내력을 받는 보강판의 좌굴해석(7) 등 많은 연구가 발표되었다. 국외 연구로는 1950년대 D. Young(1), G. B Warburton(2), A., W. Leissa(3)에 의해 등방질 판의 자유 진동에 대한 연구가 시작된 이후 1996년 A. R. ukreti와 J.Farsa 와 C. W Bert(4)는 미분구적법 과 Rayleigh-Ritz Method 를 이용하여 단순지지 된 변단면 후판의 자유진동에 관한 연구를 시행하였으며 Y. K. Cheung과 D. Zhou(5)는 2003년에 Timoshenko Beam Function을 이용한 변단면 후판의 진동해석을 하였다.

개구부를 갖는 변단면 후판을 해석하기 위하여 유한요소법을 이용하였으며 8절점 세켄티피디 요소계를 활용하였다. 변단면 후판의 자유진동 해석을 하기 위하여 개구부의 크기 변화와 개구부의 위치 변화, 단면두께의 변화율(Tapered Ratio)과 폭두께 비의 변화에 따른 결과를 상호 비교 검토하였다.

2. 유한요소해석

변단면 후판을 분석하기 위하여 본 연구에서는 유한요소해석법을 이용하였는데 적용방법에 대해 알아보면 후판요소와 변형 에너지, 운동 에너지를 구하고 가상일의 원리를 이용하여 이들 변분을 0으로 놓아 고유치 방정식을 산정한다.

2.1 변단면 후판의 진동해석



여기서, $\overline{a \times b}$ (전체 판의 크기)

Fig. 1 Global Coordinate System of Tapered Plate

* 정회원, 공학박사 전북과학대학 건축토목계열 조교수

2.1.1 후판요소

변단면 후판의 두께 h 는 길이에 따라 변하므로 함수로 나타내면 다음과 같다.

$$h = h_0 f(\xi) \tag{1}$$

여기서, h_0 는 $x=0$ 일 때 판의 두께, $\xi = \frac{x}{a}$

$f(\xi) = 1 + \alpha\xi$, $\alpha = (h - h_0/h_0)$: Taper Ratio

변단면 후판의 휨 강성은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$D = D_0 f(\xi)^3 \tag{2}$$

여기서, $D_0 = Eh_0^3/12(1-\nu)$

판 요소의 크기를 $a \times b$ 로 정의 할 때 무차원 좌표계는 $\xi = (x - x_0)/a$, $\eta = (y - y_0)/b$ 를 이용한 8절점 Serendipity 요소를 사용하는 경우 요소내의 임의의 위치에 대한 변위를 행렬형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = [N] \{ \delta_e \} \tag{3}$$

여기서, w : 판 요소의 수직변위
 θ_x : 판 요소의 x 방향 회전각
 θ_y : 판 요소의 y 방향 회전각

$$\{ \delta_e \} = [w_1 \ \theta_{x1} \ \theta_{y1} \ w_2 \ \theta_{x2} \ \theta_{y2} \ \dots \ w_8 \ \theta_{x8} \ \theta_{y8}]$$

$$[N] = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix}$$

이 경우 8절점 요소계의 형상함수는 다음과 같다.

$$N_i = \frac{1}{4} \xi_i^2 \eta_i^2 \xi \eta (\xi + \xi_i)(\eta + \eta_i) + \frac{1}{4} \{ (1 - \xi_i^2)(1 + \eta_i \eta)^2 (1 - \xi^2) + (1 - \eta_i^2)(1 + \xi_i \xi)^2 (1 - \eta^2) \} \tag{i=1, 2, \dots, 8}$$

2.1.2 후판의 진동해석

후판의 진동을 해석하기 위해 8절점 Serendipity 요소계를

사용하였으며 판 요소의 운동에너지 T_e 와 변형에너지 U_e 를 구하여 각 요소를 조합하고 이들의 변분을 0으로 놓아 고유치 방정식을 얻을 수 있다.

전체 판에 대한 가상일의 원리는 다음과 같다.

$$\delta(T - U) = 0 \tag{4}$$

여기서, T : 판 전체요소의 운동에너지
 U : 판 전체요소의 변형에너지

후판요소의 운동에너지 (T_e)는 정리하면 다음과 같다.

$$T_e = \frac{1}{2} \int_{-a}^a \int_{-b}^b \rho (h \dot{w}^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\theta}_x^2 + \frac{h^3}{12} \dot{\theta}_y^2) dx dy \tag{5}$$

여기서, ρ : 단위 면적당 후판의 질량

식(5)에 식(3)을 대입하여 정리하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$T_e = \frac{1}{2} \delta_e^T [M_e] \delta_e \tag{6}$$

여기서, δ_e : 시간에 따른 판 요소의 절점변위 변화율
 $[M_e]$: 판 요소의 질량행렬

후판 요소의 변형에너지 U_e 는 다음과 같이 나타낼 수 있다

$$U_e = \frac{1}{2} \int_A [M]^T \chi dA + \frac{1}{2} \int_A [Q]^T \psi dA \tag{7}$$

여기서, $[Q]$: 전단력 $[M]$: 모멘트
 dA : $dx \cdot dy$ ψ : 전단변형
 χ : 곡률

모멘트, 곡률, 절점변위와 관계, 전단력, 전단변형 등을 고려한 식(3)을 식(6)에 대입하면 다음과 같이 정리 할 수 있다.

$$U_e = \frac{1}{2} \delta_e^T [K_e] \delta_e \tag{8}$$

여기서, $[K_e]$: 판 요소의 휨·전단 강성행렬

판 요소의 운동에너지와 변형에너지를 전체 판에 대한 것으로 조합하고 식(4)에 대입하면 다음과 같은 고유치 방정식을

얻을 수 있고 이 방정식에서 각 고유진동수 ω_e 와 진동 mode δ 를 얻을 수 있다.

$$[K] - \omega_e^2[M] = 0 \quad (9)$$

여기서, [K] : 후판의 전체 강성매트릭스
 ω_e : 후판의 고유진동수
 [M] : 후판의 질량 매트릭스

3. 비교 분석 및 적용

3.1 검증

본 연구에서 유한요소 해석 프로그램을 개발하고 기존 이론해와 비교하여 정확성을 검토 하였다. 비교분석을 위한 판의 변단면 판의 제 계수들은 참고 문헌과 동일하다.

Table 1은 개구부가 없는 상태에서의 변단면 후판의 α 의 변화에 따른 고유진동수를 유한요소 프로그램해와 참고 문헌해와 비교한 것이다. 이 경우 최대 0.56%의 오차를 나타내어 본 연구를 위한 신뢰성을 확인 할 수 있었다.

Table 1. Frequency of Tapered Thick Plate

$$(\lambda^2 = \alpha a^2 \sqrt{\rho/D_0})$$

α	Reference 4)	This Study	Error(%)
0.2	21.59051	21.58787	0.01
0.4	23.54861	23.45184	0.19
0.6	25.37844	25.29344	0.33
0.8	27.23463	27.08043	0.56

$$\text{error(\%)} = |\text{This Study} - \text{Reference}| \times 100 / \text{Reference}$$

3.2 변단면 후판의 자유진동해석

본 연구에서 개발한 프로그램을 이용하여 유공 변단면 후판의 자유진동해석을 시행하였다.

분석을 위한 판의 제 계수들은 다음과 같다

탄성계수 (E) : $2.1 \times 10^6 \text{ kgf/cm}^2$

포와송비 (ν) : 0.3

판의 크기 : 600 cm × 600 cm

판의 폭 두께비 : 5, 10, 20, 50

판 지지상태 : 4변 단순지지

Tapered Ratio : 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1.0
 개구부의 크기와 위치는 Fig.2와 같다.

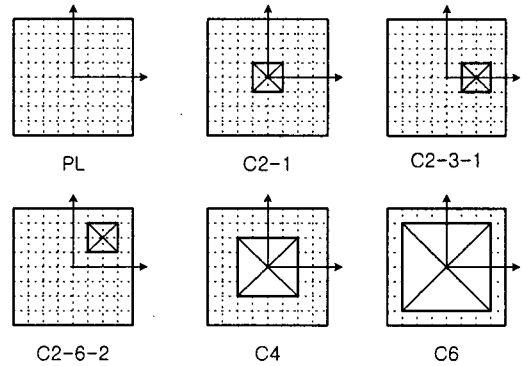


Fig.2 Opening Sizes and Position

Fig. 3은 폭두께비가 20인 변단면판의 중앙에 개구부가 위치할 경우 개구부 위치에 따른 고유진동수 변화를 나타낸 것으로 개구부가 있는 변단면 판의 경우 개구부가 없는 변단면 판에 비해 무차원 고유진동수가 증가하는 것을 볼 수 있으며 개구부의 크기가 커질수록 무차원 고유진동수 역시 커짐을 알 수 있다.

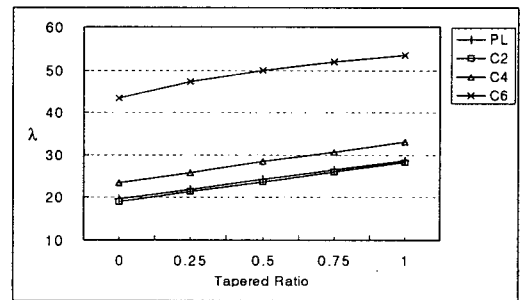


Fig.3 Natural Frequency of Variations of Tapered Ratio versus Variations of Opening Size

Fig. 4는 중앙에 2×2 크기의 개구부를 갖는 변단면 후판의 폭두께비가 5, 10, 20, 50으로 변화했을 경우 Tapered Ratio 변화에 따른 무차원 고유진동수 변화를 나타 낸 것이다. 변단면 후판의 Tapered Ratio가 증가할수록 변단면 후판의 무차원 고유진동수도 증가하며, 판의 폭두께비가 커질수록 무차원 고유진동수도 증가함을 알 수 있다.

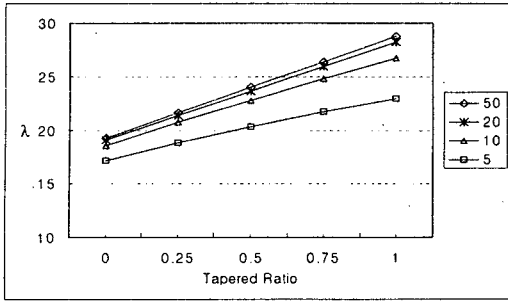


Fig.4 Natural Frequency of Variations of Tapered Ratio versus Variations of Plate Thickness

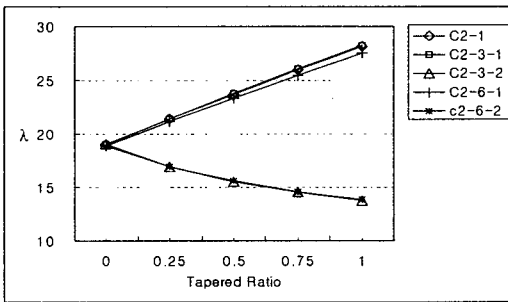


Fig.5 Natural Frequency of Variations of Tapered Ratio versus Variations of Opening Position

Fig.5는 2×2 크기의 개구부의 위치와 Tapered Ratio가 변화함에 따른 변단면 판의 무차원 고유진동수를 나타낸 것이다. 개구부가 판의 중앙에 위치할 경우에 비해 개구부가 모서리나 지지단에 가까워질수록 무차원 고유진동수가 변화하는데, 개구부가 판의 두께가 두꺼운 쪽에 위치한 경우 개구부가 중앙에 위치한 경우에 비해 Tapered Ratio가 증가함에 따라 무차원 고유진동수가 증가하나 개구부가 판의 두께가 얇은 쪽에 위치한 경우 개구부가 중앙에 위치한 경우에 비해 Tapered Ratio가 증가함에 따라 무차원 고유진동수는 감소하는 것을 볼 수 있다.

4. 결론

이 연구는 개구부를 갖는 유공 변단면 후판의 자유진동에 관한 것이다. 판의 해석은 Mindlin 판 이론을 적용하였다. 이 연구의 결과로 다음과 같은 결론을 얻었다. (1) 본 연구에서 산출한 개구부가 없는 변단면 후판의 고유진동수와, 참고 문헌해와 매우 근사하였다.

(2) 변단면 판의 경우 개구부가 없는 변단면 판에 비해 무차원 고유진동수가 증가하는 것을 볼 수 있으며, 개구부의 크기가 커질수록 무차원 고유진동수 역시 커짐을 알 수 있다.

(3) 중앙에 개구부가 있는 변단면 후판의 Tapered Ratio가 증가할 수록 변단면 후판의 무차원 고유진동수도 증가하며, 판의 폭두께비가 커질수록 무차원 고유진동수도 증가함을 알 수 있다.

(4) 개구부가 판의 두께가 두꺼운 쪽에 위치할 때의 무차원 고유진동수는 개구부가 중앙에 위치한 경우에 비해 Tapered Ratio가 증가할수록 증가하나, 개구부가 판의 두께가 얇은 쪽에 위치한 경우는 오히려 개구부가 중앙에 위치한 경우에 비해 무차원 고유진동수는 감소하는 것을 볼 수 있다.

참고 문헌

- (1) D. Young, "vibration of rectangular plates by the Rayleigh-Ritz method: J. appl. Mech. 17 pp. 448-453, 1950.
- (2) G. B. Warburton, "The vibration of rectangular plates", Proc. Institute of Mechanical Engineers, pp. 371-384, 1953.
- (3) A. W. Leissa, "vibration of plates" NASA SP-160, 1969.
- (4) Differential quadrature and Rayleigh-Ritz method to determine The fundamental frequencies of simply supported rectangular plates with linearly varying thickness. J. sound and vibration pp.103-122, 1996
- (5) Vibration of tapered Mindlin plates terms of statics Timoshenko beam functions. J. sound and vibration pp. 693-709, 2003.
- (6) 이병구(1994). "진단층을 갖는 탄성지반위에 놓인 보의 자유진동해석," 한국전산구조공학회논문집 6(3).
- (7) 이용수, 김일중, 오숙경, 김성용(1997). "탄성보에 의해 지지된 등변분포 면내력을 받는 보강판의 좌굴해석," 대한건축학회 춘계학술발표회 논문집 17(1).
- (8) 이용수, 김일중, 오숙경(2003). "비균질 Pasternak 지반 위에 놓인 면내력을 받는 후판의 진동해석," 한국강구조학회 논문집.
- (9) Hiratoki Matsunaga, "Vibration and Stability of thick plates in elastic foundations", J. Engineering Mechanics, pp27-34, 2004.