

Beck 기둥의 안정성 해석

Stability Analysis of Beck's Column

이 병 구[†] · ○이 태 은* · 강 희 중** · 김 권 식**

Byoung Koo Lee, Tae Eun Lee, Hee Jong Kang and Gwon Sik Kim

Key Words : Beck's Column(Beck 기둥), Divergence Critical Load(발산임계하중), Flutter Critical Load(동요임계하중), Flutter Frequency(동요진동수), Follower Force(종동력), Tangential Follower Force(접선종동력), Subtangential Follower Force(경사종동력)

ABSTRACT

The purpose of this paper is to investigate free vibrations and critical loads of the uniform Beck's columns with a tip spring, carrying a tip mass. The ordinary differential equation governing free vibrations of such Beck's column subjected to a follower force is derived based on the Bernoulli-Euler beam theory. Both the divergence and flutter critical loads are calculated from the load-frequency curves that are obtained by solving the differential equation numerically. The critical loads are presented in the figures as functions of various non-dimensional system parameters such as the mass moment of inertia and spring parameter.

1. 서 론

기둥은 보, 평판 등과 함께 구조물을 형성하는 가장 기본적인 구조요소로 다양한 조건을 갖는 기둥요소의 자유진동 및 안정성 문제에 관한 많은 연구가 이루어져 왔다. 이 연구들에서는 기둥을 연속계 또는 이산계로서 모형화하였으며, 기둥에 작용하는 축하중은 그림 1(a)와 같은 보존력 또는 그림 1(b), (c)와 같은 비보존력을 고려하였다.^(1,2)

Beck 기둥과 같이 비보존력의 일종인 종동력(follower force)을 받는 구조물의 실현성 여부에 관한 논란이 있었다.⁽³⁾ 최근 제어이론의 정립과 기술개발로 자동제어가 이루어지는 구조물이 많이 축조되고 있으며, 이러한 구조계는 비보존력을 형성하고 있어 Beck 기둥과 같이 비보존력을 받는 구조물의 안정성 문제는 현대 공학에서 매우 중요하게 다루어지고 있다.⁽⁴⁾

1952년에 Beck⁽⁵⁾이 그림 1(c)에 보인 접선종동력(tangential follower force)을 받는 캔틸레버 기둥의 임계하중을 처음으로 구한 이후에 비보존력인 종동력을 받는 기둥의 진동 및 안정특성에 관한 많은 연구가 이루어졌다.

1977년 Pedersen⁽⁶⁾은 그림 1(b)와 같은 경사종동력

(subtangential follower force)이 작용하고 자유단에 스프링 및 집중질량을 갖는 등단면 캔틸레버 기둥의 안정성에 관한 연구를 수행하였다. 1985년 윤한익 등⁽⁷⁾은 고정단의 스프링 상수가 말단질량을 갖는 Beck's column의 안정성에 미치는 영향에 대한 연구를 수행하였으며, 1996년 Sato⁽⁸⁾는 자유단에 집중질량을 갖고 종동력이 작용하는 Timoshenko 보의 동적 불안정성을 연구하였다. 1997년 윤한익 등⁽⁹⁾은 자유단이 회전스프링으로 구속된 Beck 기둥의 안정성에 대한 연구를 수행하였고, 1999년 Langthjem과 Sugiyama⁽¹⁰⁾는 종동력이 작용하는 캔틸레버 기둥의 동적 안정에 대한 최적 형상을 산출하였다.

보존력이 작용하는 구조물은 반드시 발산임계하중(diver-

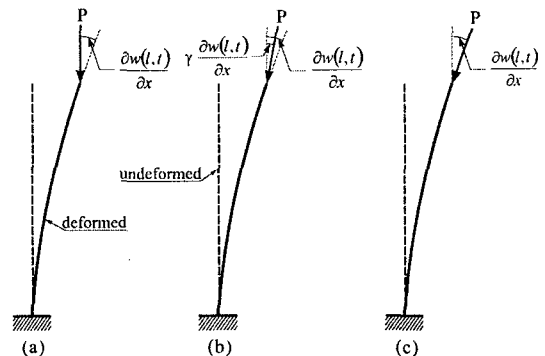


그림 1. 보존력과 비보존력이 작용하는 기둥

[†] 정희원, 원광대학교 토목환경공학과 교수
E-mail : bkleest@wonkwang.ac.kr
Tel : (063) 850-6718 Fax : (063) 857-7204

* 정희원, 원광대학교 토목환경공학과 강의교수

** 정희원, 원광대학교 대학원 토목환경공학과 박사과정

gence critical load)을 갖는 것은 잘 알려진 사실이다. 비보존력이 작용하는 구조물은 기하적 형상, 경계조건 및 비보존력의 특성에 따라서 발산임계하중 또는 동요임계하중을 갖는다. 이와 같은 비보존력을 받는 구조물의 안정성 해석은 정적 개념에 의해서는 해석할 수 없고 관성효과가 고려된 동적 개념에 의한 해석이 수행되어야 한다.

이 논문은 비보존력인 경사중동력이 작용하는 Beck 기둥의 고유진동수와 임계하중에 관한 연구이다. 이러한 Beck 기둥의 자유진동을 지배하는 미분방정식과 경계조건을 유도하고 이를 수치해석하여 고유진동수를 산출하였다. 이 연구에서 얻어진 하중-고유진동수 관계를 이용하여 발산 및 동요임계하중을 산출하였으며, 기둥의 세변수 변화에 따른 임계하중의 영향을 고찰하고 이를 그림에 나타내었다.

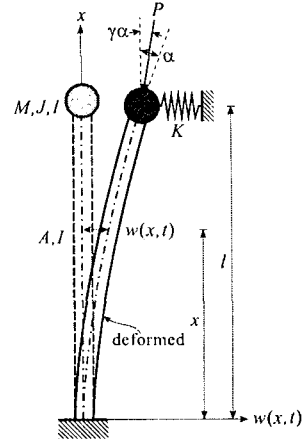


그림 2. 기둥의 진동형 및 세 변수

2. 수학적 모형

2.1 지배 미분방정식

그림 2에서 점선은 길이가 l 이고, 자유단이 스프링으로 지지되어 있는 Beck 기둥을 나타내며, 실선은 자유단에 경사중동력 P 가 작용하고 있는 진동형의 예를 나타낸다.

이 그림에서 A 와 I 는 기둥의 단면적과 단면2차모멘트를 나타내며, M 은 질량관성모멘트가 J 인 집중질량의 크기, K 는 자유단 스프링의 스프링 상수이다. α 는 자유단의 단면 회전각이며, γ 는 하중 P 의 경사 정도를 나타내는 경사변수(subtangential parameter)이다. 또한 $w(x, t)$ 는 횡방향 진동 변위이고 t 는 시간이다.

Bernoulli-Euler보 이론에 의한 기둥의 자유진동을 지배하는 편미분방정식은 다음 식 (1)과 같다.

$$EI \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + P \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \rho A \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

여기서 E 와 ρ 는 기둥 재료의 탄성계수 및 밀도이다.

기둥의 자유진동을 조화진동으로 가정하면, 횡방향의 동적 변위는 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$w(x, t) = w_x \sin(\omega_i t) \quad (2)$$

여기서 w_x 는 조화진동의 진폭으로 x 만의 함수이며, ω_i 는 고유각진동수(r/s), i 는 모드 번호이다.

지배미분방정식을 무차원으로 유도하기 위하여 다음과 같은 무차원 변수를 도입한다.

$$\xi = x/l \quad (3)$$

$$\eta = w_x/l \quad (4)$$

$$p = Pl^2/(EI \omega_i) \quad (5)$$

$$\mu = M/(\rho A l) \quad (6)$$

$$j = J/(\rho A I^3) \quad (7)$$

$$k = KI^3/(EI \omega_i) \quad (8)$$

$$C_i = \omega_i l^2 \sqrt{\rho A} / (EI \omega_i) \quad (9)$$

여기서 식 (3), (4)의 (ξ, η) 는 직교좌표계 (x, w_x) 를 기둥 길이 l 로 정규화한 무차원 직교좌표계이며, p 는 무차원 하중, μ 는 기둥 전체질량에 대한 집중질량의 비, j 는 무차원 질량관성모멘트, k 는 무차원 스프링 강성, C_i 는 무차원 고유진동수이다.

식 (1)에 식 (2)를 대입하고, 식 (3)~(9)의 무차원 변수를 이용하여 정리하면 식 (10)과 같이 기둥의 자유진동을 지배하는 무차원 미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\frac{d^4 \eta}{d\xi^4} = -p \frac{d^2 \eta}{d\xi^2} + C_i^2 \eta \quad (10)$$

2.2 경계조건

기둥하단 ($x=0$)은 고정지점이므로 자유진동의 진폭은 $w_x=0$ 이고 단면회전각은 $dw_x/dx=0$ 이 된다. 여기에 식 (3), (4)의 무차원 변수식을 적용하면 다음의 무차원 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\eta=0, \xi=0 \text{ 에서} \quad (11)$$

$$\frac{d\eta}{d\xi}=0, \xi=0 \text{ 에서} \quad (12)$$

자유단 ($x=l$)은 집중질량과 스프링으로 구성되어 있으

므로 자유단에서의 휨모멘트는 $EI d^2 w_x / dx^2 = \omega_i^2 J dw_x / dx$ 전

단력은 $EI d^3 w_x / dx^3 = -P(1-\gamma) dw_x / dx + (K - \omega_i^2 M) w_x$ 이

다. 이 식들에 무차원 변수인 식 (3)~(9)를 적용하면 무차원 경계조건을 다음의 식들과 같이 유도할 수 있다.

$$\frac{d^2\eta}{d\xi^2} - iC_i^2 \frac{d\eta}{d\xi} = 0, \xi=1 \text{에서} \quad (13)$$

$$\frac{d^3\eta}{d\xi^3} + i(1-\gamma) \frac{d\eta}{d\xi} + (\mu C_i^2 - k)\eta = 0, \xi=1 \text{에서} \quad (14)$$

2.4 수치해석 방법

유도된 미분방정식을 식 (11)-(14)의 경계조건을 이용하여 수치해석하면 무차원 고유진동수 C_i 및 진동형 $\chi(\xi)$ 을 구할 수 있다. 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta법을 이용하였으며, 미분방정식의 고유치인 C_i 를 산출하기 위하여 Regula-Falsi법을 결합한 시행착오적 행렬값 탐사법을 이용하였다.^(11,12)

본 연구에서는 $i=1, 2$ 의 최저차 2개의 C_i 를 산출하였다. 이렇게 산출된 하중 단계별 고유진동수를 이용하여 전형적인 하중-고유진동수 관계를 예로 들면 다음 그림 3과 같다.

이 그림에서 증동력 p 가 증가함에 따라 C_i 는 감소하고 $C_1=0$ 이 되는 □로 표시된 좌표의 p 값이 발산임계하중 p_d 이다. 발산임계하중에서 기둥은 정적으로 좌굴한다. 그림 1(a)에서 $\gamma=0$ 인 Euler기둥은 반드시 발산임계하중을 갖는다. 이 그림의 또 다른 곡선에서 $C_1=C_2$ 가 되는 ■로 표시된 좌표의 p 값이 동요임계하중 p_f 이고, 이때의 C_i 값이 동요고유진동수(flutter frequency) C_f 이다. 동요임계하중에서는 2개의 진동형이 서로 같아지기 때문에 기둥이 자유진동하게 되면 기둥은 동요하여 동적 불안정 상태에 빠진다. 그림 1(c)에 보인 $\gamma=1$ 인 접선중동력이 작용하는 경우에는 반드시 동요임계하중을 갖는다. 한편, 그림 1(b)에 보인 $0 < \gamma < 1$ 인 경사중동력이 작용하는 기둥에서는 γ 값의 크기

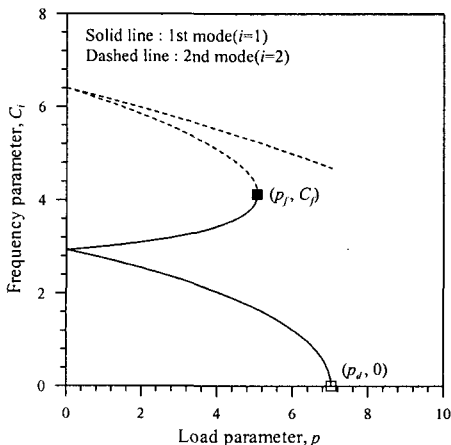


그림 3. 하중-고유진동수 곡선의 예

에 따라서 임계하중의 형태가 발산 또는 동요임계하중으로 달라질 수 있다.

3. 수치해석 예 및 고찰

그림 4는 $\mu=0.3, k=0/10, \gamma=0.5/1.0$ 인 기둥에 대하여 무차원 질량관성모멘트 j 의 변화에 따른 동요임계하중 p_f 의 변화를 나타낸 그림이다. 이 그림에서 실선은 $k=10$, 점선은 $k=0$ 인 경우를 나타낸다. 이 그림을 살펴보면 $k=0, \gamma=0.5$ 인 경우를 제외하고 j 가 증가함에 따라 임계하중은 감소하다가 일정 j 값에서 최소값을 보인 후 다시 증가하며, $k=0$ 즉, 스프링이 없는 경우보다 $k=10$ 인 경우에 그 변화가 더 크게 나타남을 알 수 있다.

그림 5는 $\mu=0.3, j=0.1, \gamma=0.5/1.0$ 인 기둥에서 스프링 강성 k 의 변화에 따른 임계하중 p_d, p_f 의 변화를 나타낸 그림이다. 이 그림에서 k 값이 증가하면 발산임계하중(실선)

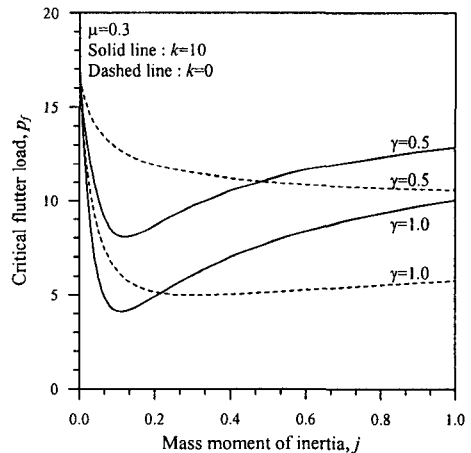


그림 4. 질량관성모멘트-임계하중 곡선

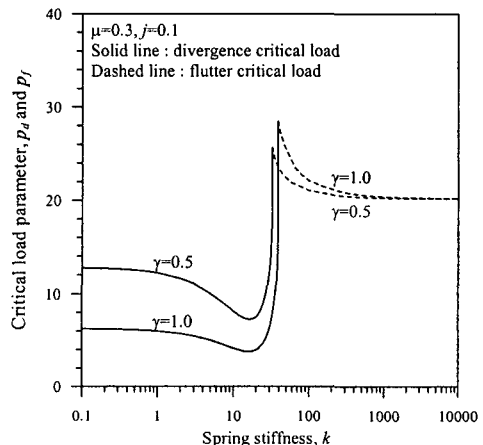


그림 5. 스프링강성-임계하중 곡선

은 감소하다가 최소값을 보인 후 증가하며, 일정값에 도달하게 되면 동요임계하중(점선)으로 변환된다. 발산임계하중은 $\gamma=0.5$ 인 경우가 $\gamma=1.0$ 인 경우보다 임계하중의 크기가 크며, 동요임계하중은 $\gamma=1.0$ 인 경우가 $\gamma=0.5$ 인 경우보다 큼을 알 수 있다. 또한 임계하중의 형태가 변화되는 k 값은 $\gamma=1.0$ 인 경우가 $\gamma=0.5$ 인 경우보다 크다. k 값이 1000에서 두 경우 모두 일정값의 임계하중으로 수렴해 감을 알 수 있는데, 이는 k 가 1000정도에 도달하면 기둥 자유단이 회전지점의 형태로 전환되어 k 값이 더 이상 증가하여도 임계하중의 변화가 거의 나타나지 않는다.

4. 결 론

이 논문은 자유단에 집중질량 및 스프링을 갖고 경사중동력이 작용하는 Beck 기둥의 안정성에 관한 연구이다. 대상기둥의 자유진동을 지배하는 미분방정식과 경계조건을 유도하고 이를 수치해석하여 고유진동수 및 진동형을 산출할 수 있는 수치적 기법을 개발하였다. 이 연구에서 얻어진 하중-고유진동수 곡선으로부터 발산임계하중 및 동요임계하중을 산출하였다. 수치해석의 결과를 분석하여 무차원 질량관성모멘트 및 스프링 강성이 임계하중에 미치는 영향을 고찰하였다. 이 연구의 결과는 Beck 기둥의 정·동적 안정해석에 유용한 자료를 제공할 수 있을 것으로 기대한다.

참 고 문 헌

(1) Bokaian, A., 1988, "Natural frequencies of beams under compressive axial loads", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 126, pp. 49-65.
 (2) 류봉조, 임경빈, 이종원, 한재섭, 1999, "2층 탄성기초 위에 놓인 불균일 테이퍼진 보의 진동과 안정성", 한국소음진동공학회 논문집, 한국소음진동공학회, 제 9권, pp. 828-834.
 (3) Koiter, W.T., 1996, "Unrealistic follower forces", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 194, pp. 636-638.

(4) Sugiyama, Y., Langthjem, M.A. and Ryu, B.J., 1999, "Realistic follower forces", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 225, pp. 779-782.

(5) Beck, M., 1952, "Die Knicklast des einseitig eingespannten, tangential gedrückten Stabes". *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, Vol. 3, pp. 225-228.

(6) Pedersen, P., 1977, "Influence of boundary conditions on the stability of a column under non-conservative load", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 13, pp. 445-455.

(7) 윤한익, 김광식, 1985, "고정단의 스프링 상수가 말단 질량을 가진 Beck's column의 안정성에 미치는 영향", 대한기계학회 논문집, 제 8권, 제 2호, pp. 119-126.

(8) Sato, K., 1996, "Instability of a clamped-elastically restrained Timoshenko column carrying a tip load subjected to a follower force", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 194, pp. 623-630.

(9) 윤한익, 임순홍, 유진석, 1997, "자유단이 회전 스프링으로 구속된 Beck 기둥의 안정성", 대한기계학회 논문집, 제 21권, 제 9호, pp. 1385-1391.

(10) Langthjem, A. and Sugiyama, Y., 1999, "Optimum shape design against flutter of a cantilevered column with an end-mass of finite size subjected to a non-conservative load", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 226, pp. 1-23.

(11) Lee, B.K. and Oh, S.J., 2000, "Elastica and buckling load of simple tapered columns with constant volume", *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, pp. 2507-2518.

(12) Lee, B.K., Carr, A.J., Lee, T.E. and Ahn D.S., 2005, "Elastica and buckling loads of shear deformable tapered columns", *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 5, No. 3, pp. 317-335.