

압전 변환기의 내부 불완전 접촉을 고려한 해석 모델

Analysis Model of a Piezoelectric Transducer with Incomplete Contact

김대승* · 김진오†

Dae Seung Kim, Jin Oh Kim

Key Words : Piezoelectric Transducer(압전 변환기), Vibration Resonance(공진), Pre-pressure(예압)

ABSTRACT

This paper develops an analysis model of a piezoelectric transducer. The transducer considered in this paper is a bolt-clamped Langevin-type transducer, which consists of a couple of piezoelectric discs, a couple of metal blocks for added mass effect, and a bolt to tighten them. A new analytical model for the transducer has been developed by taking into account the contact area between the piezoelectric ceramic and the metal block. The analysis model is verified by calculating the variations of the resonance frequency due to the contact area and comparing them with reported experimental results.

1. 서론

진동수 범위가 수십 kHz 또는 그 이상인 진동을 활용하는 초음파 기술들은 센서와 액추에이터에 활용되고 있고, 초음파 발생에 압전 세라믹으로 구성된 변환기가 주로 사용된다.⁽¹⁾ 초음파의 에너지를 이용하기 위해서는 압전 변환기의 출력 파위가 커야 하므로 큰 압축-팽창을 반복한다. 그런데 세라믹 재료는 인장에 취약하므로, 취성 파괴를 예방하기 위해서 볼트 체결에 의한 압축 하중을 가한 상태에서 작동되는 변환기를 사용한다. 이러한 변환기를 BLT (Bolt-clamped Langevin-type Transducer)라 부른다. 이러한 BLT의 단면도가 Fig. 1(a)에 보여 있다.

세라믹의 고유진동수가 높으므로 이를 낮추기 위해서 압전 세라믹 양쪽에 금속 블록을 결합하여 부가질량 효과를 준다.⁽²⁾ 그런데 예압 형태의 압축하중이 변환기의 고유진동수를 변화시킨다.⁽³⁾ 따라서 변환기 설계 시에 예압을 고려한 해석이 필요하다. 지금까지 보고된 연구들은 대개 압축 하중이나 입력 전압의 크기에 따른 압전 세라믹의 물성치 변화에 초점이 맞춰져 있다.^(4,5) 그러나 압축 하중의 크기가 작을 때에는 물성치 변화가 별로 나타나지 않으므로, 물성치 변화로써 고유진동수 변화를 설명하는 데에 한계가 있다. 압전 세라믹과 금속 블록의 접촉 면적 변화로 고유진동수

변화를 설명한 이론이 있으나,⁽⁶⁾ 모델링에 사용된 경계 조건이 가역성(reciprocity)를 충족시키지 못하므로 불완전하다.

본 논문은 압전 변환기의 예압에 따른 고유진동수 변화를 설명하는 해석 모델을 세우는 것을 목적으로 한다. 압전 세라믹은 분말성형 방법으로 고온 소결하는 과정을 거쳐 제작되므로, 원판형으로 제작할 때 양면이 완벽하게 평면이 되지 못하고 약간 굽어 있다. 따라서 금속 블록과 결합될 때 접촉 면적이 단면적 보다 작고, 결합력을 증가시킴에 따라 접촉 면적이 커진다.⁽⁶⁾ 본 논문은 압전 세라믹과 금속 블록의 접촉 면적을 함수로 하는 새로운 변환기 해석 모델을 제시하여, 예압에 따른 공진특성 변화를 해석하고 그 결과를 기존 실험 결과와 비교하여 검증한다.

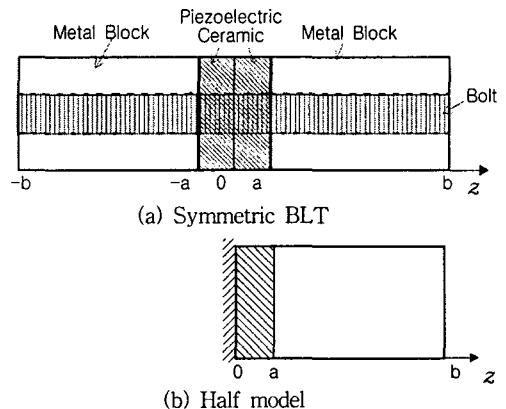


Fig. 1 Structure of a piezoelectric transducer.

* 숭실대학교 대학원 기계공학과

† 숭실대학교 공과대학 기계공학과

E-mail : jokim@ssu.ac.kr

Tel : (02) 820-0332, Fax : (02) 820-0338

2. 해석 모델 개발

Fig. 1(a)의 대칭 구조 랑주방향 변환기에 대해서 다섯 개의 경계면에 대한 경계 조건을 대입하여 해를 구하려면 상당히 복잡해진다. 따라서 Fig. 1(b)에서처럼 대칭면의 한 쪽 부분만을 대상으로, 대칭면이 고정된 경계 조건을 설정하여 해를 구한다. 이러한 해석 방법은 비틀림 변환기에 적용된 바 있다.⁽²⁾

2.1 연결봉 모델

금속 블록과 결합하는 압전 세라믹 원판이 약간 굽어 있는 상황을 조금 과장하면 Fig. 2(a)와 같다. 이 상황은 덕트 내의 파동 전파 중에 슬릿(slot)이 있는 경우로 모델링 할 수 있다.⁽⁷⁾ 그러나 슬릿 부위에서 파동은 2차원 거동을 하므로 내부 불완전 접촉을 갖는 압전 변환기 모델에 대해 1차원적인 진동 해석이 불가능하다.

그런데 이를 파동 전파의 관점에서 보면 비접촉면은 파동을 차단하므로, 1차원적으로 해석하고자 할 때 Fig. 2(b)와 같이 간주할 수 있다. 즉, 접촉면적과 같은 단면 크기를 갖는 봉으로 세라믹과 블록이 연결되어 있는 것으로 모델화하는 것이다. 이때 연결봉의 재질은 세라믹의 재질과 같은 것으로 간주하고, 연결봉의 길이 l 을 알게 되면 각 경계면에서의 조건을 설정하여 진동 해석을 할 수 있다.

Fig. 2(b)의 모델에 있어서 두 불연속면에서의 음압 반사율로부터 총 음압 반사율을 구한 후, 이로부터 총 파워 전달률을 구한다.⁽⁸⁾ 첫 번째 불연속면은 영역 I과 영역 II의 경계면으로서, 동일재질이되 단면적이 불연속이다. 두 번째 불연속면은 영역 II와 영역 III의 경계면으로서, 재질과 단면적이 불연속이다. 각 영역에서의 음향 임피던스를 n , n_I , n_{II} 라 할 때, 총 파워 전달률은 다음과 같이 표현된다.⁽⁸⁾

$$T = \frac{4}{2 + \left(\frac{r_{III}}{r_I} + \frac{r_I}{r_{III}}\right) \cos^2 k_{II} l + \left(\frac{r_{II}^2}{r_I r_{III}} + \frac{r_I r_{III}}{r_{II}^2}\right) \sin^2 k_{II} l} \quad (1)$$

여기서 $k_{II} = \omega/c_p$ 로서 c_p 는 영역 II의 재질인 세라믹에서 파동의 전파속도이고 ω 는 각 주파수이다. 각 영역에서의 음향 임피던스는 다음과 같다.⁽⁸⁾

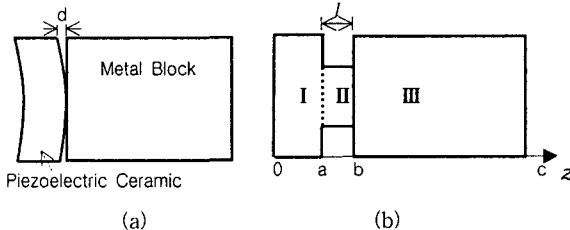


Fig. 2 Half model of a BLT consisting of a piezoelectric ceramic and a metal block.

$$r_I = \frac{\rho_p c_p}{S}, \quad r_{II} = \frac{\rho_p c_p}{S_c}, \quad r_{III} = \frac{\rho_m c_m}{S}$$

여기서 ρ_p 와 ρ_m 은 각각 세라믹과 금속 블록의 밀도, S 와 S_c 는 세라믹과 금속 블록의 단면적과 접촉면적, 그리고 c_m 은 금속블록에서 파동의 전파속도이다.

식 (1)에서 길이 l 은 아직 미지수이다. 다음에서 다루는 슬릿 모델에서 파워 전달률을 구하여, 연결봉 모델의 파워 전달률과 비교함으로써 연결봉의 길이 l 을 결정한다.

2.2 슬릿 모델

A. 2차원 유동

덕트에서의 파동을 묘사하는 파동방정식 또는 헬름홀츠(Helmholtz)방정식으로 봉에서의 진동을 표현하되, 덕트 단면 폭이 과장에 비해 작을 때 그 식을 라플라스(Laplace)방정식으로 근사화 할 수 있다.⁽⁷⁾ 이는 포텐셜 유동(potential flow)을 나타내는 식과 같으므로, 파동 문제를 유동으로 등가화 하여 모델링을 하였다. 게다가 Fig. 2(a)에 보인 바와 같이 두 소재 간에 접촉하는 부분은 유동을 통과시키는 슬릿으로 간주하여 Fig. 3과 같은 모델을 고려한다. 속도 퍼텐셜 $\psi(r, z)$ 로 표현한 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \approx 0 \quad (2)$$

여기서 z 방향 및 r 방향의 입자 속도 v_z 및 v_r 와 유동함수 θ 및 포텐셜 함수 ψ 와의 관계는 다음과 같다.

$$v_z = \frac{\partial \psi}{\partial z} = \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial r}, \quad v_r = \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial z} \quad (3a, b)$$

이는 반경방향 좌표 r 과 축방향 좌표 z 로 표현되는 2차원 문제이므로, 복소 변수 $x = z + r i$ 를 사용하여 다음과 같이 복소함수 $F(x)$ 로 다룰 수 있다.^(7,9)

$$F(x) = \psi(z, r) + i \frac{1}{r} \theta(z, r) \quad (4)$$

이에 대한 도함수는 다음과 같이 *로 표기된 켈레복소수 미분으로 표현되며, 이는 유동의 속도 벡터에 해당한다.

$$\frac{dF^*}{dx^*} = v_z + i v_r \quad (5)$$

여기서 x -평면과 F -함수 사이의 자코비안 J 는 다음과 같다.

$$J = \frac{\partial(\psi, \theta)}{\partial(z, r)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \psi}{\partial z} & \frac{\partial \psi}{\partial r} \\ \frac{\partial \theta}{\partial z} & \frac{\partial \theta}{\partial r} \end{vmatrix} = r \left| \frac{dF}{dx} \right|^2 \quad (6)$$

B. 슬릿의 인덕턴스

Fig. 3(a)에서 유동은 rz 평면과 나란하고 z 축을 중심으로 축대칭을 이루고 있다. 따라서 정상상태 유동을 찾기 위해 Fig. 3(b)처럼 원주면 경계를 이루는 점들을 $\xi = \xi + i\eta$ 평면의 ξ 축으로 Schwartz-Christoffel 변환에 의해 일대일 사상시킬 수 있다.⁽⁹⁾ 이때 이들의 관계는 다음과 같다.⁽⁷⁾

$$L_a^T = \frac{4(\rho_p + \rho_m)}{\pi D} \ln\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2\alpha}\right) \quad (17)$$

여기서

$$\alpha = \cot\left(\frac{\pi}{4} \sqrt{\frac{S_c}{S}}\right) \quad (18)$$

이고, $D (= 2\pi R)$ 는 원주 둘레이다.

C. 파워 전달률

$z=0$ 에서 오른쪽 금속 블록 방향의 저항은 다음과 같다.⁽⁸⁾

$$R_0 = \frac{\rho_m c_m}{S} \quad (19)$$

앞에서 구한 인덕턴스 L_a^T 와 저항 R_0 로부터 음향 임피던스 Z 가 다음과 같이 표현된다.

$$Z = R_0 + j X_0 = R_0 + j \omega L_a^T \quad (20)$$

따라서 파동 파워 투과율은 다음과 같다.⁽⁸⁾

$$T = \frac{4R_0\rho_p c_p/S}{(R_0 + \rho_p c_p/S)^2 + X_0^2} = \frac{4r_{III}r_I}{(r_{III} + r_I)^2 + (\omega L_a^T)^2} \quad (21)$$

식 (1)과 (21)을 비교하여 연결봉의 길이 l 을 구한다. 그 결과는 다음과 같다.

$$l = \frac{1}{q} s = \frac{c}{\omega} \sin^{-1} \frac{\omega L_a^T}{\sqrt{-r_I^2 + r_{II}^2 - r_{III}^2 + \frac{r_I^2 r_{III}^2}{r_{II}^2}}} \quad (22)$$

3. 변환기 진동 특성 해석

3.1 진동 해석

Fig. 2(b)의 연결봉 모델의 세 영역에 대한 지배방정식의 해는 각각 다음과 같은 형태로 된다.

$$\text{영역 I } U_I(z) = A_I \sin pz + B_I \cos pz \quad (23a)$$

$$\Phi_I(z) = h_{33}(A_I \sin pz + B_I \cos pz) + k_1 z + k_2 \quad (23b)$$

$$\text{영역 II } U_{II}(z) = A_{II} \sin pz + B_{II} \cos pz \quad (23c)$$

$$\text{영역 III } U_{III}(z) = A_{III} \sin qz + B_{III} \cos qz \quad (23d)$$

이들로부터 각 영역의 응력은 다음과 같이 표현된다.

$$T_I(z) = p c_{33}^D (A_I \cos pz - B_I \sin pz) - h_{33} D \quad (24a)$$

$$T_{II}(z) = q Y_m (A_{II} \cos pz - B_{II} \sin pz) \quad (24b)$$

$$T_{III}(z) = q Y_m (A_{III} \cos qz - B_{III} \sin qz) \quad (24c)$$

각 영역의 경계면에서의 조건은 다음과 같이 설정된다.

$$z = 0 \text{ 에서 } U_I(0) = 0, \Phi_I(0) = 0 \quad (25a)$$

$$z = a \text{ 에서 } U_I(a) = U_{II}(a), T_I(a) = n T_{II}(a), \Phi_I(a) = V_0 \quad (25b)$$

$$z = b \text{ 에서 } U_{II}(b) = U_{III}(b), n T_{II}(b) = T_{III}(b) \quad (25c)$$

$$z = c \text{ 에서 } T_{III}(c) = 0 \quad (25d)$$

여기서 n 은 단면적 비로서 $n = S_I/S_{II}$ 이다.

경계조건을 적용하여 계수들을 구하고, 임피던스를 유도하면 다음과 같다.

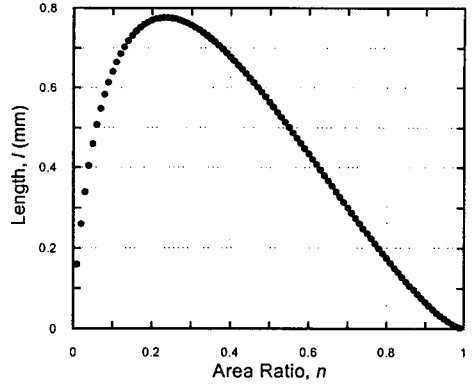


Fig. 4 Variation in the length l of the connecting rod with the area ratio n .

$$|Z| = \frac{1}{\omega C_0} \left| 1 - \frac{h_{33}^2 [n p c_{33}^D \cos p(b-a)]}{\beta_{33}^2 a \Delta} - \frac{-q Y_m \tan q(c-b) \sin p(b-a)}{\beta_{33}^2 a \Delta} \right| \quad (26)$$

여기서

$$\Delta = p c_{33}^D \{ n p c_{33}^D [\cos p(b-a) \cot pa - n \sin p(b-a)] - q Y_m \tan q(c-b) [\sin p(b-a) \cot pa + n \cos p(b-a)] \}$$

이다. 이로부터 압전 변환기의 공진 주파수를 구한다.

3.2 결과 및 고찰

접촉 면적 비에 따른 연결봉의 길이를 식 (22)로부터 계산하여 Fig. 4에 도시하였다. 접촉 면적 비가 0일 때, 연결봉의 길이는 0이다. 접촉 면적 비가 0.2보다 작을 때에는 접촉 면적 비가 증가함에 따라 연결봉의 길이가 증가한다. 접촉 면적 비가 0.25보다 클 때에는 접촉 면적 비가 증가함에 따라 연결봉의 길이가 감소한다. 접촉 면적 비가 1일 때, 즉 완벽하게 접촉할 때에 연결봉의 길이가 0이 된다.

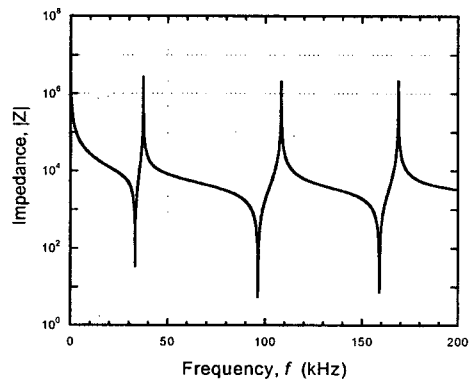


Fig. 5 Impedance curve calculated as a function of frequency.

식 (26)에 물성치와 치수를 대입하여 구한 임피던스 곡선의 한 예가 Fig. 5에 보여 있다. 여기서 극소점의 위치가 공진 주파수이고 극대점의 위치가 반공진 주파수이다. 알루미늄 블록의 두께가 13 mm 인 경우에 대하여, 접촉 면적비에 따른 고유 진동수 계산 결과를 Fig. 6에 제시하였다.

Fig. 2(a)처럼 굽어 있는 압전 세라믹과 금속 블록이 결합되어 있을 때, 예압에 따른 세라믹과 금속 블록 사이의 접촉 면적을 계산하기 위해 유한 요소 해석을 실시하였다. 각각 d 가 7 μm 일 때, 예압과 접촉 면적의 관계는 다음과 같이 되었다.

$$n(P) = -0.0004P^2 + 0.0362P + 0.1662 \quad (28)$$

식 (28)로부터 예압 P 에 따른 접촉 면적 비 n 을 구하여 식 (26)에 대입하면, 예압에 따른 변환기의 공진 주파수가 계산된다. 그렇게 계산된 결과를 Fig. 7에 나타내었고 기존의 실험 결과⁽³⁾와 비교하였다. 비교 결과 경향이 대체로 잘 맞는 것을 확인하였다. 따라서 예압에 따른 압전 변환기의 공진 특성을 해석하는 모델이 타당하게 설정된 것을 확인할 수 있다.

4. 결론

압전 변환기의 압전 세라믹과 금속 블록의 접촉 면적 변화를 함수로 하는 해석 모델을 개발하였다. 해석 모델은 접촉 면적과 같은 단면 크기를 갖는 봉으로 세라믹과 금속 블록이 연결되어 있는 구조이다. 해석 모델에서 유도한 임피던스 식으로부터 접촉 면적 변화에 따른 공진 주파수를 구하였다.

그리하여 기존의 실험 결과와 비교하여 해석 모델의 타당성을 검증하였다.

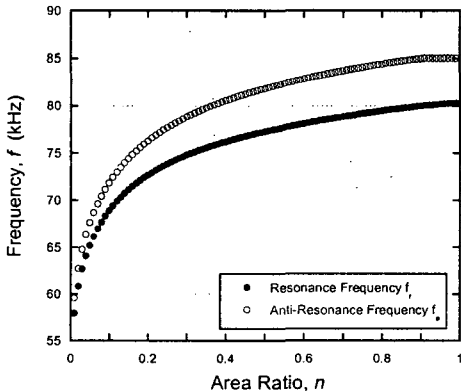


Fig. 6 Variation in the resonance and anti-resonance frequencies with area ratio n .

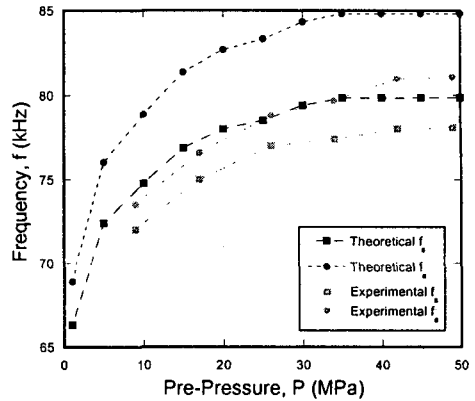


Fig. 7 Variation in resonance and anti-resonance frequencies with the pre-pressure.

참고 문헌

- (1) I. J. Busch-Vishniac, 1999, *Electromechanical Sensors and Actuators*, Springer-Verlag, New York, Chapter 5.
- (2) 권오수, 김진오, 2001, "랑주방형 압전 비틀림 변환기의 진동특성," *대한기계학회논문집*, 제25권, 제8호, pp. 1197~1205.
- (3) F. J. Arnold, S. S. Muhlen, 2001, "The resonance frequencies on mechanically pre-stressed ultrasonic piezotransducers," *Ultrasonics*, Vol. 39, pp. 1~5.
- (4) R. Nishi, 1996, "Effects of one-dimensional pressure on the properties of several transducer ceramics," *Journal of the Acoustical Society of America*, Vol. 40, No. 2, pp. 486~495.
- (5) C. H. Xu, J. H. Hu, H. L. W. Chan, 2002, "Behavior of a PZT ring under non-uniform mechanical stresses," *Ultrasonics*, Vol. 39, pp. 735~742.
- (6) F. J. Arnold, S. S. Muhlen, 2001, "The mechanical pre-stressing in ultrasonic piezotransducers," *Ultrasonics*, Vol. 39, pp. 7~11.
- (7) P. M. Morse and K. U. Ingard, 1968, *Theoretical Acoustics*, McGraw-Hill, New York, pp. 483~488.
- (8) L. E. Kinsler, A. R. Frey, A. B. Coppens, J. V. Sanders, 2000, *Fundamentals of Acoustics*, 4th ed., John Wiley & Sons, New York, Chapters 6 & 10.
- (9) F. B. Hildebrand, *Advanced Calculus for Applications*, 2nd edition, Prentice-Hall, New Jersey, 1976, Chapter 11.