

유체가 흐르는 인장 가능한 곡선관의 고유진동수 해석

정 두 한[†] · 정 진 태^{*}

Natural Frequency Analysis of an Extensible Curved Pipe Conveying Fluid

Duhan Jung and Jintai Chung

Key Words : Natural Frequency (고유진동수), Curved Pipe Conveying Fluid(유체가 흐르는 곡선관).

Abstract

The vibration of a curved pipe conveying fluid is studied when the pipe is clamped at both ends. To consider the nonlinearity, this study adopts the Lagrange strain theory for large deformation and the extensible dynamics based on the Euler-Bernoulli beam theory for slenderness assumption. By using the Hamilton principle, the non-linear partial differential equations are derived. To investigate the dynamic characteristics of the system, the discretized equations of motion are derived from the Galerkin method. The natural frequencies varying with the flow velocity are computed. From these results, we should consider the nonlinearity to analyze dynamics of a curved pipe conveying fluid more precisely.

1. 서 론

유체가 흐르는 곡선관은 광범위한 산업분야에서 일반적인 배관계를 구성하기 위하여 널리 사용되고 있다. 따라서 배관계의 안정성과 신뢰성을 확보하기 위해서는 유동 효과를 고려한 관의 동특성 변화를 해석하고 검토하는 것이 필수적이다.

지금까지 내부에 유체가 흐르는 직선관에 대한 연구는 많은 연구자들에 의하여 발표되었으나, 진동 특성이 상대적으로 복잡한 곡선관에 대한 연구는 아직 미흡한 실정이다. Chen 은 최초로 유체가 흐르는 곡선관을 모델링하고 연구하였으나, 양단이 고정된 곡선관의 중심선이 인장 불가능하다는 가정을 적용하였다. 반면, Hill 과 Davis⁽¹⁾는 곡선관 내부의 유체 유동에 의한 관의 초기 장력을 고려한 연구를 수행하여 양단이 고정된 곡선관은 불안정 현상이 발생하지 않는다는 결론을 얻었다. 또한 Misra *et al.*⁽²⁾은 파이프의 중심선이 인장 가능하다는 가정을 사용하여 불안정 현상이 발생하지 않는다는 Hill 의 연구와 동일한 결론을 얻었다.

그러나 이들 연구들은 비선형성을 고려함에 있어서 차수근사법(order-of-magnitude)과 미소변형 이론을 사용하여 유도과정이 복잡하고, 미소변형 이론은 선형계에 적합한 이론이므로 기하학적 비선형성을 고려함에 있어서 다소 비 논리적이다. 최근, Lee 와 Chung⁽⁴⁾은 변형에 대한 비선형성을 고려함에 있어서 미소변형을 대신 일반적인 Lagrange 변형 이론을 이용하여 직선관의 진동에 대한 새로운 해석 모델을 제시하였다.

본 논문에서는 양단이 고정된 유체를 수송하는 곡선관에 대한 진동해석을 수행하였다. 더욱 현실성이 있는 인장 가능 이론을 적용하였고, 변형에 대한 기하학적 비선형성을 고려하기 위하여 Lagrange 변형 이론을 사용하였다. Hamilton 원리로부터 면내운동에 대한 비선형 방정식을 유도하여 기존 연구와 비교하였다. 특히 비선형 항의 효과를 고찰하기 위하여 비선형 항이 무시된 선형의 경우와 평형위치 부근에서 선형화된 경우로 분리하여 유동 속도에 따른 고유진동수를 계산하고 결과를 비교 검토하였다. 최종적으로, 몇 가지 유동 속도에서 파이프의 동적 응답을 계산하여 해석 결과를 검증하였다.

[†] 회원, 한양대학교 대학원 정밀기계공학과

E-mail : dhjung@ihanyang.ac.kr

Tel : 031) 406-6964 Fax : 031) 406-5550

^{*} 회원, 한양대학교 기계정보경영공학부

2. 운동방정식

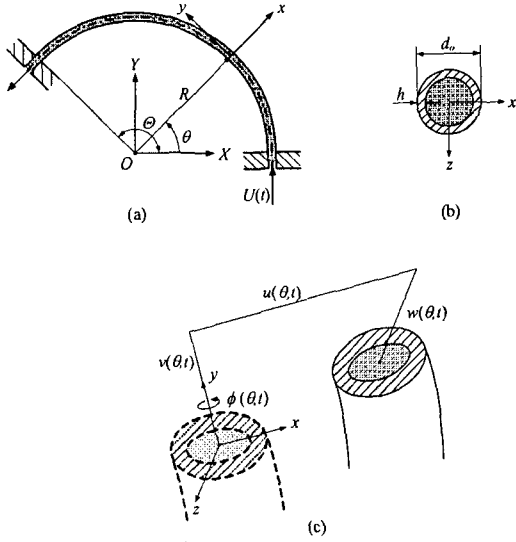


Fig. 1 Schematics of a semi-circular pipe conveying fluid with both ends clamped.

내부 유체가 유동하는 곡선관에 대한 지배방정식을 유도하기 위해 Fig. 1 과 같이 양단이 고정된 곡률 반경 R , 총 각도 θ , 외경 d_0 , 두께 h 인 곡선관을 고려한다. 관 내부에는 비압축성 유체가 속력 $U(t)$ 로 흐르고 있다. 그림에서 XYZ 는 공간 상에 고정된 관성 좌표계를 나타내고, xyz 는 극좌표계 $r\theta$ 에 부착된 지역 좌표계를 나타낸다. 또한 변형 전 파이프는 점선으로 나타내었고, 변형 후 파이프는 실선으로 나타내었다. 본 연구에서 파이프 단면의 치수가 반경 및 길이에 비하여 상당히 작다고 하여 Euler-Bernoulli 빔으로 모델링 하였다. 따라서 변형 전 파이프의 중심선 상에 있는 점의 변형은 반경방향 변위 u , 원주방향 변위 v , 면의 굽힘방향 변위 w 그리고 비틀림 회전각 ϕ 로 표현된다. 그러면 파이프 단면에 있는 임의의 점의 변위는 중심선의 변위를 사용하여 다음 식으로 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned} u_x &= u(\theta, t) + z\phi(\theta, t) \\ u_y &= v(\theta, t) + x\phi_x(\theta, t) - z\phi_\theta(\theta, t) \\ u_z &= w(\theta, t) - x\phi(\theta, t) \end{aligned} \quad (1)$$

여기서 ϕ_x 와 ϕ_θ 는 각각 면내방향 굽힘에 의한 z

축에 대한 회전각과 면외방향 굽힘에 의한 x 축에 대한 회전각을 나타내며, 회전각 ϕ_x 와 ϕ_θ 는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\phi_x = -(u' - v)/R, \quad \phi_\theta = w'/R \quad (2)$$

여기서 기호 프라임(prime)은 θ 에 대한 편미분을 나타낸다.

변위와 변형의 관계는 비선형성을 표현하기 위하여 Lagrange 변형을 이론을 적용한다. 원통좌표계에 대한 Lagrange 변형율에 따라, 중심선상에 있는 임의의 점의 원주방향 변형율은 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{\epsilon}_\theta^c = \bar{\epsilon}_\theta + \frac{1}{2}[(\bar{\epsilon}_\theta)^2 + (\phi_x')^2 + (\phi_\theta')^2] \quad (3)$$

여기서

$$\bar{\epsilon}_\theta = (u + v')/R \quad (4)$$

빔으로 모델링 된 곡선관은 1 차원 요소이므로 변형 전 파이프의 중심선에 수직인 단면은 변형 후에도 수직을 유지한다는 가정하에서 단면상 임의의 점에 대한 원주방향 변형율과 전단 변형율은 각각 다음 식으로 근사화된다.

$$\begin{aligned} \epsilon_\theta &= \bar{\epsilon}_\theta^c + x\phi_x'/R - z(\phi_\theta' - \phi)/R \\ \gamma_{x\theta} &= z(\phi' + \phi_\theta)/R, \quad \gamma_{z\theta} = -x(\phi' + \phi_\theta)/R \end{aligned} \quad (5)$$

다음으로 응력과 변형율의 관계를 고려하자. 관의 재료는 균질하고 등방성으로 탄성재질이라 가정한다. 또한 관의 두께 h 가 다른 차원에 비해 매우 작기 때문에 각 방향의 응력은 다음 식으로 표현될 수 있다.

$$\sigma_\theta = E\bar{\epsilon}_\theta^L, \quad \tau_{x\theta} = G\gamma_{x\theta}, \quad \tau_{z\theta} = G\gamma_{z\theta} \quad (6)$$

여기서 E 와 G 는 각각 영률과 전단 탄성계수를 나타내고 $\bar{\epsilon}_\theta^L$ 는 선형화된 원주방향 변형율이다. 곡선관의 탄성변형에 의한 변형에너지는 응력과 변형율의 곱으로 나타난다. 따라서 변형에너지의 변분은 다음 식으로 표현된다.

$$\delta V = \int_0^\theta \int_A (\sigma_\theta \delta \epsilon + \tau_{x\theta} \delta \gamma_{x\theta} + \tau_{z\theta} \delta \gamma_{z\theta}) R dA d\theta \quad (7)$$

다음으로 유체를 수송하는 곡선관의 운동에너지를 고려해보자. 관은 가느다란 빔으로 가정하였으므로 관 단면의 회전 관성효과와 유체의 이차 유동효과를 무시하면 곡선관의 운동에너지는 다음과 같이 근사화 된다.

$$T = \frac{1}{2} \int_0^{\theta} (m_p \bar{v}_p \cdot \bar{v}_p + I_m \dot{\phi}^2 + m_f \bar{v}_f \cdot \bar{v}_f) R d\theta \quad (8)$$

여기서 m_p 와 m_f 는 각각 단위길이당 관과 유체의 질량을 나타내고 I_m 은 관의 단위길이당 2 차 회전관성모멘트를 나타내며, 관과 유체의 속도벡터는 다음과 같다.

$$\bar{v}_p = \dot{u} \mathbf{e}_x + \dot{v} \mathbf{e}_\theta + \dot{w} \mathbf{e}_z \quad (9)$$

$$\bar{v}_f = [\dot{u} + U(u' - v)/R] \mathbf{e}_x + [\dot{v} + U(R + u + v')/R] \mathbf{e}_\theta + (\dot{w} + Uw'/R) \mathbf{e}_z \quad (10)$$

여기서 기호 도트(dot)는 시간 t 에 대한 편미분을 나타낸다.

유도한 변형 에너지 식 (7)과 운동에너지 식 (8)을 다음과 같은 확장된 Hamilton 원리에 적용한다.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V - \delta M) dt = 0 \quad (11)$$

여기서 t_1, t_2 는 임의의 시간, δ 은 변분 연산자를 나타내고, δM 은 경계를 통과하는 가상 운동변화량으로 다음과 같다.

$$\delta M = [m_f (\bar{v}_f \cdot \delta \mathbf{r}) (U \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{n})]_0^{\theta} \quad (12)$$

식 (11)을 정리하면, 아래와 같은 비선형 지배방정식과 경계조건이 얻어진다.

$$(m_p + m_f) \ddot{u} + 2m_f U (\dot{u}' - \dot{v})/R + m_f U^2 (u'' - u - 2v'')/R^2 + m_f \dot{U} (u' - v)/R + EI (u^{iv} - v^{iv})/R^4 + (EA/R) [\bar{\epsilon}_\theta + (\bar{\epsilon}_\theta)^2 + (\bar{\epsilon}_\theta \phi)'] = m_f U^2/R \quad (13)$$

$$(m_p + m_f) \ddot{v} + 2m_f U (\dot{u} + \dot{v}')/R + m_f U^2 (2u' + v'' - v)/R^2 + m_f \dot{U} (u + v')/R + EI (u^{iv} - v^{iv})/R^4 - (EA/R) [(\bar{\epsilon}_\theta)'] + 2\bar{\epsilon}_\theta (\bar{\epsilon}_\theta)' - \bar{\epsilon}_\theta \phi_i' = -m_f \dot{U} \quad (14)$$

$$(m_p + m_f) \ddot{w} + 2m_f U \dot{w}'/R + m_f U^2 w''/R^2 + m_f \dot{U} w'/R + EI (w^{iv} - R\phi'')/R^4 - GJ (w'' + R\phi'')/R^4 - (EA/R) (\bar{\epsilon}_\theta \phi_\theta)' = 0 \quad (15)$$

$$I_m \ddot{\phi} - EI (w'' - R\phi'')/R^3 - GJ (w'' + R\phi'')/R^3 = 0 \quad (16)$$

지배방정식 (13)~(16)을 살펴보면 반경 및 원주방향의 변위들과 면외방향의 변위는 서로 연성되어 있다. 한편, 식 (16)의 비틀림 변위는 면외방향의 변위하고만 연성 되어 있음을 알 수 있다.

다음과 같은 무차원 변수들을 도입하여 지배방정식을 일반화한다.

$$\begin{aligned} u^* &= \frac{u}{L}, \quad v^* = \frac{v}{L}, \quad w^* = \frac{w}{L}, \quad \phi^* = \phi, \\ t^* &= \sqrt{\frac{EI}{(m_p + m_f) L^2}} t, \quad \theta^* = \frac{R\theta}{L}, \quad \rho^* = \frac{L}{R} \\ U^* &= \sqrt{\frac{m_f}{EI}} LU, \quad \mu^* = \frac{m_f}{m_p + m_f}, \\ a^* &= \frac{AL^2}{I}, \quad b^* = \frac{GJ}{EI}, \quad c^* = \frac{(m_p + m_f)L^2}{I_m} \end{aligned} \quad (17)$$

식 (17)을 이용하면 다음과 같은 무차원화된 운동방정식을 구할 수 있다.

$$\ddot{u} + 2\sqrt{\mu} U (\dot{u}' - \rho \dot{v}) + U^2 (u'' - \rho^2 u - 2\rho v'') + u^{iv} - v^{iv} + \sqrt{\mu} \dot{U} (u' - \rho v) + \rho a \bar{\epsilon}_\theta (1 + \bar{\epsilon}_\theta) + a (\bar{\epsilon}_\theta \phi)' = \rho U^2 \quad (18)$$

$$\ddot{v} + 2\sqrt{\mu} U (\dot{u} + \dot{v}')/R + m_f U^2 (2u' + v'' - v)/R^2 + u^{iv} - v^{iv} + \sqrt{\mu} \dot{U} (u + v') - \rho (\bar{\epsilon}_\theta)' (1 + \bar{\epsilon}_\theta) + \rho a \bar{\epsilon}_\theta \phi_i' = -\sqrt{\mu} \dot{U} \quad (19)$$

$$\ddot{w} + 2\sqrt{\mu} U \dot{w}' + U^2 w'' + m_f \dot{U} w'/R + w^{iv} - \rho \phi'' - \rho b (\rho w'' + \phi'') - a (\bar{\epsilon}_\theta \phi_\theta)' = 0 \quad (20)$$

$$\ddot{\phi} - \rho c (w'' - \rho \phi'') - bc (\rho w'' + \phi'') = 0 \quad (21)$$

식 (18)~(21)에서 표현의 간편성을 위하여 기호 (*)는 생략되었다.

무차원 지배방정식 (18)~(21)에 대한 근사해를 구하기 위하여 본 연구에서는 Galerkin 방법을 적용한다. 변위 u, v, w, ϕ 를 각각 다음과 같은 비교함수의 급수해로 가정하여 대입한다.

$$u = \sum_{n=1}^N u_n(\theta) x_n^u(t), \quad v(\theta, t) = \sum_{n=1}^N V_n(\theta) X_n^v(t) \quad (19)$$

여기서 $U_n(\theta)$ 와 $V_n(\theta)$ 는 정지상태의 빔에 대한 고유함수를 이용하고, $X_n^u(t)$ 와 $X_n^v(t)$ 는 결정하여야 할 미지함수이고, N 은 비교함수의 총 수이다.

식 (18)과 (19)를 식 (16)과 (17)에 대입하고 가중 함수를 곱하여 영역 $0 \leq \theta \leq \pi$ 에 대하여 적분한다. 이상을 수행하면 다음과 같은 이산화된 비선형 행렬-벡터 방정식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}(t) + 2\beta\mathbf{U}\mathbf{G}\dot{\mathbf{X}}(t) + (\mathbf{K} + U^2\mathbf{B})\mathbf{X}(t) + \mathbf{N}(\mathbf{X}(t)) = \mathbf{F} \quad (20)$$

여기서 \mathbf{M} 은 질량행렬, \mathbf{G} 는 코리올리 힘과 연관된 행렬, \mathbf{K} 는 구조물의 강성행렬, \mathbf{B} 는 원심력과 연관된 행렬, \mathbf{N} 은 기하학적 비선형성 때문에 발생하는 비선형 벡터 그리고 \mathbf{F} 는 정적 평형상태와 연관된 힘 벡터를 나타낸다.

3. 고유진동수 해석

평형위치 부근에서 선형화된 섭동방정식으로 부터 계산된 고유진동수의 변화를 Fig. 2에 도시한 것이다. 이 경우 해석결과를 살펴보면 고유치의 실수부는 모두 0의 값을 가지고 유동속도가 증가하면서 첫번째 모드의 고유진동수는 약간 감소한다. 여기서 가장 주목할 점은 양단이 고정된 반원형 곡선관의 경우, 발산형 및 플러터 불안정 현상을 나타내지 않는다는 점이다. Hill과 Davis⁽⁵⁾, Misra et al.⁽⁷⁾도 파이프에 작용하는 초기 힘을 고려하여 동일한 결론을 유도하였으나, 유동속도에 따른 고유진동수는 약간의 차이가 있다. 기존의 연구는 유체의 원심력에 의한 초기 힘을 모델링하고 여기에 선형적인 변형의 관계식을 이용하여 유도한 것으로, 유동의 변화와 변위 사이의 복잡한 비선형성을 엄밀하게 표현하지 못한다. 본 연구에서는 기하학적인 비선형성을 고려하여 유체 유동에 의한 평형해를 구하고 선형화된 운동방정식을 이용하여 반원형 곡선관의 동특성을 해석하였다. 해석결과로부터 선형방정식이 반원형 파이프의 정적 평형상태를 적절하게 표현할 수 없기 때문에 반드시 기하학적인 비선형성을 고려하여 운동 방정식을 유도하여야 함을 알 수 있다.

4. 결론

본 연구에서 유체를 수송하는 양단 지지 반원형 곡선관에 대한 동특성을 조사하였다. 기하학적인 비선형성과 중심선의 인장 가능 이론을 적용하여 Hamilton 원리로부터 비선형 지배방정식을 유도하였다. 지배방정식에 나타난 비선형 항의 영향

을 규명하기 위하여 선형 방정식과 비선형 방정식으로부터 계산된 고유진동수를 계산하였다. 결과로부터 내부에 유체 유동이 있는 반원형 곡선관의 경우, 선형방정식은 유체 유동에 의한 평형상태를 적절히 표현할 수 없기 때문에 기하학적인 비선형성을 고려하여 평형위치를 구해야 함을 알 수 있다. 그리고 유동 속도에 따른 기하학적인 비선형성을 고려하여 평형위치에서 선형화된 운동방정식을 이용하여 동특성을 조사한 결과, 양단이 지지된 반원형 곡선관은 불안정 현상을 나타내지 않음을 알 수 있다.

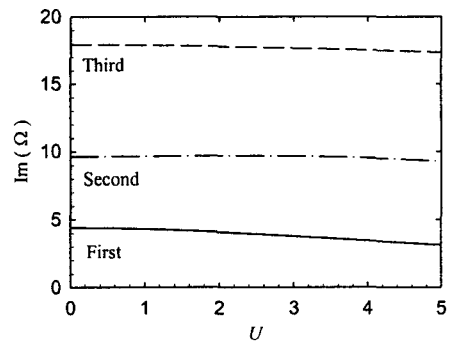


Fig. 2 Natural frequencies versus the flow velocity U results from the linearized equations.

참고문헌

- (1) J.L. Hill and C.G. Davis, 1974, "The effect of initial forces on the hydrostatic vibration and stability of planar curved tubes," *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 41, pp. 355~359.
- (2) A.K. Misra, M.P. Paidoussis and K.S. Van, 1988, "On the dynamics of curved pipes transporting fluid. Part II: extensible theory," *Journal of Fluid and Structures*, Vol. 2, pp. 245~261.
- (3) C. Dupuis and J. Rousselet, 1992, "The equations of motion of fluid conveying curved pipes," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 153, pp. 473~489.
- (4) C.H. Pak, S.C. Hong and T.J. Kim, 1997, "Chaotic vibration of a curved pipe conveying oscillatory flow," *Trans. of KSNVE*, Vol. 7, No. 3, pp. 489~498.
- (5) S.I. Lee and J. Chung, 2002, "New non-linear modelling for vibration analysis of a straight pipe conveying fluid," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 254, No. 2, pp. 313~325.
- (6) R.D. Blevins, 1979, *Formulas for natural frequency and mode shape*, Van Nostrand Reinhold.
- (7) A.E.H. Love, 1927, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, Cambridge University Press.