

# 층별변위 유한요소법에 기초한 점탄성층을 갖는 원통형 복합적층 패널의 진동해석

## Vibration Analyses of Cylindrical Hybrid Panel With Viscoelastic Layer Based On Layerwise Finite Elements

오일권\* · 성태홍\*

Il Kwon Oh and Cheng Tai Hong

**Key Words** : Vibration Damping(진동 감쇠), Layerwise Theory(층별변위이론), Cylindrical Hybrid Panel(원통형 복합적층 패널)  
Viscoelastic Layer(점탄성층)

### ABSTRACT

Based on a full layerwise displacement shell theory, the vibration and damping characteristics of cylindrical sandwiched panels with viscoelastic layers are investigated. The transverse shear deformation and the normal strain of the cylindrical hybrid panels are fully taken into account for the structural damping modelling. The present finite element model is formulated by using Hamilton's virtual work principle and the cylindrical curvature of hybrid panels is exactly modeled. Modal loss factors and frequency response functions are analyzed for various structural parameters of cylindrical sandwich panels. Present results show that the full layerwise finite element method can accurately predict the vibration and damping characteristics of the cylindrical hybrid panels with surface damping treatments and constrained layer damping.

### 1. 서 론

점탄성 재료를 사용하여 구속감쇠나 동시성형된 형태의 표면감쇠처리방법은 항공우주공학분야에서의 구조뿐만 아니라 자동차 분야에서의 오일팬 및 각종커버, 가전제품에서의 세탁기, 음향기기, 사무용기기 등의 진동 저감에 널리 이용되고 있다. 표면감쇠처리방법은 주구조물에 점탄성 재료나 감쇠 미케니즘을 구현할 수 있는 장치를 삽입하여 진동에너지를 흡수하고 이를 소산시킴으로써 감쇠효과를 극대화할 수 있는 기법을 말한다.

생활의 고급화로 인하여 환경에 대한 관심이 부각되면서 소음과 진동 저감에 대한 제품설계에 있어 저주파수 영역

뿐만 아니라 고주파수 영역까지 설계에 반영해야 할 필요성이 대두되었다. 이에 따라 점탄성 층의 두께가 상대적으로 두꺼워지고 횡방향 전단변형을 뿐만 아니라 수직변형을에 대한 효과를 정확히 파악하고 전체진동 특성에 미치는 영향에 관한 연구가 필요하게 되었다. 기존의 연구들을 살펴보면 감쇠처리 미케니즘 해석에서 점탄성 재료의 두께가 탄성평판의 두께보다 얇다는 가정으로 점탄성 재료의 수직변형을을 무시하고 일차의 횡방향 전단변형을만을 고려한 해석이 주로 이루어져 왔다.

최근에 점탄성층을 갖는 구조에 대한 정교한 해석적 모델링을 위한 연구결과들이 발표되었다. Saravanos and Pereira<sup>(1)</sup>는 이산화된 층별적층 감쇠이론에 기반한 유한요소법을 개발하여 복합계 평판의 동역학적 감쇠 특성을 연구하였다. Cho 등<sup>(2)</sup>은 층별변위판이론을 적용한 완전 및 부분 감쇠층을 포함한 적층평판의 진동과 감쇠특성에 대해 연구를 수행하였다. Lee and Kosmatka<sup>(3)</sup>는 복합평판의 수동감쇠 진동에 대한 Zig-zag한 층별변위 이론을 제시하여 자유도를 줄이면서도 정교한 해석이 가능함을 보였다. Ramesh and Ganesan<sup>(4)</sup>은 구속감쇠 처리된 원통형 쉘의

† 책임저자 ; 정회원, 전남대학교기계시스템공학부  
E-mail : ikoh@chonnam.ac.kr  
Tel : (062) 530-1685, Fax : (062) 530-1689

\* 전남대학교 기계공학과

조화응답에 대해 연구하였으며 Chen and Huang<sup>(5)</sup>은 구속 감쇠 처리된 스트립 타입의 원통형 쉘의 감쇠효과에 대해 조사하였다.

기존의 연구문헌들을 살펴보면 원통형 구조의 형상에 의해 발생할 수 있는 전단변형량과 수직변형률이 구조적 감쇠에 미치는 연구나 점탄성 재료를 사용한 표면감쇠처리시의 진동특성에 대한 연구는 찾아보기 힘들다. 본 연구에서는 횡방향 변위장은 두께방향으로 일정하다고 가정하는 부분층별변위이론에서 완전층별변위장으로 확장하였으며 이를 이용하여 원통형 복합적층 패널의 진동, 감쇠 그리고 주파수 응답함수를 구하여 동적거동에 대하여 고찰하였다.

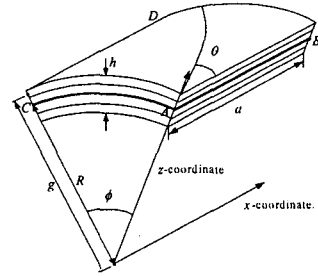


Fig. 2 Geometry of cylindrical laminated panel

원통형 복합적층 패널의 기하학적인 형상을 나타내면 Fig.2와 같다. 변위장과 변형률 사이의 선형 관계식을 곡률 좌표계  $(x, \phi, z)$ 로 나타내면 다음과 같이 기술될 수 있다.

## 2. 완전층별 유한요소정식화

### 2.1 완전층별변위장이론에 기초한 선형 탄성론

우선 층별변위장이론에 입각한 변위장은 다음과 같이 기술될 수 있다. 횡방향 수직응력이 중요한 역할을 하는 자유경계단, 층간분리, 원공이 있는 부근에서의 국부적인 응력을 정교하게 기술하거나, 두꺼운 패널 그리고 샌드위치나 하이브리드 형태의 구조물의 정적 및 동적 거동 해석을 위해서 횡방향 변위를 포함한 모든 변위를 층별로 확장하였다.

$$u(x, \phi, z, t) = \sum_{j=1}^{N_i} U^j(x, \phi, t) \Phi^j(z) \quad (1-a)$$

$$v(x, \phi, z, t) = \sum_{j=1}^{N_i} V^j(x, \phi, t) \Phi^j(z) \quad (1-b)$$

$$w(x, \phi, z, t) = \sum_{j=1}^{N_i} W^j(x, \phi, t) \Phi^j(z) \quad (1-c)$$

여기서  $\Phi^j(z)$ 는 두께방향으로의 보간함수를 의미하며 본 연구에서는 선형으로 근사하였으며 식 (2)와 같이 정의된다. Fig. 1은 층별변위이론에 기초한 면내 변위 u는 Zig-Zag 형태의 변위를 정교하게 기술할 있음을 보여준다.

$$\Phi^j(z) = \begin{cases} 0 & \text{for } z < z_{j-1} \\ \Psi_3^{j-1}(z) = \frac{z - z_{j-1}}{z_j - z_{j-1}} & \text{for } z_{j-1} < z < z_j \\ \Psi_1^j(z) = -\frac{z - z_{j+1}}{z_{j+1} - z_j} & \text{for } z_j < z < z_{j+1} \\ 0 & \text{for } z_{j+1} < z \end{cases} \quad (2)$$

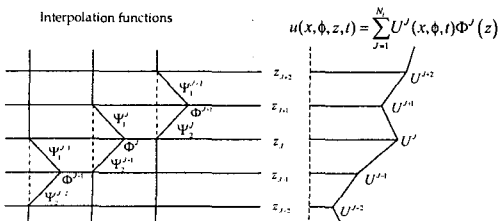


Fig. 1 In-plane displacement based on layerwise theory

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x} = \sum_{j=1}^{N_i} \frac{\partial U^j}{\partial x} \Phi^j \quad (3-a)$$

$$\epsilon_{\phi\phi} = \frac{1}{g_\phi} \left( \frac{\partial v}{\partial \phi} + w \right) = \frac{1}{g_\phi} \sum_{j=1}^{N_i} \left( \frac{\partial V^j}{\partial \phi} + W^j \right) \Phi^j \quad (3-b)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = \sum_{j=1}^{N_i} W^j \frac{d\Phi^j}{dz} \quad (3-c)$$

$$\epsilon_{\phi z} = \frac{1}{g_\phi} \left( \frac{\partial w}{\partial \phi} - v \right) + \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{g_\phi} \sum_{j=1}^{N_i} \left( \frac{\partial W^j}{\partial \phi} - V^j \right) \Phi^j + \sum_{j=1}^{N_i} V^j \frac{d\Phi^j}{dz} \quad (3-d)$$

$$\epsilon_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \sum_{j=1}^{N_i} \left( \frac{\partial W^j}{\partial x} \Phi^j + U^j \frac{d\Phi^j}{dz} \right) \quad (3-e)$$

$$\epsilon_{x\phi} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{g_\phi} \frac{\partial u}{\partial \phi} = \sum_{j=1}^{N_i} \left( \frac{\partial V^j}{\partial x} + \frac{1}{g_\phi} \frac{\partial U^j}{\partial \phi} \right) \Phi^j \quad (3-f)$$

위의 관계식에서  $g_\phi$ 는 기하학적인 형상에 따라 다음과 같이 정의된다.

$$g_\phi = R \left( 1 + \frac{z}{R} \right) = R + z \quad (4)$$

직교이방성 재료의 응력과 변형률 사이의 선형 구성방정식(constitutive equations)은 복합적층의 재료주축 (1,2,3)에 대하여 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{13} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix}_k \quad (5)$$

여기서

$$Q_{11} = (1 - \nu_{23}\nu_{32}) \frac{E_{11}}{\Delta} \quad (6-a)$$

$$Q_{12} = (\nu_{12} + \nu_{13}\nu_{32}) \frac{E_{22}}{\Delta} \quad (6-b)$$

$$Q_{13} = (\nu_{13} + \nu_{12}\nu_{23}) \frac{E_{33}}{\Delta} \quad (6-c)$$

$$Q_{23} = (\nu_{23} + \nu_{21}\nu_{13}) \frac{E_{33}}{\Delta} \quad (6-d)$$

$$Q_{22} = (1 - \nu_{13}\nu_{31}) \frac{E_{22}}{\Delta} \quad (6-e)$$

$$Q_{33} = (1 - \nu_{12}\nu_{21}) \frac{E_{33}}{\Delta} \quad (6-f)$$

$$Q_{44} = G_{23}, \quad Q_{55} = G_{13}, \quad Q_{66} = G_{12} \quad (6-g)$$

그리고

$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} - \nu_{23}\nu_{32} - \nu_{13}\nu_{31} - 2\nu_{21}\nu_{32}\nu_{13} \quad (6-h)$$

기하학적 형상에 따른 좌표축  $(x, \phi, z)$ 에 따른 복합적층 단층의 구성방정식은 섬유각  $\theta$ 에 대한 좌표변환관계에 의해 유도될 수 있다. 다음 식은 변환된 좌표축에 따른 응력과 변형률 관계로 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{\phi\phi} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{x\phi} \\ \sigma_{z\phi} \\ \sigma_{\phi z} \end{Bmatrix}_k = \begin{bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{13} & 0 & 0 & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{23} & 0 & 0 & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{13} & \bar{Q}_{23} & \bar{Q}_{33} & 0 & 0 & \bar{Q}_{36} \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{44} & \bar{Q}_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{55} & 0 \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{36} & 0 & 0 & \bar{Q}_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_{xx} \\ \epsilon_{\phi\phi} \\ \epsilon_{zz} \\ \epsilon_{x\phi} \\ \epsilon_{z\phi} \\ \epsilon_{\phi z} \end{Bmatrix}_k \quad (7)$$

여기서

$$\bar{Q}_{11} = Q_{11}m^4 + 2m^2n^2(Q_{12} + 2Q_{66}) + C_{22}n^4 \quad (8-a)$$

$$\bar{Q}_{12} = m^2n^2(Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66}) + C_{12}(m^4 + n^4) \quad (8-b)$$

$$\bar{Q}_{13} = Q_{13}m^2 + Q_{23}n^2 \quad (8-c)$$

$$\bar{Q}_{16} = -2Q_{66}mn(m^2 - n^2) + mn(Q_{12}m^2 + Q_{22}n^2) - mn(Q_{12}m^2 + Q_{22}n^2) \quad (8-d)$$

$$\bar{Q}_{22} = Q_{11}n^4 + 2m^2n^2(Q_{12} + 2Q_{66}) + C_{22}m^4 \quad (8-e)$$

$$\bar{Q}_{23} = Q_{13}n^2 + Q_{23}m^2 \quad (8-f)$$

$$\bar{Q}_{26} = 2Q_{66}mn(m^2 - n^2) + mn(Q_{12}m^2 + Q_{22}n^2) - mn(Q_{22}m^2 + Q_{12}n^2) \quad (8-g)$$

$$\bar{Q}_{33} = Q_{33} \quad (8-h)$$

$$\bar{Q}_{36} = (Q_{13} - Q_{23})mn \quad (8-i)$$

$$\bar{Q}_{44} = Q_{44}m^2 + Q_{55}n^2 \quad (8-j)$$

$$\bar{Q}_{45} = (Q_{55} - Q_{44})mn \quad (8-k)$$

$$Q_{55} = Q_{55}m^2 + Q_{44}n^2 \quad (8-1)$$

$$\bar{Q}_{66} = mn(Q_{12}mn - Q_{22}mn) - mn(Q_{12}mn - Q_{22}mn) + Q_{66}(m^2 - n^2)^2 \quad (8-m)$$

위 식들에서 방향코사인은  $m = \cos \theta$ 와  $n = \sin \theta$ 이다.

## 2.2 유한요소 운동방정식의 유도

유한요소 운동방정식을 유도하기 위해 본 연구에서는 Hamilton의 가상일 정리를 이용하였으며 세부적인 항들은 다음과 같이 나눌 수 있다.

$$\int_V \underbrace{\rho \ddot{u}_i \delta u_i dV}_{\delta T \text{ (Kinetic Energy)}} + \int_V \underbrace{\sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV}_{\delta V \text{ (Strain Energy)}} = \int_V \underbrace{f_i \delta u_i dV}_{\delta W \text{ (External Work)}} + \int_S \underbrace{\tau_i \delta u_i dS}_{\delta W \text{ (External Work)}} \quad (9)$$

여기서  $\rho$ ,  $f_i$  그리고  $\tau_i$ 는 각기 밀도, 체적력, 표면력을 의미한다.

복합적층 쉘의 J번째 면(interface)에서 변위장은 유한요소 형상함수를 사용하여 다음과 같이 근사화 될 수 있다.

$$U^J(x, \phi, t) = \sum_{I=1}^{NPE} U_I^J(t) \bar{\psi}_I(x, \phi) \quad (10-a)$$

$$V^J(x, \phi, t) = \sum_{I=1}^{NPE} V_I^J(t) \bar{\psi}_I(x, \phi) \quad (10-b)$$

$$W^J(x, \phi, t) = \sum_{I=1}^{NPE} W_I^J(t) \bar{\psi}_I(x, \phi) \quad (10-c)$$

여기서 NPE는 요소당 절점수를 의미하며 유한요소 형상함수는 라그랑지안 계열의 보간함수이다. 실제 프로그램 개발에서는 4절점, 8절점 그리고 9절점 유한요소를 사용하였다.

식 (1), (3), (7), 그리고 (10)을 식(9)에 대입하면 변위만을 미지수로 하는 다음과 같은 유한요소 운동방정식을 얻을 수 있다.

$$\mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{u}}_e + \mathbf{K}_e \mathbf{u}_e = \mathbf{F}_e \quad (11)$$

여기서 유한요소에서 노달 변위벡터를 정의하면 다음과 같다.

$$\mathbf{u}_e = \{ \mathbf{u}^1 \mathbf{v}^1 \mathbf{w}^1 \mathbf{u}^2 \mathbf{v}^2 \mathbf{w}^2 \dots \mathbf{u}^J \mathbf{v}^J \mathbf{w}^J \dots \mathbf{u}^{Nt} \mathbf{v}^{Nt} \mathbf{w}^{Nt} \}^T \quad (12)$$

여기서

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^J &= \{ U_1^J \ U_2^J \ \dots \ U_{NPE}^J \}^T \\ \mathbf{v}^J &= \{ V_1^J \ V_2^J \ \dots \ V_{NPE}^J \}^T \\ \mathbf{w}^J &= \{ W_1^J \ W_2^J \ \dots \ W_{NPE}^J \}^T \end{aligned} \quad (13)$$

질량 및 강성행렬들의 세부적인 항들은 다음과 같다.

$$\mathbf{M}_e = \int_{\Omega_i} \begin{bmatrix} \mathbf{M}^{11} & \cdots & \mathbf{M}^{1J} & \cdots & \mathbf{M}^{1Ni} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}^{I1} & \cdots & \mathbf{M}^{IJ} & \cdots & \mathbf{M}^{INi} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{M}^{Ni1} & \cdots & \mathbf{M}^{NIJ} & \cdots & \mathbf{M}^{NINi} \end{bmatrix} dx d\phi \quad (14)$$

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_i} \begin{bmatrix} \mathbf{K}^{11} & \cdots & \mathbf{K}^{1J} & \cdots & \mathbf{K}^{1Ni} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}^{I1} & \cdots & \mathbf{K}^{IJ} & \cdots & \mathbf{K}^{INi} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}^{Ni1} & \cdots & \mathbf{K}^{NIJ} & \cdots & \mathbf{K}^{NINi} \end{bmatrix} dx d\phi \quad (15)$$

여기서 시스템 행렬의 (I,J)항에 대한 내용을 정리하면 다음과 같다.

$$\mathbf{M}^{IJ} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_{UU}^{IJ} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{M}_{VV}^{IJ} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{M}_{WW}^{IJ} \end{bmatrix} \quad (16-a)$$

$$\mathbf{K}^{IJ} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{UI}^{IJ} & \mathbf{K}_{UV}^{IJ} & \mathbf{K}_{UW}^{IJ} \\ \mathbf{K}_{VI}^{IJ} & \mathbf{K}_{VV}^{IJ} & \mathbf{K}_{VW}^{IJ} \\ \mathbf{K}_{WI}^{IJ} & \mathbf{K}_{WV}^{IJ} & \mathbf{K}_{WW}^{IJ} \end{bmatrix} \quad (16-b)$$

그리고  $\mathbf{M}^{IJ}$ 와  $\mathbf{K}^{IJ}$ 의 세부 항들은 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{M}_{UU}^{IJ} = \mathbf{M}_{VV}^{IJ} = \mathbf{M}_{WW}^{IJ} = \{h\}^T I^{IJ} \{h\} \quad (17)$$

$$\mathbf{K}_{UI}^{IJ} = \begin{Bmatrix} h \\ h_x \\ h_\phi \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_{55}^{IJ} & 0 & 0 \\ 0 & D_{11}^{IJ} & D_{16}^{IJ} \\ 0 & D_{16}^{IJ} & D_{66}^{IJ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ h_x \\ h_\phi \end{Bmatrix} \quad (18-a)$$

$$\mathbf{K}_{VI}^{IJ} = \begin{Bmatrix} h \\ h_x \\ h_\phi \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_{45}^{IJ} - E_{45}^{IJ} & 0 & 0 \\ 0 & D_{16}^{IJ} & D_{12}^{IJ} \\ 0 & D_{66}^{IJ} & D_{26}^{IJ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ h_x \\ h_\phi \end{Bmatrix} \quad (18-b)$$

$$\mathbf{K}_{WI}^{IJ} = \begin{Bmatrix} h \\ h_x \\ h_\phi \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & E_{55}^{IJ} & E_{45}^{IJ} \\ D_{12}^{IJ} + E_{13}^{IJ} & 0 & 0 \\ D_{26}^{IJ} + E_{36}^{IJ} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ h_x \\ h_\phi \end{Bmatrix} \quad (18-c)$$

$$\mathbf{K}_{VV}^{IJ} = \begin{Bmatrix} h \\ h_x \\ h_\phi \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_{44}^{IJ} - E_{44}^{IJ} - E_{44}^{IJ} + D_{44}^{IJ} & 0 & 0 \\ 0 & D_{66}^{IJ} & D_{26}^{IJ} \\ 0 & D_{26}^{IJ} & D_{22}^{IJ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ h_x \\ h_\phi \end{Bmatrix} \quad (18-d)$$

$$\mathbf{K}_{WW}^{IJ} = \begin{Bmatrix} h \\ h_x \\ h_\phi \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & E_{45}^{IJ} - D_{25}^{IJ} & E_{44}^{IJ} - D_{44}^{IJ} \\ D_{26}^{IJ} + E_{36}^{IJ} & 0 & 0 \\ D_{22}^{IJ} + E_{23}^{IJ} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ h_x \\ h_\phi \end{Bmatrix} \quad (18-e)$$

$$\mathbf{K}_{WW}^{IJ} = \begin{Bmatrix} h \\ h_x \\ h_\phi \end{Bmatrix}^T \begin{bmatrix} D_{22}^{IJ} + E_{23}^{IJ} + E_{33}^{IJ} + F_{33}^{IJ} & 0 & 0 \\ 0 & D_{55}^{IJ} & D_{25}^{IJ} \\ 0 & D_{25}^{IJ} & D_{55}^{IJ} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} h \\ h_x \\ h_\phi \end{Bmatrix} \quad (18-f)$$

여기서 운동방정식에서 체적적분과 표면적분과정에서 미소 체적과 미소면적은 다음과 같이  $g_\phi$ 를 고려하여 정의된다.

$$dV = g_\phi(z) dz d\phi dx \quad (19-a)$$

$$dS = g_\phi(z) d\phi dx \quad (19-b)$$

유한요소운동방정식을 유도하는 과정에서 전체적분과정 중에 우선 두께방향 적분을 먼저하고 다음으로 면적분을 수행하였다. 두께방향적분들은 식(9)에서 나타나는 세부항들로  $z$ 의 변화를 모두 고려하여 적분하였으며 다음과 같이 정의된다.

$$I^{IJ} = \int_{z^u} \Phi^I \rho \Phi^J g_\phi dz \quad (20-a)$$

$$D_{pq}^{IJ} = \int_{z^u} \Phi^I \bar{Q}_{pq} \Phi^J g_\phi dz \quad (20-b)$$

$$D_{pq}^{sIJ} = \int_{z^u} \frac{\Phi^I}{g_\phi} \bar{Q}_{pq} \Phi^J g_\phi dz \quad (20-c)$$

$$D_{pq}^{ssIJ} = \int_{z^u} \frac{\Phi^I}{g_\phi} \bar{Q}_{pq} \frac{\Phi^J}{g_\phi} g_\phi dz \quad (20-d)$$

$$E_{pq}^{IJ} = \int_{z^u} \frac{d\Phi^I}{dz} \bar{Q}_{pq} \Phi^J g_\phi dz \quad (20-e)$$

$$E_{pq}^{sIJ} = \int_{z^u} \frac{d\Phi^I}{dz} \bar{Q}_{pq} \frac{\Phi^J}{g_\phi} g_\phi dz \quad (20-f)$$

$$F_{pq}^{IJ} = \int_{z^u} \frac{d\Phi^I}{dz} \bar{Q}_{pq} \frac{d\Phi^J}{dz} g_\phi dz \quad (20-g)$$

또한 유한요소 형상함수들에 의해 정의된 항들은 다음과 같이 정의된다.

$$\{h\} = \{\bar{\psi}_1 \quad \bar{\psi}_2 \quad \cdots \quad \bar{\psi}_{NPE}\} \quad (21-a)$$

$$\{h_x\} = \{\bar{\psi}_{1,x} \quad \bar{\psi}_{2,x} \quad \cdots \quad \bar{\psi}_{NPE,x}\} \quad (21-b)$$

$$\{h_\phi\} = \{\bar{\psi}_{1,\phi} \quad \bar{\psi}_{2,\phi} \quad \cdots \quad \bar{\psi}_{NPE,\phi}\} \quad (21-c)$$

식(11)의 유한요소 운동방정식에서 어셈블 과정을 거쳐 전체 시스템에 대하여 운동방정식을 표현하면 다음과 같다.

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{F} \quad (22)$$

### 2.3 점탄성층을 갖는 패널의 동적 특성

본 연구에서는 점탄성층을 갖는 구조감쇠를 정교하게 고려하기 위해 강성행렬 계산에 재료 물성치를 온도( $T$ )와 가진 진동수( $\omega$ )에 의존하는 복소 모듈러스를 도입하였다.

$$\bar{E}_n = E_n (1 + i\eta_n) \quad \text{or} \quad n=1,2,3 \quad (23-a)$$

$$\bar{G}_2 = G_2(1+i\eta_{12}), \bar{G}_3 = G_3(1+i\eta_{13}), \bar{G}_4 = G_4(1+i\eta_{14}) \quad (23-b)$$

식 (23-a)와 (23-b)의 복소 모듈러스를 고려하면 다음과 같은 구조감쇠항을 포함한 운동방정식을 구할 수 있다.

$$\mathbf{M}^* \ddot{\mathbf{U}}^* + (\mathbf{K}^*(\omega, T) + i\mathbf{K}_D^*(\omega, T)) \mathbf{U}^* = \mathbf{F}^*(\omega) \quad (24)$$

여기서 축약된 행렬들은 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{M}^* = \Psi^T \mathbf{M} \Psi \quad (25-a)$$

$$\mathbf{K}^* = \Psi^T \mathbf{K} \Psi, \quad \mathbf{K}_D^* = \Psi^T \mathbf{K}_D \Psi \quad (25-b)$$

$$\mathbf{F}^* = \Psi^T \mathbf{F} \quad (25-c)$$

$$\mathbf{U} = \Psi \mathbf{U}^* \quad (25-d)$$

고유진동수와 손실계수는 아래의 복소 고유치 해석을 통해서 구하게 된다.

$$(\mathbf{K}^*(\omega, T) + i\mathbf{K}_D^*(\omega, T) - \lambda_n^* \mathbf{M}^*) \mathbf{U}^* = \mathbf{0} \quad (26)$$

위 식 (26)에서 구한 복소고유치로부터 고유 진동수와 손실계수를 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\omega_n^2 = \text{Real}[\lambda_n^*], \quad \eta_n = \frac{\text{Imag}[\lambda_n^*]}{\text{Real}[\lambda_n^*]} \quad (27)$$

실제 가진에 대한 시스템의 응답특성을 살펴보기 위해 주로 활용하는 것이 주파수 응답함수를 구하는 일이다. 여기서 임의의 점에서 가진이 다음과 같이 조화함수임을 가정하면 주파수응답함수를 구할 수 있다.

$$\mathbf{F}^* = \Psi^T \mathbf{F} = F_0 \Psi^T \mathbf{F}_{input} e^{i\omega t} = F_0 \mathbf{F}_{input}^* e^{i\omega t} \quad (28)$$

계산된 주파수 응답함수는 다음과 같으며 증폭비와 위상각은 다음과 같이 정의된다.

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{U}}{F_0} = \frac{\Psi \mathbf{U}^*}{F_0} = \Psi (\mathbf{K}^*(\omega, T) + i\mathbf{K}_D^*(\omega, T) - \omega^2 \mathbf{M}^*)^{-1} \mathbf{F}_{input}^* \quad (29)$$

$$\text{Magnitude} = |\mathbf{H}| \quad (30-a)$$

$$\text{Phase}, \phi = \arctan \left( -\frac{\text{Imag}(\mathbf{H})}{\text{Real}(\mathbf{H})} \right) \quad (30-b)$$

## 3. 결과 및 논의

### 3.1. 점탄성층이 내삽된 샌드위치보의 감쇠

본 절에서는 알루미늄 외피와 감쇠층이 내삽된 샌드위치보의 진동 및 감쇠해석에 대한 검증을 수행하였다. 해석대상은 Soni 등<sup>(6)</sup>과 Cho<sup>(2)</sup>에 의해 사용된 모델로서 본 연구에서 개발된 원통형 패널의 부분 및 완전 층별변위이론에 기초한 결과들과 비교하였다. 사용된 물성치는 다음과 같다.

$$E = 69 \text{ GPa}, \quad \nu = 0.3, \quad \eta \approx 0.0,$$

$$\text{탄성층 : } \rho = 2800 \text{ kg/m}^3, \quad c_{ul} = 1.524 \text{ mm}$$

$$G = 2.1 \text{ MPa}, \quad \nu = 0.499, \quad \eta = 0.1, 0.3, 1.0$$

$$\text{감쇠층 : } \rho = 970 \text{ kg/m}^3, \quad c_{cvc} = 0.127 \text{ mm}$$

감쇠층의 손실계수에 따른 저차 5개 모드의 진동수와 감쇠량을 구하였으며 Table 1에 이를 정리하였으며 Soni 등<sup>(6)</sup>의 삼차원 솔리드 유한요소와 Cho<sup>(2)</sup> 등의 부분 층별변위이론에 기초한 해석결과들과 현재의 부분 및 완전 층별변위이론에 의한 모드별 진동수와 감쇠량에 대한 값들이 비교되었다. 본 연구의 해석에서는 원통형 셀이론에 기초하기 때문에 평평한 샌드위치 구조 해석을 위해 반경  $R=35.56\text{m}$ , 사이각은  $\phi=0.005\text{rad}$  로 설정하여 해석하였다. 해석결과로부터 완전 층별변위이론에 기초한 진동수는 다소 높고 감쇠계수는 낮게 예측하고 있음을 알 수 있다.

Table 1. Modal properties of sandwich beam

	Soni(6)		Cho(2)		Present Results			
	3-D Solid		PLWPT		PLWST		FLWST	
$\eta_{cvc}=0.1$	$f_1(\text{Hz})$	$\bar{\eta}$	$f_1(\text{Hz})$	$\bar{\eta}$	$f_1(\text{Hz})$	$\bar{\eta}$	$f_1(\text{Hz})$	$\bar{\eta}$
1 <sup>st</sup> mode	64.2	0.2817	64.28	0.2799	64.20	0.2790	64.47	0.2774
2 <sup>nd</sup> mode	297	0.2425	297.48	0.2426	297.120	0.2422	293.112	0.2371
3 <sup>rd</sup> mode	747.2	0.1534	747.98	0.1546	746.212	0.1543	752.027	0.1481
4 <sup>th</sup> mode	1408.3	0.0878	1413.08	0.0888	1402.77	0.0888	1414.21	0.0824
5 <sup>th</sup> mode	2304	0.0559	2335.59	0.0563	2288.70	0.0568	2310.04	0.0504
$\eta_{cvc}=0.3$	$f_1(\text{Hz})$	$\bar{\eta}$	$f_1(\text{Hz})$	$\bar{\eta}$	$f_1(\text{Hz})$	$\bar{\eta}$	$f_1(\text{Hz})$	$\bar{\eta}$
1 <sup>st</sup> mode	64.7	0.2725	64.617	0.2709	64.58	0.2701	64.48	0.2774
2 <sup>nd</sup> mode	298	0.2401	297.80	0.2409	297.441	0.2406	293.160	0.2371
3 <sup>rd</sup> mode	748.2	0.1531	747.06	0.1545	746.286	0.1543	752.039	0.1481
4 <sup>th</sup> mode	1409.5	0.0878	1413.1	0.0887	1402.82	0.0888	1414.22	0.0824
5 <sup>th</sup> mode	2305	0.0560	2335.6	0.0563	2288.72	0.0569	2310.05	0.0505

### 3.2. 곡률에 따른 진동 및 주파수 응답함수 특성

본 절에서는 3.1절에 사용된 샌드위치 모델에 대하여 반경과 사이각을 조절하며 곡률을 변화시키면서 모달 및 주파수 응답함수 특성을 고찰하였다. Fig. 3(a)를 살펴보면 반경변화에 따라 굽힘모드들은 그다지 큰 진동수의 변화가 없는 반면 비틀림모드들은 반경변화에 민감하게 진동수의 변화가 발견됨을 알 수 있다. 감쇠계수는 첫번째 굽힘모드가 가장 높고 두번째 세번째 네번째 굽힘모드 순이다. 비틀림 모드의 모달 감쇠계수는 굽힘모드의 감쇠계수에 비해 상당히 낮음을 알 수 있다. Fig. 4는 반경 R=0.2778m, R=2.22254m, R=17.78m인 경우에 3차원 모드형상을 보여주고 있다. 곡률이 변화함에 따라 2차 모드의 형상이 비틀림 모드에서 굽힘모드로 변화함을 보이고 있다.

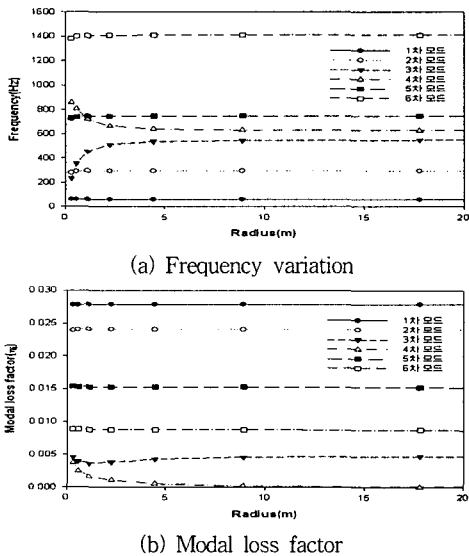


Fig. 3 Modal properties according to curvature change

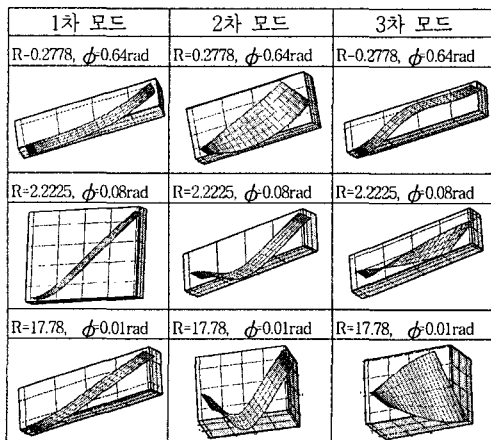


Fig. 4 Modes shape of curved sandwiched beam

다음은 상대적 두께 변화에 따른 주파수 응답함수 특성 변화를 고찰하고자 한다. 이를 위해 먼저 보의 길이  $L=R\phi$ 를 일정하게 유지시키고, 재료 간의 비율을 유지하면서 전체적인 두께를 변화시켜 이에 따른 주파수 응답함수를 고찰하고자 한다. 이를 위해 무차원 파라미터  $k$ 를 식 (31)과 같이 정의하였다.

$$k = \frac{L}{h} = \frac{R\phi}{h} \quad (31)$$

Fig. 5와 6은 완전층별변위이론을 이용한  $k$ 값의 변화에 따른 주파수 응답함수를 보여주고 있다.

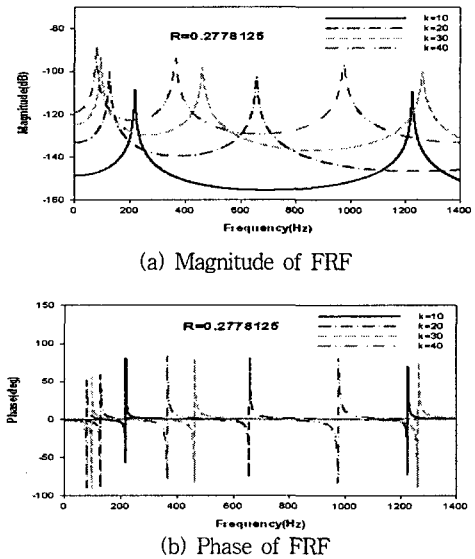


Fig. 5 Frequency response functions for R=0.2778m

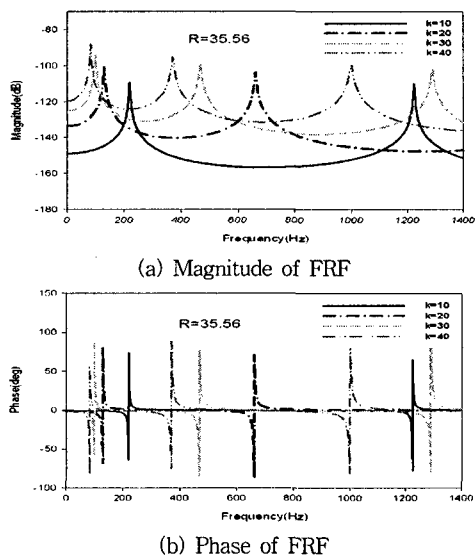


Fig. 6 Frequency response functions for R=35.56m

그림 Fig. 5(a), (b)는 반경이 0.2778m일 때 즉 곡률일 큰 경우 일 때의 주파수 응답특성을 나타낸 것이고 Fig. 6(a), (b)는 반경이 35.56m일 때 즉 곡률이 작은 경우 일 때의 주파수 응답특성을 나타 낸 것이다. 그림에서 알 수 있는바와 같이  $k$ 값이 작아짐에 따라, 즉 두께와 호의 길이의 비가 작아질 수록 공진 주파수는 증가하고 주파수 응답선도 상의 특성으로 감쇠량이 증가함을 알 수 있다. 감쇠량이 증가하는 이유는 두께가 커짐에 따라 전단변형량이 증가되기 때문이다.

마지막으로 층별변위이론의 식 (1-c)의 횡방향 변위 가정에서 두께 방향으로 동일한 값을 가정하는 부분층별변위이론(partial layerwise theory)와 횡방향 변위도 모두 층별로 자유도를 부여하는 완전층별변위이론의 차이를 검토하였다.  $R=35.56m$ 와  $\phi=0.005rad$ 이고 두께는 3.1절 문제와 동일하게 하였다. Fig. 7은 주파수 응답함수를 보여주고 있는데 그림에서 알 수 있듯이 전단변형량과 수직변형률을 완벽히 고려할 수 있는 완전층별변위 이론을 사용하였을 때의 주파수 응답특성이 부분 층별변위 이론을 사용하였을 때의 주파수특성에 비하여 전체적으로 낮게 보임을 알 수 있다.

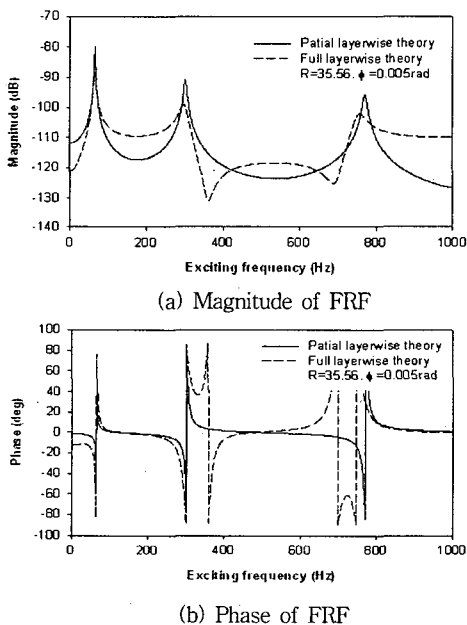


Fig. 7 Frequency response functions at tip point

#### 4. 결 론

본 논문에서는 원통형 셸이론에 바탕을 둔 부분 및 완전 층별변위이론을 적용하여 모달 및 주파수응답함수를 해

석할 수 있는 유한요소기법을 개발하였다. 기본적인 원통형 셸 구조의 진동 및 샌드위치 보의 모달특성에 대한 검증을 수행하여 현재의 완전 층별변위이론에 입각한 해석결과가 타당함을 보였다. 또한 원통형 샌드위치 보의 곡률과 두께비에 따른 모달 및 주파수 응답특성을 살펴보았다. 곡률을 갖는 구조의 형상에 의해 부가되는 전단변형과 수직 변형률을 완벽히 고려할 수 있는 현재의 완전층별변위 이론이 정교한 진동감쇠 예측결과를 제공함을 제시하였다. 향후 온도에 따른 점탄성 재료의 특성을 고려한 감쇠에 관한 연구를 진행하고자 한다.

#### 후 기

이 논문은 2004년도 교육인적자원부의 지방대학 혁신역량 강화사업(NURI)에 의하여 지원되었음.

#### 참 고 문 헌

- (1) Saravanos, D.A. and Pereira, J.M., 1995, "Dynamic characteristics of Specialty Composite Structures with Embedded Damping Layers," *Journal of Vibration and Acoustics*, Vol. 117, pp. 62-69.
- (2) Cho, K.D., Han, J.H. and Lee, I., 2000, "Vibration and Damping Analysis of Laminated Plates with Fully and Partially Covered Damping Layers," *Journal of Reinforced Plastics and Composites*, Vol. 19, pp. 1176-1200.
- (3) Lee, D.G. and Kosmatka, J.B., 2000, "Passively Damped Vibration of Composite Plates with Constrained Damping Treatment," 41st AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference and Exhibit, AIAA-2000-1473.
- (4) Ramesh, T.C. and Ganesan, N., 1995, "The Harmonic Response of Cylindrical shells with constrained Layer Damping Treatment," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 180, No. 5, pp. 745-756.
- (5) Chen, L.H. and Huang, S.C., 2001, "Vibration Attenuation of a Cylindrical Shell with Constrained Layer Damping Strips Treatment," *Computers and Structures*, Vol. 79, pp. 1-20.
- (6) Soni, M. L. and Bogner, F. K., 1982, "Finite Element Vibration Analysis of Damped Structures," *AIAA Journal*, Vol. 20, pp. 700-707.