

전단변형을 고려한 불연속 단면을 갖는 변화곡률 아치의 자유진동 해석

Free Vibration Analysis of Stepped Noncircular Arches with Shear Deformation

오상진[†] · 모정만* · 진태기**

Sang Jin Oh, Jeong Man Mo and Tae Ki Jin

Key Words : Arch(아치), Axial Deformation(축변형), Free Vibration(자유진동), Natural Frequency(고유진동수), Noncircular(변화곡률), Rotatory Inertia(회전관성), Shear Deformation(전단변형), Stepped Arch(불연속 단면을 갖는 아치)

ABSTRACT

The purpose of this paper is to investigate the free vibration of stepped noncircular arches. Taking into account the effects of axial deformation, rotatory inertia and shear deformation, the governing differential equations are solved numerically for the elliptic and sinusoidal geometries with hinged-hinged, hinged-clamped, and clamped-clamped end constraints. The lowest four natural frequencies are presented as functions of four non-dimensional system parameters: the arch rise to span length ratio, the slenderness ratio, the section ratio, and the discontinuous sector ratio.

1. 서론

아치는 구조공학 관련분야에서 단위구조로 이용되고 있어 정·동적거동에 관한 많은 연구가 진행되어 왔다. 구조물의 고유한 성질 중의 하나인 자유진동 특성은 동하중이 작용하는 구조물의 동적응답 해석시 매우 중요한 변수이며, 구조물의 설계과정 또는 공용 중인 구조물의 안정성 평가 등에도 중요한 평가지수로 이용되고 있다. 따라서 대상 구조의 자유진동 특성을 파악하는 것은 진동공학 분야에서 매우 중요한 연구과제이다.

아치의 자유진동에 관한 연구들⁽¹⁻³⁾에서는 주로 단면이 일정한 아치 또는 단면이 연속적으로 변화하는 아치를 대상으로 하고 있다. 그러나 실제 구조물에서 부재를 다른 부재에 연결하거나 일부분을 보강하는 경우에는 아치 단면이 불연속적으로 변화하게 된다. 따라서 불연속적으로 단면이 변화하는 아치의 진동 특성을 규명하는 것은 매우 실제적인 연구라 판단된다.

이에 본 연구에서는 불연속 단면을 갖는 변화곡률 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식에 정현 및 타원으로 표현되는 선형을 갖는 아치를 적용하여 대상 구조의 고유진동수를 산출하고자 한다. 지배방정식에는 축변형, 회전관성 및 전단변형의 영향을 고려하고, 이를 수치해석하여 아치 제원을 나타내는 여러 가지 제변수 변화에 따른 고유진동수 변화를 고찰하고자 한다.

2. 수학적 모형

Fig. 1 은 아치 정부를 기준으로 좌우대칭인 불연속 단면을 갖는 변화곡률 아치의 기하학적 형상을 나타낸 것이다. 이 그림에서 l , h 및 α 는 각각 아치의 지간길이, 높이 및 중심각이며, r_n 는 단면의 불연속구간을 정의해 주는 변수이다. d_e , A_e 및 I_e 는 각각 양쪽 단부로 부터 d 구간 내에서의 단면높이, 단면적 및 단면 2 차모멘트이며, d_c , A_c 및 I_c 는 각각 아치 정부 부분의 단면높이, 단면적 및 단면 2 차모멘트이다. 그리고 ρ , ϕ 및 θ 는 각각 아치축상 임의점 (x, y) 에서의 곡률반경, 곡률중심방향과 수평축이 이루는 각도 및 아치축의 접선각을 나타낸다. 또한 w 및 v 는 각각 곡률중심방향 및 접선방향 변위, ψ 와 β 는 각각 순수 휨에 의한 단면회전각과 전단변형률이다.

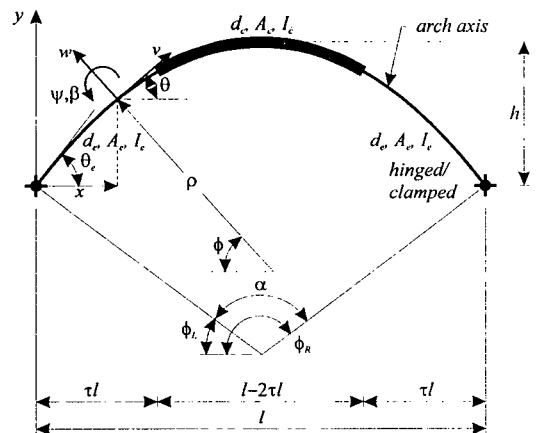


Fig. 1 Arch geometry.

[†] 남도대학 토목환경과

E-mail : sjoh@namdo.ac.kr

Tel : (061) 380-8502, Fax : (061) 380-8679

* 전주농림고등학교 농업토목과

** (주) 대동남

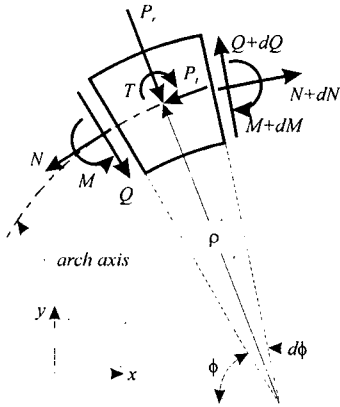


Fig. 2 Loads on an arch element.

Fig. 2 는 아치가 면내 진동하는 경우 아치 미소 요소에 작용하는 힘들을 나타낸 것이다. 아치가 면내 진동하게 되면 진동변위에 의하여 아치 단면에는 축방향력 N , 전단력 Q 및 휨모멘트 M 의 합응력이 발생한다. 또한 질량을 가지고 있는 아치가 진동함으로써 아치 미소요소에는 곡률중심방향 관성력 P_r , 접선방향 관성력 P_t 및 회전관성우력 T 가 발생한다. 아치 미소요소에 작용하는 이들 합응력과 관성력의 동적 평형방정식을 세우면 다음과 같다.

$$N' + Q - \rho P_r = 0 \quad (1)$$

$$Q' - N - \rho P_t = 0 \quad (2)$$

$$M'/\rho - Q + T = 0 \quad (3)$$

식 (1)~(3)에서 $(\prime) = d/d\phi$ 이다.

축변형, 회전관성 및 전단변형을 고려하는 경우 아치 단면에 발생하는 휨모멘트, 축방향력 및 전단력을 변위 항으로 표현하면 다음과 같다.

$$M = -EI\psi'/\rho, \quad N = EA(v' + w)/\rho + EI\psi'/\rho^2 \quad (4, 5)$$

$$Q = kAG\beta = kAG(w' - v - \rho\psi)/\rho \quad (6)$$

여기서 I 와 A 는 각각 아치축상 임의점에서의 단면적과 단면 2 차모멘트, E 와 G 는 각각 탄성계수와 전단탄성계수, k 는 단면형상에 따른 계수이다.

아치가 조화진동을 한다고 가정하면, 아치 미소 요소에 발생하는 관성력 및 회전관성우력은 식 (7)~(9)와 같이 표현할 수 있다.

$$P_r = -\gamma A \omega^2 w, \quad P_t = -\gamma A \omega^2 v, \quad T = -\gamma I \omega^2 \psi \quad (7-9)$$

여기서 γ 는 아치 재료의 밀도, ω 는 고유각진동

수(rad/s) 이다.

지배 미분방정식을 무차원 형태로 표현하기 위하여 다음의 무차원 변수들을 사용한다.

$$\xi = x/l, \quad \eta = y/l, \quad \zeta = \rho/l \quad (10-12)$$

$$\delta = w/l, \quad \lambda = v/l \quad (13, 14)$$

$$f = h/l, \quad s = l/\sqrt{I_c/A_c}, \quad \mu = kG/E \quad (15-17)$$

$$C_i = \omega_i s l \sqrt{\gamma/E}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (18)$$

식 (15)~(18)에서 f , s , μ 는 각각 아치높이 지간 길이비(rise to span length ratio), 세장비(slenderness ratio), 전단계수(shear parameter)이며, C_i 는 무차원 고유진동수(frequency parameter), i 는 모드번호이다. 아치축상 임의점에서의 단면적 A 와 단면 2 차모멘트 I 를 각각 A_c 와 I_c 항으로 표현하면 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$A = A_c F, \quad I = I_c H \quad (19, 20)$$

식 (4)~(9)와 식 (19), 식(20)을 식 (1)~(3)에 대입하고, 식 (10)~(18)의 무차원 변수들을 이용하면 식 (21)~(23)의 상미분방정식을 얻을 수 있다.

$$\delta'' = \zeta^{-1} \zeta' \delta' + \mu^{-1} (1 - \zeta^2 s^{-2} C_i^2) \delta + (1 + \mu^{-1}) \lambda' - \zeta^{-1} \zeta' \lambda + (\zeta + \mu^{-1} \zeta^{-1} s^{-2} H F^{-1}) \psi' \quad (21)$$

$$\lambda'' = \zeta^{-1} \zeta' \lambda' + (\mu - \zeta^2 s^{-2} C_i^2) \lambda - (1 + \mu) \delta' + \zeta^{-1} \zeta' \delta - \zeta^{-1} s^{-2} H F^{-1} \psi'' + 2\zeta^{-2} \zeta' s^{-2} H F^{-1} \psi' + \zeta \mu \psi \quad (22)$$

$$\psi'' = \zeta^{-1} \zeta' \psi' + (\mu \zeta^2 s^2 H^{-1} F - \zeta^2 s^{-2} C_i^2) \psi - \mu \zeta s^2 H^{-1} F \delta' + \mu \zeta s^2 H^{-1} F \lambda \quad (23)$$

아치 정부에서의 단면 2 차모멘트 I_c 를 기준으로 각 구간에서의 단면 2 차모멘트 변화식 H 를 표현하면 다음과 같다.

$$H = 1, \quad \tau \leq \xi \leq (1 - \tau) \quad (24a)$$

$$H = I_e/I_c = n,$$

$$0 \leq \xi \leq \tau \quad \text{또는} \quad (1 - \tau) \leq \xi \leq 1 \quad (24b)$$

여기서 n 은 단면비(section ratio)이다.

단면 폭이 b 로 일정하고, 단면높이가 불연속적으로 변하는 직사각형 단면인 경우 아치 정부에서의 단면적 및 단면 2 차모멘트는 각각 $A_c = b d_c$, $I_c = b d_c^3/12$, 단부에서는 $A_e = b d_e$, $I_e = b d_e^3/12$ 이므로 각 구간에서 단면적의 변화식 F 를 다음과

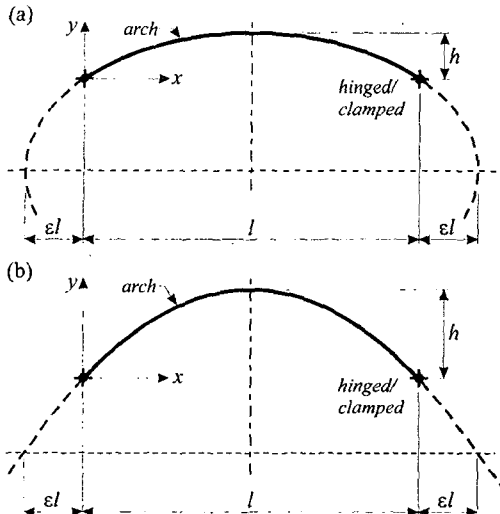


Fig. 3 Arch shapes: (a) elliptic; (b) sinusoidal.

같이 나타낼 수 있다.

$$F = 1, \tau \leq \xi \leq (1-\tau) \text{에서} \quad (25a)$$

$$F = n^{1/3}, 0 \leq \xi \leq \tau \text{ 또는 } (1-\tau) \leq \xi \leq 1 \text{에서} \quad (25b)$$

직교 좌표계에서 $y = y(x)$ 로 정의된 아치의 선형식을 무차원 변수를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\eta = \eta(\xi) \quad (26)$$

수학적 정의에 의해 ϕ 와 ζ 는 다음과 같다.

$$\phi = \pi/2 - \tan^{-1}(d\eta/d\xi) \quad (27)$$

$$\zeta = (d^2\eta/d\xi^2)^{-1} \left[1 + (d\eta/d\xi)^2 \right]^{3/2} \quad (28)$$

ζ' 은 다음 식으로부터 구할 수 있다.

$$\zeta' = (d\zeta/d\xi)(d\xi/d\phi) \quad (29)$$

Fig. 3 (a)는 장축의 길이가 $(2\varepsilon+1)$ 인 타원상의 점을 원점으로 하는 (x, y) 좌표계 위에 정의된 지간길이 l , 높이 h 를 갖는 타원 아치의 기하학적 형상을 나타낸 것으로 무차원 변수를 이용하여 선형식을 나타내면 다음과 같다.

$$\eta = (b_2/b_1) \left[b_1^2 - (\xi - 1/2)^2 \right]^{1/2} + f - b_2, 0 \leq \xi \leq 1 \quad (30a)$$

$$b_1 = (1 + 2\varepsilon)/2 \quad (30b)$$

$$b_2 = f / \left[1 - 2(\varepsilon + \varepsilon^2)^{1/2} / (1 + 2\varepsilon) \right] \quad (30c)$$

Fig. 3 (b)에 보여진 정현 아치의 무차원 선형식은 다음과 같다.

$$\eta = f - c_1 + c_1 \sin(c_2 \xi + c_2 \varepsilon), 0 \leq \xi \leq 1 \quad (31a)$$

$$c_1 = f / [1 - \sin(c_2 \varepsilon)], c_2 = \pi / (1 + 2\varepsilon) \quad (31b, c)$$

식 (27)~(29)를 이용하면 식 (30), (31)로부터 각각의 선형에 대한 ϕ , ζ 및 ζ' 을 얻을 수 있다.

회전단에 대한 경계조건식은 다음과 같다.

$$\delta = 0, \lambda = 0, \psi' = 0 \quad (32a-c)$$

고정단에 대한 경계조건식은 다음과 같다.

$$\delta = 0, \lambda = 0, \psi = 0 \quad (33a-c)$$

본 연구에서는 식 (21)~(23)의 상미분방정식을 6개의 1계 연립 미분방정식으로 변환하여 초기치 문제로 형성한 후 식 (32), (33)의 경계조건을 이용하여 Runge-Kutta 법으로 수치적분하였으며, 대상 구조의 무차원 고유진동수를 결정하기 위해서는 시행착오적 행렬값 탐사법을 적용하는 과정에서 Regula-Falsi 법을 이용하였다.

3. 수치해석 예 및 고찰

본 연구에서는 회전-회전, 회전-고정 및 고정-고정의 단부조건을 갖는 타원 및 정현 아치($\varepsilon=0.5$)의 제원을 나타내는 아치높이 지간길이비, 세장비, 단면비 및 불연속 구간비의 변화에 따른 최저차 4개의 무차원 고유진동수를 산출하여 그 결과를 Fig. 4-7에 수록하였다.

Fig. 4는 회전-회전의 단부조건을 갖는 경우 아치높이 지간길이비 변화에 따른 무차원 고유진동수 변화, Fig. 5는 회전-고정의 단부조건을 갖는 경우 세장비 변화에 따른 무차원 고유진동수 변화, Fig. 6은 고정-고정의 단부조건을 갖는 경우 단면비 변화에 따른 무차원 고유진동수 변화, Fig. 7은 고정-고정의 단부조건을 갖는 경우 불연속 구간비 변화에 따른 무차원 고유진동수 변화를 나타낸 것이다. 이 그림들에서 각각의 제변수 변화에 따른 고유진동수 변화는 문헌들에서 보여진 결과와 유사한 경향을 나타낼 수 있다. 그리고 제 1 모드인 경우 타원 아치보다 정현 아치의 무차원 고유진동수가 항상 큼을 알 수 있다.

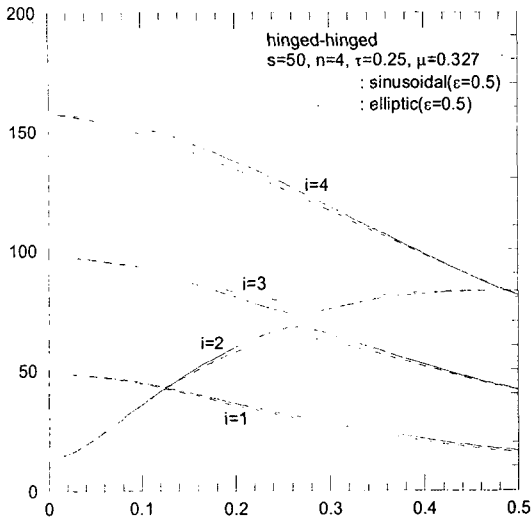


Fig. 4 Effect of f on frequency.

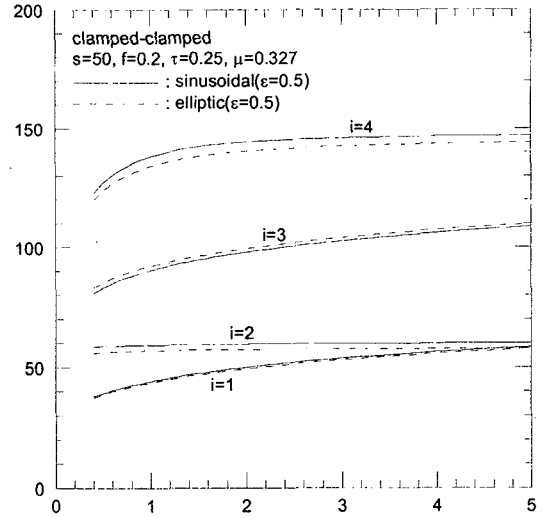


Fig. 6 Effect of n on frequency.

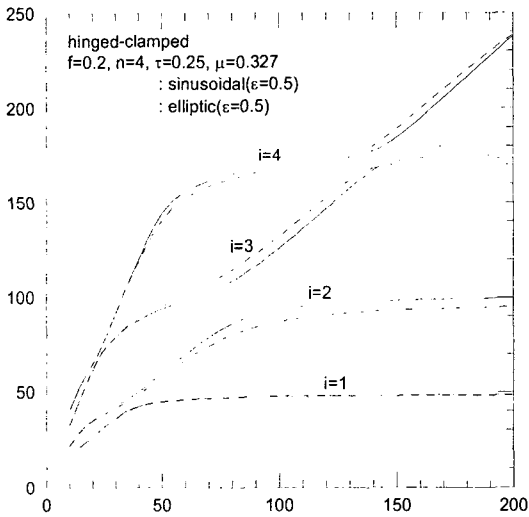


Fig. 5 Effect of s on frequency.

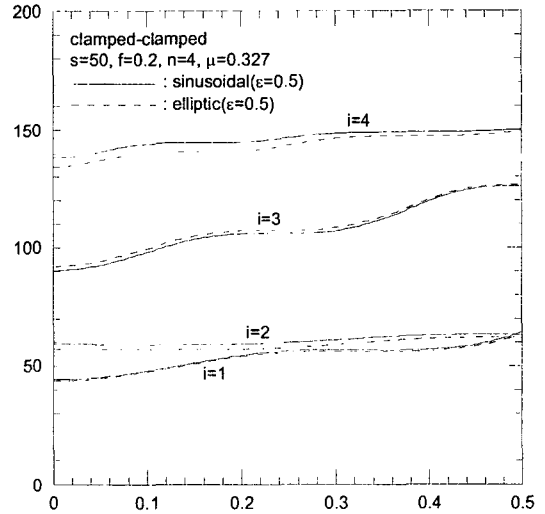


Fig. 7 Effect of τ on frequency.

4. 요약

본 논문에서는 불연속 단면을 갖는 변화곡률 아치의 자유진동을 지배하는 미분방정식에 타원 및 정현 아치를 적용하고, 이를 수치해석하여 대상 구조의 고유진동수를 산출하였다. 지배방정식에는 축변형, 회전관성 및 전단변형의 영향을 고려하였다. 해석 예에서는 회전-회전, 회전-고정 및 고정-고정의 단부조건을 고려하였으며, 아치 제원을 표현하는 변수인 아치높이, 지간길이비, 세장비, 단면비 및 불연속 구간비 변화에 따른 무차원 고유진동수 변화를 고찰하였다.

참고문헌

- (1) Lee, B.K. and Wilson, J.F., 1990, "Free Vibrations of Arches with Variable Curvature," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 136, pp.75-89.
- (2) Oh, S.J., Lee, B.K. and Lee, I.W., 2000, "Free Vibrations of Non-Circular Arches with Non-Uniform Cross-Section," *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 37, pp.4871-4891.
- (3) Liu, G.R. and Wu, T.Y., 2001, "In-Plane Vibration Analyses of Circular Arches by the Generalized Differential Quadrature Rule," *International Journal of Mechanical Sciences*, Vol. 43, pp.2597-2611.