

미소 외팔보의 동적해석 시 작용하는 힘들의 영향도에 관한 연구

Study on the Influence of Applied Forces Acting on Small Scale Cantilever Beams

김관용[†], 유흥희*

Kwan Yong Kim and Hong Hee Yoo

Key Words : Structural Dynamics(구조 동역학), Cantilever Beam(외팔보), Electrostatic Force(정전기력), Van der Waals Force (반데르발스 힘), Squeeze Film Damping Force(스퀴즈 필름 감쇠력), MEMS(마이크로 전자기계 시스템), NEMS(나노 전자기계 시스템)

ABSTRACT

The equations of motion of the structure, which is a small scale cantilever beam considering electrostatic force, squeeze film damping and van der Waals force are obtained employing Galerkin's method based on Euler beam theory. The influence of each force is investigated for changing the size of a small scale cantilever beam which assumed uniform shape. Also the forces which are affected by the required size of a small scale cantilever beam for manufacturing are forecasted.

1. 서론

MEMS 기술은 이미 의료, 컴퓨터, 자동차, 우주 및 정보통신 분야에서 중요한 영향을 미치고 있으며 NEMS 역시 이러한 분야에서 혁신적인 영향을 줄 잠재력을 가지고 있다. 이러한 기술을 바탕으로 만들어진 부품으로는 실생활에서 흔히 볼 수 있는 캠코더의 떨림 보정장치나 컴퓨터 HDD의 구동기가 그 예이며 각종 전자제품의 신호 검출장치, 항공기의 각속도 측정 센서도 MEMS 부품으로 이루어진 장치이다. MEMS 나 NEMS 구조물들은 미세한 크기와 재료의 특성 때문에 구조물에 전압을 가할 때 발생하는 정전기력에 의해 구동되며 이러한 구조물들이 구동될 때 공기층에 의한 스퀴즈 필름 감쇠력이 작용하게 된다. NEMS 구조물은 MEMS 구조물에 비하여 매우 작기 때문에 감쇠력 외에 반데르 발스 힘 또한 고려해야 좀 더 정확한 수치해석이 가능하게 된다.

정전기력을 받는 외팔 보는 MEMS 와 NEMS 구조에서 구동기, 스위치, 센서 등의 보편적인 형태중의 하나로 단일 외팔 보나 그 집합 구조로 사

용되고 있다. 현재까지 이와 같은 정전기력을 받는 외팔 보의 응답과 관련한 다양한 연구들이 있었다. 참고문헌 (1)은 사각단면을 갖는 단일 마이크로 외팔 보의 정적 처짐을 예측했다. 이와 더불어 구조물의 허용전압을 수식으로 제시하였다. 참고문헌 (2)는 다양한 형상의 외팔 보를 다루으로써 단면 형상 변화에 의한 정적 처짐의 민감도 변화를 제시하였다. 참고문헌 (3)은 원형 단면을 갖는 단일 나노 외팔 보의 정적 처짐을 반데르발스 힘까지 고려하여 제시하였으며 참고문헌 (4)는 마이크로 외팔 보의 정적 및 동적 응답과 진동 특성을 연구하였다. 스퀴즈 필름 감쇠력에 관한 연구로는 참고문헌 (5)가 있다. 이와 같이 이전의 논문에서는 미소 외팔 보에 영향을 미치는 힘들을 동시에 고려하지 않았다. 따라서 본 논문에서는 정전기력을 받는 미소 외팔 보를 모델링하고 MEMS 구조 뿐만아니라 NEMS 구조의 동적 응답을 알아보기 위해 앞서 말한 스퀴즈 필름 감쇠력에 반데르 발스 힘까지 고려하였으며 일정한 모델을 사용하여 전체적인 크기만을 변화시키면서 각각 힘들의 영향도를 살펴보았다.

2. 운동방정식

본 장에서는 정전기력을 받는 미소 외팔 보에 대한 운동방정식을 유도하고 스퀴즈 필름 감쇠력

[†] 책임저자: 한양대학교 대학원 기계설계학과

E-mail: kky327@hanmail.net

Tel: (02) 2299-8169

* 정회원, 한양대학교 공과대학 기계공학부

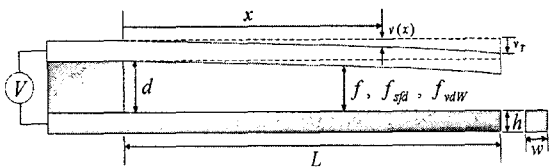


Fig. 1 Configuration of a micro cantilever beam undertaking electrostatic force

과 반데르발스 힘까지 고려하려고 한다. 정전기력을 받는 미소 외팔 보에 스쿼즈 필름 감쇠력과 반데르발스 힘을 고려한 외팔 보는 Fig. 1 과 같이 나타낼 수 있다. 보 상의 위치에 따른 변위 변화를 고려하기 위한 연속계에서의 굽힘 방향 운동방정식은 오일러 보 이론에 근거하여 다음과 같이 주어진다.

$$\rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 v}{\partial x^4} = f - f_{sfa} + f_{vdW} \quad (1)$$

여기서 ρ 와 E 는 단위길이당 질량과 영의 계수, I 와 v 는 2 차 면적모멘트와 변위를 나타낸다. 또 f 는 정전기력을 그리고 f_{sfa} 와 f_{vdW} 는 스쿼즈 필름 감쇠력과 반데르발스 힘을 나타내며 각각 참고 문헌 (1), (4), (5)에 제시된 식으로부터 식 (2), (3), (4) 와 같이 나타낼 수 있다.

$$f = \frac{w\epsilon_0}{2} \left(\frac{V}{d-v} \right)^2 \quad (2)$$

$$f_{sfa} = \frac{16C_r w^3 \eta}{(d-v)^3} \dot{v} \quad (3)$$

$$f_{vdW} = \frac{\pi C_6 \gamma^2 w}{6} \left\{ \frac{1}{(d-v)^3} - \frac{1}{(d-v+h)^3} \right\} \quad (4)$$

식 (3)에서 η 는 공기의 점성계수를 나타내며 C_r 는 식 (5)와 같다. 그리고 식 (4)에서 C_6 는 두 원자 사이의 인력을 나타내며 γ 는 전극봉(바닥)의 밀도를 나타낸다.

$$C_r = 1 - 0.6 \frac{w}{L} \quad (5)$$

이산계 운동 방정식을 구하기 위해 식 (1)에 가중함

수 ϕ_i 를 각각 곱한 후 외팔 보의 영역에 대해 부분 적분하고 경계조건을 대입한다.

$$\int_0^L \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \phi_i + \int_0^L \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right) dx \quad (6)$$

$$= \int_0^L f \phi_i dx - \int_0^L f_{sfa} \phi_i dx + \int_0^L f_{vdW} \phi_i dx$$

$$v(x, t) = \sum_{i=1}^{\mu} \phi_i(x) q_i(t) \quad (7)$$

여기서 $\phi_i(x)$ 는 보의 굽힘방향 모드 함수들을 나타내며 $q_i(t)$ 는 시간의 함수인 일반좌표들이고 μ 는 일반좌표의 수이다. 변위를 식 (7)과 같이 근사화한 후 식 (6)에 대입하면 다음과 같은 운동 방정식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{\mu} M_{ij} \ddot{q}_j + \sum_{j=1}^{\mu} F_{ij}^{sfa} \dot{q}_j + \sum_{j=1}^{\mu} K_{ij} q_j \quad (i=1, \dots, \mu) \quad (8)$$

$$= F_i + F_i^{vdW}$$

여기서

$$M_{ij} = \int_0^L \rho \phi_i \phi_j dx = \rho L \delta_{ij} \quad (9)$$

$$K_{ij} = \int_0^L EI \phi_i'' \phi_j'' dx = \lambda_i^4 \frac{EI}{L^3} \delta_{ij} \quad (10)$$

$$F_i = \int_0^L f \phi_i dx \quad (11)$$

$$F_{ij}^{sfa} = \int_0^L f_{sfa} \phi_i \phi_j dx \quad (12)$$

$$F_i^{vdW} = \int_0^L f_{vdW} \phi_i dx \quad (13)$$

식 (8)을 다음의 무차원 변수들을 이용하여 무차원화 한다.

$$\alpha \equiv \frac{L}{d} \quad (14)$$

$$\beta \equiv \frac{L}{h} \quad (15)$$

$$\kappa \equiv \frac{w}{d} \quad (16)$$

$$\xi \equiv \frac{x}{L} \quad (17)$$

$$\tau \equiv \frac{t}{T} \quad (18)$$

$$\theta_i \equiv \frac{q_i}{d} \quad (19)$$

$$\nu \equiv \frac{v}{d} \quad (20)$$

$$\bar{f} \equiv \frac{6\varepsilon_0 V^2 \alpha^3 \beta}{Eh^2} \quad (21)$$

$$\bar{f}_{sfd} \equiv \frac{96C_r \eta \kappa^2 \alpha \beta}{\sqrt{E\rho_v} h} \quad (22)$$

$$\bar{f}_{vdw} \equiv \frac{2\pi C_6 \gamma^2 \alpha^4}{Eh^3} \quad (23)$$

여기서 ρ_v 는 밀도를 나타내며 T 는 다음과 같다.

$$T = \left(\frac{\rho L^4}{EI} \right)^{1/2} \quad (24)$$

미소 외팔 보의 크기 변화에 따른 각각의 힘을 비교하기 위해 스케일 변수 λ 를 도입하면 다음과 같다.

$$h = h^* \times \lambda \quad (25)$$

스케일 변수 λ 를 이용하여 식 (21), (22), (23)을 정리하면,

$$\bar{f} \equiv \frac{6\varepsilon_0 V^2 \alpha^3 \beta}{E(h^* \times \lambda)^2} \quad (26)$$

$$\bar{f}_{sfd} \equiv \frac{96C_r \eta \kappa^2 \alpha \beta}{\sqrt{E\rho_v} (h^* \times \lambda)} \quad (27)$$

$$\bar{f}_{vdw} \equiv \frac{2\pi C_6 \gamma^2 \alpha^4}{E(h^* \times \lambda)^3} \quad (28)$$

이상의 과정을 통해 얻어진 무차원 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\mu} \bar{M}_{ij} \ddot{\theta}_j + \bar{f}_{sfd} \sum_{j=1}^{\mu} \bar{F}_{ij}^{sfd} \dot{\theta}_j + \sum_{j=1}^{\mu} \bar{K}_{ij} \theta_j \\ = \bar{f} \bar{F}_i + \bar{f}_{vdw} \bar{F}_i^{vdw} \end{aligned} \quad (i=1, \dots, \mu) \quad (29)$$

여기서 $\ddot{\theta}_j$ 는 무차원 시간 τ 에 대해 두 번 미분한 값을 나타내며 위 식에 나타난 행렬들은 다음과 같다.

$$\bar{M}_{ij} = \int_0^1 \psi_i \psi_j d\xi \quad (30)$$

$$\bar{K}_{ij} = \int_0^1 \psi_{i,\xi\xi} \psi_{j,\xi\xi} d\xi \quad (31)$$

$$\bar{F}_i = \int_0^1 \frac{\psi_i}{(1-\nu)^2} d\xi \quad (32)$$

$$\bar{F}_{ij}^{sfd} = \int_0^1 \frac{\psi_i \psi_j}{(1-\nu)^3} d\xi \quad (33)$$

$$\bar{F}_i^{vdw} = \int_0^1 \left[\frac{1}{(1-\nu)^3} - \frac{1}{\left(1 + \frac{\alpha}{\beta} - \nu\right)^3} \right] \psi_i d\xi \quad (34)$$

식 (29)의 운동방정식에서 시간에 따른 변화를 무시함으로써 정적 응답과 관련된 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\sum_{j=1}^{\mu} \bar{K}_{ij} \theta_j = \bar{f} \bar{F}_i + \bar{f}_{vdw} \bar{F}_i^{vdw} \quad (i=1, \dots, \mu) \quad (35)$$

수치해석 시 무차원 변수 α , β 그리고 κ 를 통해 외팔 보의 모델을 일정하게 정할 수 있으며 스케일 변수 λ 의 크기를 변화 시킴으로써 모델의 크기에 따른 각각의 힘을 비교해 볼 수 있다.

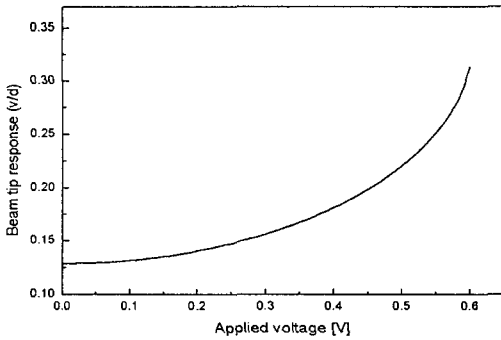
3. 수치해석

수치해석 시에 이용하게 될 모델은 참고문헌 **Table 1** Numerical data used for the simulation

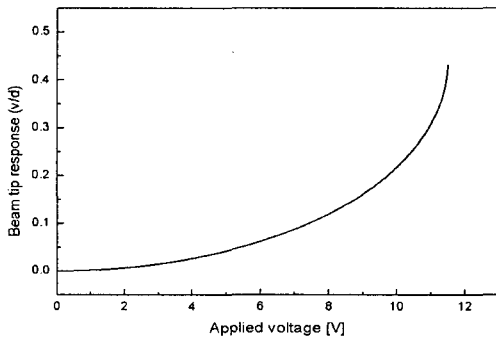
Notatio	Description	Numerical data
ρ_v	volume density	2000kg/m ³

E	Young's modulus	1 TPa
ϵ_0	Free space permittivity	8.8542×10^{-12} F/m
η	Viscous coefficient of air	1.81×10^{-5} Ns/m ²
C_6	Interaction between the two atoms	24.3504×10^{-79} Jm ⁶
γ	Volume density of graphite	1.14×10^{29} m ⁻³

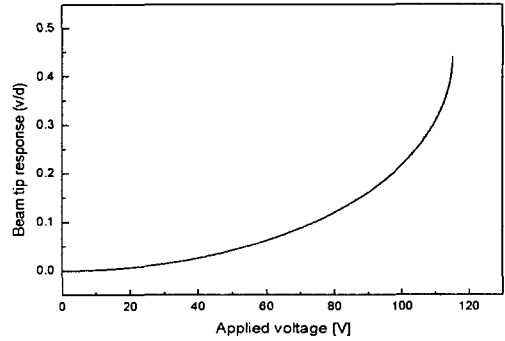
(3)에서 주어진 모델을 이용하였으며 이때 각각의 변수 값들은 $\alpha \equiv L/d = 12.5$, $\beta \equiv L/h = 31.25$, $\kappa \equiv w/d = 0.4$, $h^* = 1.6$ 이다. 수치해석에 사용한 물성 값들은 Table 1 에 나타나 있다. 미소 외팔보는 정전기력에 의해 구동 되므로 허용전압을 알아보는 것이 필요하다. 식 (35)를 통해 전압을 증가시키며 처짐을 살펴 봄으로써 허용전압을 확인해 볼 수 있다. Fig. 2 는 λ 값의 크기를 증가시키면서 전압에 따른 정적 응답으로서 (a)에서는 0volt.에서도 처짐이 발생하는 것을 볼 수 있다.



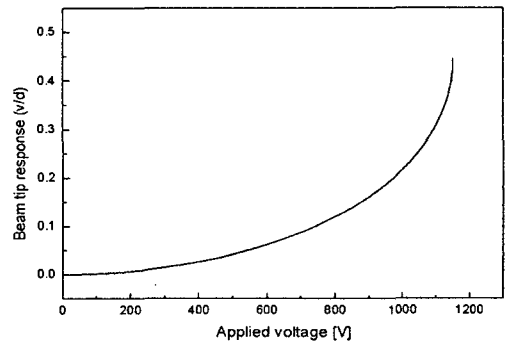
(a) $\lambda = 1 \times 10^{-9}$



(b) $\lambda = 1 \times 10^{-8}$



(c) $\lambda = 1 \times 10^{-7}$



(d) $\lambda = 1 \times 10^{-6}$

Fig. 2 Variations of static deflection of beam tips versus applied voltage

이는 반데르발스 힘에 의해 발생한 것임을 예측할 수 있으며 λ 값이 커짐에 따라 모델에 가할 수 있는 전압의 크기 역시 커짐을 알 수 있다.

동적 해석 시 정전기력에 의한 응답을 살펴보기 위해서는 스케일 변수 λ 의 크기에 따라 전압도 일정하게 증가 시켜야 한다. 따라서 이후에 수행하게 될 동적 응답 해석 시 필요한 전압은 Fig. 3 과 같이 λ 의 크기에 따라 비례적으로 증가하는 전압을 사용하였다. Fig. 4 는 정전기력의 전압을 Fig. 3 과 같이 λ 에 따라 변화시키면서 구한 무차원 변수 \bar{f} , \bar{f}_{sfd} , \bar{f}_{vdw} 의 크기를 구한 것이다.

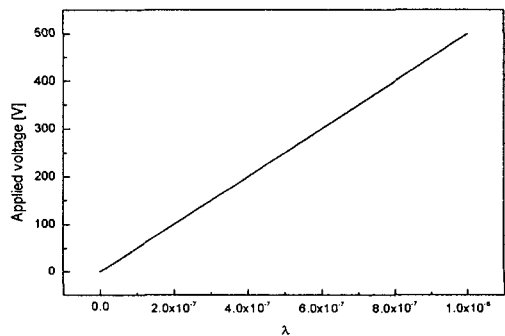


Fig. 3 Applied voltage according to λ

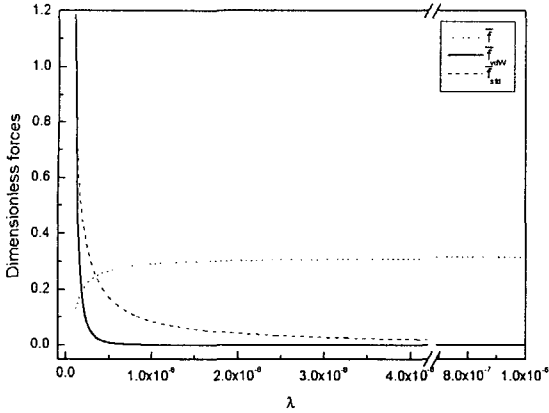
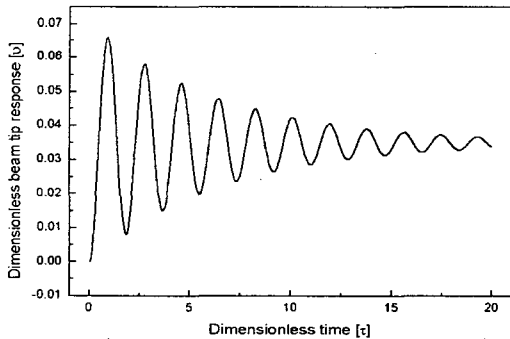


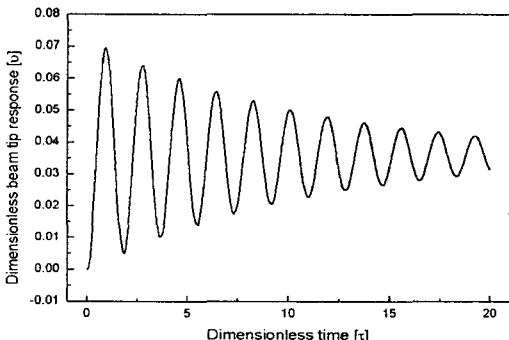
Fig. 4 Variation of dimensionless forces versus λ

λ 값이 작은 부분에서는 반데르발스 힘에 의한 무차원 변수 \tilde{f}_{vdW} 의 크기가 큰 것을 알 수 있으며 이는 모델의 크기가 나노일 경우 동적 응답 시 반데르발스 힘이 다른 힘에 비해 응답에 많은 영향을 미치는 것을 예상할 수 있으며 λ 값이 커짐에 따라 \tilde{f}_{vdW} 값이 급격히 작아지며 모델이 마이크로 크기가 되면 동적 응답에 미치는 영향이 없어지는 것을 확인할 수 있다.

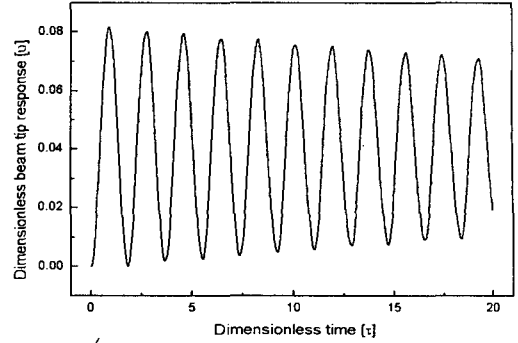
다음으로 Fig. 5에서는 스케일 변수 λ 와 무차원 변수 \tilde{f} , \tilde{f}_{sfd} , \tilde{f}_{vdW} 의 크기에 따라 동적 응답 해석 시 어떠한 경향을 보이는 지에 대해 알아본



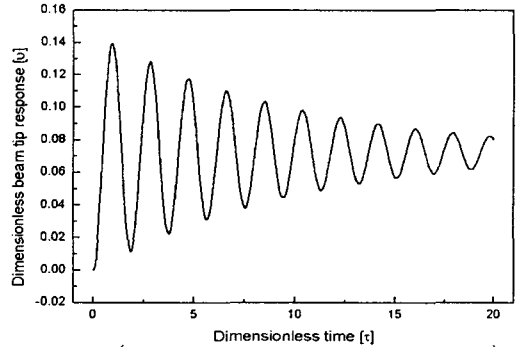
(a) $(3 \times 10^{-9}, 0.2380, 0.04389, 0.2865)$



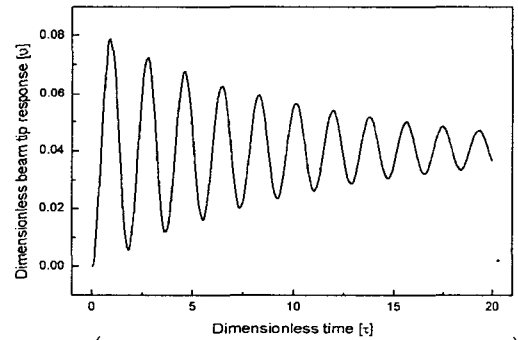
(b) $(5 \times 10^{-9}, 0.2682, 0.00948, 0.1719)$



(c) $(3 \times 10^{-8}, 0.3106, 1.852 \times 10^{-5}, 0.02149)$



(d) $(5 \times 10^{-9}, 0.5188, 0.00948, 0.1719)$



(e) $(3 \times 10^{-8}, 0.3085, 4.389 \times 10^{-5}, 0.1738)$

Fig. 5 Dynamic responses versus four parameters $(\lambda, \tilde{f}, \tilde{f}_{vdW}, \tilde{f}_{sfd})$

결과이다. Fig. 5의 (a)와 (b) 그리고 (c)는 λ 값을 3×10^{-9} 와 5×10^{-9} 그리고 3×10^{-8} 일 때의 동적 응답을 구한 것으로 Fig. 4의 결과에서도 예측할 수 있듯 λ 값의 증가에 따라 스퀴즈 필름 감쇠력이 작아짐을 확인할 수 있었다. 그리고 (d)는 (b)와 동일한 λ 값을 사용하고 전압을 임의로 크게 하여 무차원 변수 \tilde{f} 값을 증가시킨 결과 그래프로서 \tilde{f} 값이 약 두 배 증가됨에 따라 동적 응답의 진폭 역시 거의 두 배 가량 증가함을 알 수 있다. 이것은 \tilde{f} 값이 동적 응답의 진폭에 많은 영향을 주

는 것을 알 수 있는 것이다. 또한 Fig. 5 의 (e)는 (c)와 동일한 λ 값을 이용하였고 \bar{f}_{sfd} 의 값을 크게 하기 위해 무차원 변수 κ 의 값을 1로 한 후의 수치 해석 결과이다. (c)의 결과와 비교해 보았을 때 스퀴즈 필름 감쇠력의 증가로 인하여 응답에서 감쇠에 의한 영향을 많이 받고 있음을 알 수 있으며 \bar{f}_{sfd} 의 값이 비슷한 (b)와 비교해 보았을 때 비슷한 경향의 동적 응답을 볼 수 있었다. 이것은 스케일 변수 λ 값에 많은 차이가 나더라도 \bar{f}_{sfd} 의 크기가 동적 응답 결과의 형태에 많은 영향을 미침을 알 수 있으며 \bar{f}_{sfd} 의 값에 따라 동적 응답의 경향을 예측할 수 있음을 확인하였다. 따라서 어떤 모델이 정해졌을 경우에 대해 각각 변수의 크기를 구할 수 있으며 변수의 크기에 따라 동적 응답에서 진폭의 크기나 전체적인 응답의 형태를 예측할 수 있다.

4. 결론

본 연구에서는 NEMS 나 MEMS 구조물에 응용될 수 있는 정전기력을 받는 미소 외팔 보에 반데르발스 힘과 스퀴즈 필름 감쇠력을 고려한 구조의 정적 및 동적 응답을 구해보았다. 그리고 무차원화를 통해 구한 각각의 힘들에 영향을 미치는 무차원 변수를 스케일 변수의 크기를 변화시키면서 구하였고 임의의 스케일 변수 값에서 동적 응답을 구해보았다. 또한 무차원 변수의 크기를 변화시키며 동적 응답을 비교해 보았다. 이를 통해 정전기력과 관련된 무차원 변수 \bar{f} 는 동적 응답의 진폭에 많은 영향을 미치며 스퀴즈 필름 감쇠력과 관련된 무차원 변수 \bar{f}_{sfd} 는 동적 응답의 전체적인 형태를 결정하는데 큰 영향을 주는 것을 확인할 수 있었다. 또한 반데르발스 힘은 스케일 변수가 아주 작은 나노 크기에서 동적 응답에 영향을 주는 것을 알 수 있었다.

이와 같은 연구는 NEMS 나 MEMS 제작 시 모델을 정하였을 때 고려해야 할 힘을 예측할 수 있으며 그 모델을 사용하여 제작하였을 경우 동적 응답을 예측할 수 있는 정보를 제공한다는 점에서 유용하다고 사료된다.

후기

본 연구는 한국과학재단 지정 한양대학교 최적설계 신기술센터의 연구비지원으로 수행되었습니다.

참고문헌

- (1) Kovacs, Gregory T. A., 1998, *Micromachined Transducers Sourcebook*, McGraw-Hill, pp. 278~281.
- (2) Hirai, Yoshihiko, Marushima, Yoshinari, Soda, Shinnosuke, Jin, Donghao, Kawata, Hiroaki, Inoue, Kouji, Tanaka, Yoshio, 2000, "Electrostatic Actuator with Novel Shaped Cantilever," 2000 International Symposium on Micromechatronics and Human Science, pp. 223~227
- (3) Dequesnes, Marc, Rotkin, S. V., Aluru, N. R., 2002, "Calculation of Pull-in Voltages for Carbon-nanotube-based Nanoelectromechanical Switches," IOP publishing, pp. 120~131.
- (4) Yoo, H. H., Moon, S. J., Jung, K. S., 2004, "Dynamic Analysis of Micro Cantilever Beams Undertaking Electrostatic Forces," Transactions of the Korean Society for Noise and Vibration Engineering, Vol. 14, No. 9, pp. 846~851
- (5) Patrick B. Chu, Phyllis R. Nelson, Mark L. Tachiki, Kristofer S.J. Pister, 1996, "Dynamics of polysilicon parallel-plate electrostatic actuators," Sensors and Actuators A 52, pp. 216~220.