

기초조화가진을 받는 원형 외팔보의 비평면 비선형 현상

Nonplanar Nonlinear Phenomenon of Base Harmonic Excited Circular Cantilever Beam

김명구[†] · 박철희* · 조종두* · 박창호*

Myoung-Gu Kim, Chul-Hui Pak, Chongdu Cho and Chang-Hao Piao

Key Words : Base Harmonic Excitation(기초조화가진), Superharmonic Motion(고차조화운동), Subharmonic Motion(분수조화운동), Torus(원환체), Quasi-periodic(준 주기운동)

ABSTRACT

Flexible circular cantilever beams when excited externally introduce a lot of dynamic characteristics. The non-linear elements that these flexible beams develop include non-linearity due to inertia terms, spring, and damping. They show different characteristics of motion from each other. In the modes of lower order, the non-linearity due to spring is prevalent, while the non-linearity due to inertia is prevalent in the modes of higher order. To analyze these effects, the non-linear phenomena are analyzed experimentally. When the response characteristics of non-linear vibration are analyzed using autospectrum, it is possible to analyze the subharmonic and superharmonic motion by comparison. The phase change is analyzed using the method of phase portrait, and the non-linear characteristics of response characteristics that are developed in flexible structures can be predicted and applied to the stage of design.

1. 서론

길고 얇은 보(Beam)의 동역학적인 운동은 매우 흥미 있는 동역학적인 비선형 응답특성을 보여준다. 길고 얇은 외팔보는 비선형 진동 시 관성항(Inertia), 스프링항, 감쇠항, 중력항, 휨항(Warping term) 등의 비선형성을 포함하고 있다. 외부 가진력이 작은 경우 보는 선형운동을 하지만 외부 가진력이 점점 커지면 보가 내포하고 있는 비선형성을 갖는 요소들에 의해서 선형운동이 비선형운동의 전환이 된다. 비선형계에서만 나타나는 현상인 차수조화운동(Superharmonic), 분수조화운동(Subharmonic), 차수-분수조화운동(Super-subharmonic), 준 주기운동(Quasi-periodic)현상 등이 나타나고 있다. 위 현상들을 분석함으로써 계가 갖고 있는 비선형 요소들의 특성을 분석하고,

동역학적으로 왜 이와 같은 현상을 갖는가에 대한 연구가 필요하다. 또한 이 현상이 어떤 물리적인 특성을 갖는가에 대한 연구가 필요하다. 위의 질문에 대답하기 위해서 길고 얇은 원형 외팔보를 사용하여 실험적인 방법으로 접근을 하였다. 외팔보를 기초조화가진(Base harmonic excitation)을 시켜서 보가 선형운동에서 비선형 운동으로 전환해가는 과정을 분석하였다. FFT의 오토스펙트럼(Autospectrum)과 캡스트럼(Cepstrum)을 이용하여 차수조화운동과 분수조화운동의 특성을 분석하였다. 오실로스코프를 이용하여 비선형 운동 시 발생하는 위상의 변화를 추적하였다. Torus 구조를 분석하여 보의 준 주기현상을 분석하였다.^{(1), (11), (3)} 그리고 비선형 진동에서 위상변화가 갖는 의미를 분석하였다.

2. 일대일 공진에서 외팔보의 비선형 현상

일반적으로 보의 비틀림 모드의 고유주파수가 굽힘모드의 고유주파수보다 매우 높은 주파수를

[†] 인하대학교 기계공학과

E-mail: mgkim21@hotmail.com

TEL: (032) 860-7321 FAX: (032) 868-1716

* 인하대학교 기계공학과

갖는 구조물에서 기초조화가진을 받는 외팔보에서는 일대일 공진공진현상에 의한 평면운동과 비평면 운동이 일어난다. 외팔보의 비선형 운동방정식을 유도하기 위하여, 외팔보의 길이는 L, 단위길이 당 질량 m, 굽힘강성은 D_n, D_s 이다. 일정한 단면적을 가진 보의 비선형 운동방정식은 다음과 같이 미분-적분 방정식으로 표현되며, 이 식에서 외부의 가진력은 $Q_v(s,t) = e\Omega^2 \cos(\Omega t)$ 이다. ^{(9),(10)}

$$\ddot{v} + c\dot{v} + \beta_y v'' = (1 - \beta_y) \left[\dot{w} \int \dot{v} w' ds - w \int \dot{v} w' ds \right] - \frac{(1 - \beta_y)^2}{\beta_y} \left[\dot{w} \int \int \dot{v} w' ds ds \right] - \beta_y \left[\dot{v} (\dot{v} \dot{v} + w \dot{w}') \right] - \frac{1}{2} \left\{ \dot{v} \int \left[\int (\dot{v}^2 + w^2) ds \right] ds \right\} + [\dot{v} (s-1) + \dot{v}] \frac{L}{D_s} mg \quad (1a)$$

$$\ddot{w} + c\dot{w} + w'' = -(1 - \beta_y) \left[\dot{v} \int \dot{v} w' ds - \dot{v} \int w' \dot{v} ds \right] - \frac{(1 - \beta_y)^2}{\beta_y} \left[\dot{v} \int \int \dot{v} w' ds ds \right] - [w' (\dot{w} w' + \dot{v} \dot{v}')] - \frac{1}{2} \left\{ \dot{w} \int \left[\int (\dot{v}^2 + w^2) ds \right] ds \right\} + [\dot{w} (s-1) + \dot{w}] \frac{L}{D_s} mg \quad (1b) + F\Omega^2 \cos(\Omega t) + cF\Omega^2 \sin(\Omega t)$$

식(1a)~(2b)에 대한 경계조건은 다음과 같다.

$$v = w = \dot{v} = \dot{w} = 0 \quad \text{at} \quad s = 0 \quad (2a)$$

$$\dot{v} = \dot{w} = \ddot{v} = \ddot{w} = 0 \quad \text{at} \quad s = 1. \quad (2b)$$

운동방정식 (1a)에 서는 e 는 보의 길이에 따라 정규화 된 보의 길이에 대한 외부 가진력의 진폭의 크기를 나타낸다. 여기서 t 는 무차원화 된 시간변수를 사용하여 무차원화 하였다. 또한 s 는 L, $(\cdot) = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t}, (\cdot)' = \frac{\partial(\cdot)}{\partial s}$ 에 의해 정규화 된 무차원 변수이다. 계의 좌표계는 관성단위벡터 $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ 와, 국부적인 단위벡터 $(\hat{\xi}, \hat{\eta}, \hat{\zeta})$ 을 사용하였다. 기초조화가진은 y 축 방향을 따라서 가진 되며 $v(s,t)$ 와 $w(s,t)$ 는 보의 길이에 의해서 정규화 된 \hat{y} 와 \hat{z} 방향의 보의 중심선에서의 탄성 변위량을 나타낸다. 원형 외팔보의 경우 좌우 대칭 구조이므로 $\Omega = \omega, \beta_y = 1$ 인 조건을 만족한다. 대칭 보에 의한 평면 굽힘 모드와 비평면 굽힘모드 사이에서 일대

일 공진현상이 발생한다. 여기서 β_y 는 평면에서의 굽힘강성과 비평면에서의 굽힘강성의 비이며, ω 는 평면에서의 원형 외팔보의 비감쇠 고유진동수이고 Ω 는 외부 가진력의 가진주파수이다. ⁽¹¹⁾

3. 비선형 현상

3.1 분수조화운동과 차수조화운동

외부의 가진력을 받는 시스템에서 비선형 현상이 발생하면 계는 분수 조화 운동과 차수조화운동이 발생한다. 계에 공급되는 가진주파수가 Ω 이고 계의 응답주파수가 ω 라면 두 주파수 사이에 다음과 같은 관계가 성립된다. ^{(7),(10)}

$$\omega = m\Omega \quad \text{차수조화운동}$$

$$\omega = \frac{1}{n}\Omega \quad \text{분수조화운동}$$

$$\omega = \frac{m}{n}\Omega \quad \text{차수-분수조화운동}$$

여기서 m, n 은 정수 이다. ($m \neq 1, n \neq 1$)

조화운동을 해석하기 위하여 시계열 분석을 해야 하지만 응답특성이 복잡한 경우에는 시계열 분석을 하기 힘들다. 그러므로 응답신호를 FFT 분석을 하여 시간신호를 주파수 신호로 변환을 시키면 조화운동의 응답특성을 해석하기가 쉽다. 오토스펙트럼의 피크치 해석을 통해서 차수조화운동과 분수조화운동, 차수-분수조화운동을 해석할 수 있다.

비선형성을 갖는 응답신호를 오토스펙트럼으로 해석을 하면 많은 조화운동 성분들 검출이 된다. 이 조화운동 성분들의 주기성을 해석하기 위하여 캡스트럼을 사용한다. 캡스트럼은 `대수파워 스펙트럼의 파워스펙트럼`으로 정의한다. 파워 캡스트럼의 정의는 다음과 같다.

$$C_{AA}(\tau) = F^{-1}[\log S_{AA}(f)]$$

$C_{AA}(\tau)$: 파워캡스트럼 (Power cepstrum)

S_{AA} : 오토스펙트럼(Auto spectrum)

F^{-1} : 푸리에 변환(Inverse Fourier Transform)

캡스트럼은 오토스펙트럼을 다시 한번 더 푸리에 변환을 한 것으로 오토스펙트럼 상에서 고주파의 조화성분이나 측대파(Side band frequency)의 성분들이 어느 일정한 주파수 간격으로 스펙트럼

이 나열되어 있으며 그 간격을 하나의 주기로 표현할 수 있다. 컵스트럼에서는 고주파의 조화성분과 측대파 성분들이 시간 축에서 하나의 피크 성분으로 나타나기 때문에 비선형 현상 시 나타나는 주파수변조 현상들을 분석하기 쉽다.

3.2 위상궤적

위상궤적은 평면 방향(x-축)과 비평면 방향(y-축)에서 외팔보의 운동을 2 차원적으로 해석할 수 있다. 일대일 공진에서 평면 운동과 비평면 운동이 주기진동의 형태로 나타나고 있으므로 두 운동을 다음과 같이 표현할 수 있다. ⁽¹¹⁾

$$x = a_1 \cos(\omega_1 t - \alpha_1)$$

$$y = a_2 \cos(\omega_2 t - \alpha_2)$$

일대일 공진에서 $\omega_1 \cong \omega_2$ 이므로

$$x = a_1 \cos(\omega t)$$

$$y = a_2 \cos(\omega t + \varphi) \quad \varphi : \text{위상차}$$

따라서 φ 의 값에 따라 여러 가지 모양의 위상궤적을 그릴 수 있다. 그러므로 φ 의 값의 해석을 통해서 평면 운동과 비평면 운동 사이의 위상변화를 분석할 수 있다.

3.3 위상 공간

비선형 시스템에서의 응답신호를 시간신호에서 위상공간상의 신호로 변환할 수 있다. 응답신호를 미분-적분하여 시계열 분석을 위상공간의 형태로 변화를 시키면 위상공간 내에서 Non-Autonomous periodic orbit 의 형태로 표현된다. 그림 2 에서 검은 점들은 외부 가진주파수에 의해 Particular phase 를 나타내는 궤적들이다. 한 점에서 다음 점까지는 가진주파수 $T = 2\pi/\Omega$ 를 갖는 주기성분이다. 이 관계를 분명히 보기 위해서, 시간변수 $x_3 = t$ 을 갖는 확장된 위상공간 내에서 계의 운동을 표현하는 것이 유용하다. 이 위상공간 상에서 계의 운동은 Autonomous 이며, 각각의 궤적은 상호 교차하지 않는다. 위상공간 내에서 두개의 직교 평면 (x, \dot{x}) 내에서 이 궤적들의 교차를 생각한다면, 이 공간 내에서 Poincare`Map 을 얻을 수 있다. Poincare`Map 은 시간 축을 따라서 가진 주기로 T로 Transverse planes 을 절단하여 얻을 수

있다. 이것의 유용성은 Uniqueness Property 로부터 출발하며, 단점은 넓은 위상공간 내에서 많은 운동을 표현하기 위하여 수많은 면들을 갖는 다른 점이다. 위상공간내의 두개의 면을 연결하면 Solid Torus Region(DXS')이 형성되며 Torus 의 중심은 시간 축이 된다. Torus 의 궤적들은 연속적으로 절단할 수 있는 단 하나의 횡단면을 갖고 있다. 따라서 Toridal Region 은 실제 위상공간은 아니지만 비선형계의 동역학적인 현상을 분석에는 매우 유용하다. ^{(11), (8), (5)}

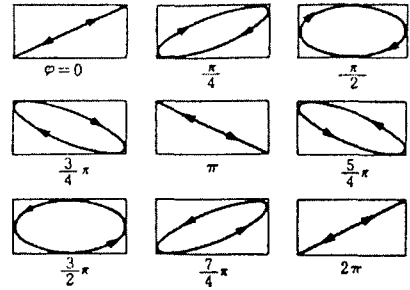


Fig. 1 Phase space on the same frequency

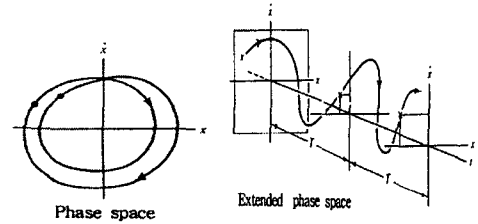


Fig. 2 Phase space and Extended phase space

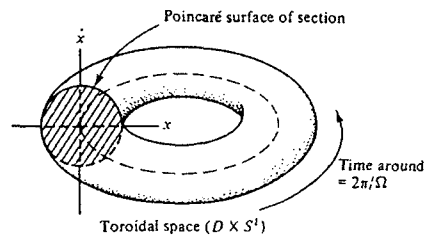


Fig. 3 Poincare' surface of section on the toroidal space

4. 비선형 실험

4.1 실험 장치

비선형 실험을 하기 위하여 균일한 탄성재료인 알루미늄 합금으로 된 원형 보를 사용하였다. 알루미늄 합금의 물성치는 탄성계수 E=72GPa, 강성

계수 $G=27\text{Gpa}$ 이고, 푸아송 비(poisson's ration) $\nu=0.3333$, 단위길이 당 질량 $m=0.0336\text{Kg/m}$, 보의 형상은 지름 $\phi=5\text{mm}$, 길이 $L=675\text{mm}$ 이다. 외팔보의 가진방법은 고정부를 기초조화가진으로 일정한 진폭의 사인파 가진을 하였다.

- 실험에 사용된 측정장치는 다음과 같다.
- FFT signal analyzer (B&K pulse system)
- Charge amplifier (B&K type 2635)
- Accelerometer (1-axis, B&K type 4374)
- Accelerometer (3-axis, B&K type 4370)
- Shaker (LDS U550)
- Power amplifier (LDS)
- Level record (B&K type 2307)
- Oscilloscope (HP 54615B)
- Phase shifter



Fig. 4 Accelerometer position on the circular cantilever beam

Table 1 Measured natural frequency and damping coefficient of the circular cantilever beam

Mode	λ	Theory	Meas.	Damping
1	1.8751	7.94Hz	7.63Hz	1.510%
2	4.6941	49.78Hz	48.25Hz	0.736%
3	7.8548	139.40Hz	135.13Hz	0.341%
4	10.995	273.18Hz	268.12Hz	0.315%

가진기와 보를 고정시키는 지그는 알루미늄 AL2024 로 만들었으며, 지그의 형상은 외팔보의 경계조건을 만족시키고 보가 횡 방향으로 가진을 받도록 설계되었다. 지그의 고유주파수는 x 축 방향에서는 측정주파수(0-400Hz)범위 내에서는 고유주파수가 없고, y 축 방향에서는 150.50Hz 에 하나가 있으며 z 축 방향에서는 208.00Hz 에 고유주파

수가 있다. 따라서 지그의 고유주파수가 외팔보의 고유주파수와 상호관련이 없음을 확인하였다.⁽¹²⁾

4.2 실험방법

유연한 보를 외팔보의 경계조건을 만족시키는 상태로 가진기에 고정을 하였다. 가진기에 공급되는 전압의 크기를 일정하게 하고 가진주파수를 증가하거나 감소시키는 방법으로 실험을 수행하였다. 가진기에 공급되는 전압의 크기를 일정하게 하면 가진기에서 발생하는 조화진동의 속도성분은 가진주파수의 변화와 상관없이 일정한 값을 갖게 된다. 가진 주파수의 증가와 감소는 Sine sweeping 의 형태이며 변화 비율은 0.030Hz/s 이다.

원형 외팔보의 2 차 모드에서 주파수를 고정시키고 가진진폭을 증가시키는 방법으로 진폭이 증가 시 선형진동에서 비선형 진동으로 변화해가는 과정을 분석하였다. 비선형 진동의 분석은 차수조화운동, 분수조화운동, 차수-분수 조화운동을 분석하기 위하여 오토스펙트럼과 캡스펙트럼 기법을 사용하였다. 비선형 진동의 위상변화를 해석하기 위해서 위상계적 분석을 하였고 혼돈의 형태를 보기 위하여 Torus 해석을 하였다.

외팔보의 응답특성을 측정하기 위하여 외팔보의 평면 방향(x-축 방향)과 비평면 방향(y-축 방향)에 각각 B&K 4374 가속도계를 부착하였다. 가속도계의 무게는 각각 0.65g 정도이고, 측정주파수 범위는 1-25KHz, 측정가능 가속도 레벨은 $250,000 \text{ m/s}^2$ 이다. 가속도계의 부착위치는 고정부에서 100mm 높이에 순간접촉제를 이용하여 보의 표면에 고정을 시켰다.

5. 실험 결과 및 고찰

원형 외팔보의 2 차 모드(48.25Hz)에서 발생하는 비선형 응답특성을 오토스펙트럼과 캡스펙트럼을 이용하여 분석하였다. 오토스펙트럼에서 기준주파수 $f_0(48.25\text{Hz})$ 을 중심으로 $2f_0, 3f_0, 4f_0$ 의 고차 조화진동이 발생하였고, $1/2 f_0$ 의 분수 조화진동과 $3/2 f_0, 5/2 f_0$ 의 고차-분수 조화진동이 발생하고 있음을 볼 수 있다(Fig. 5). 2 차 모드의 비선형 응답신호를 캡스트럼으로 해석을 하면, 주파수 영역의 하모닉 성분들을 보다 쉽게 해석할 수 있다. 캡스트럼에서 $f_0(20.51\text{ms})$ 을 기준으로 하여 $3f_0, 4f_0$ 성분들이 큰 값을 갖고 있음을 알 수

있다. 분수조화진동으로 $\frac{1}{2}f_0, \frac{1}{4}f_0$ 성분들이 잘 나타나고 있다(Fig. 6).

2 차 모드에서 평면과 비평면 운동의 위상분석에서 평면 운동에서 일대일 공진에 의한 비평면 운동이 강하게 나타나고 있음을 알 수 있다. 또한 평면과 비평면 사이의 위상각이 180 도까지 변화함을 볼 수 있다. (Fig. 8) Torus 을 이용한 비선형계의 분석에서 2 차 모드의 비선형 운동의 주된 성분이 $\frac{1}{2}f_0$ 의 성분임을 알 수 있다.

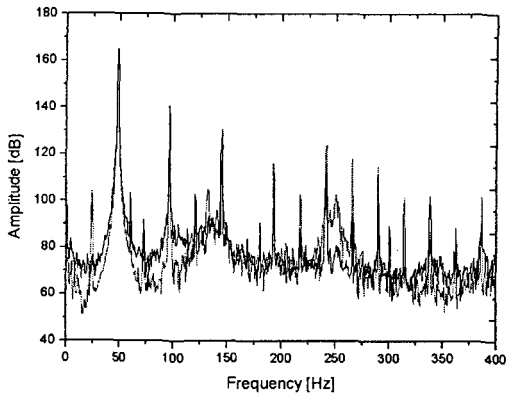


Fig. 5 Autospectrum of the in-planar and out of planar in the second mode

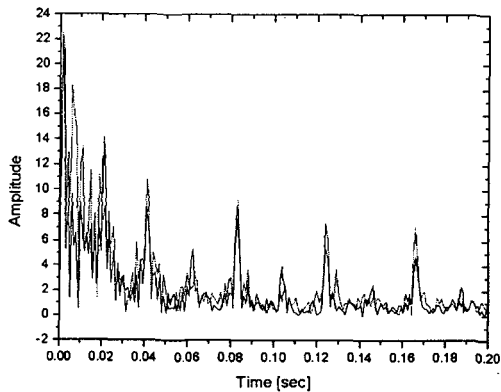


Fig. 6 Cepstrum of the in-planar and out of planar in the second mode

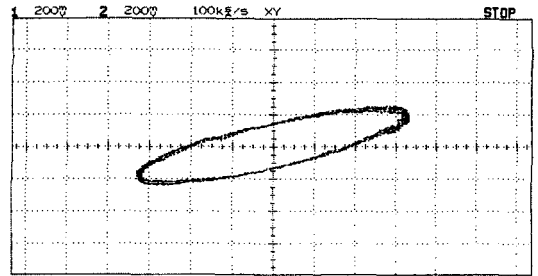


Fig. 7 Phase change in phase space of the second mode (x-planar, y-nonplanar)

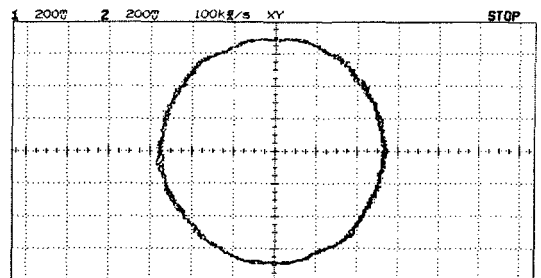


Fig. 8 Phase change in phase space of the second mode (x-planar, y-nonplanar)

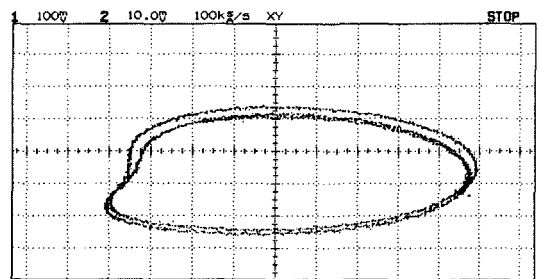


Fig. 9 Torus analysis in the second mode (x-velocity, y-displacement)

6. 결 론

기초조화가진을 받는 유연한 원형 외팔보의 비선형 진동현상을 오토스펙트럼, 켈스펙트럼, 위상계적, Torus 분석을 하였다. 원형 외팔보의 2 차 모드인 48.25Hz 에서 비선형 응답특성인 차수조화운동, 분수조화운동, 차수-분수조화운동을 해석하였다. 오토스펙트럼에서는 $f_0(48.25Hz)$ 을 기준으로 $2f_0, 3f_0, 4f_0$ 의 차수조화운동 성분이 크게 나타

나고 있다. 캡스펙트럼에서는 f_0 을 기준으로 $\frac{1}{2}f_0, \frac{1}{4}f_0$ 성분들인 분수조화운동이 잘 나타나고 있다. 그러나 Torus 을 이용한 위상공간 해석에서는 외팔보 운동의 주성분이 $\frac{1}{2}f_0$ 의 위상궤적 성분이 잘 나타나고 있다. 그러므로 일대일 공진에서 f_0 의 성분 뿐만 아니라 $\frac{1}{2}f_0$ 의 성분도 운동에 중요한 역할을 하고 있음을 알 수 있다. 평면과 비평면의 위상분석에서 위상각의 변화가 크게 나타나고 있음을 볼 수 있다. 따라서 비선형 진동에서 위상 변화에 대한 연구가 필요하다고 본다.

참고문헌

- (1) Pai, P. F. and Nayfeh, A. H., 1990, Nonlinear Non-Planar Oscillations of a Cantilever Beam under Lateral Base Excitation, *Int.J. Nonlinear Mechanics*, Vol.25, No.5, pp.455-474.
- (2) Nayfeh, A. H. and Pai, P.F., 1989, Nonlinear Non-Planar Parametric Responses of an inextensional Beam, *Int.J. Nonlinear Mechanics*, Vol.24, No.2, pp.139-158.
- (3) Haigh, E. C. and King, W. W., 1972, Stability of Nonlinear Oscillations of an Elastic Rod, *J.Acoust.Soc.Am.*52, pp.899-911.
- (4) Nayfeh, A. H. and Mook, D. T., 1979, *Nonlinear Oscillations*
- (5) Abraham, R. H. and Shaw, C. D., 1992, *Dynamics the Geometry of Behavior*, 2nd Ed., Addison-Wesley.
- (6) Blevins, R. D., 1979, *Formulas for Natural Frequency and Mode Shape*, Van Nostrand Reinhold.
- (7) Cusumano, J. P., 1990, *Low-dimensional, Chaotic nonplanar motions of the elastica*, Ph.D.Thesis, Cornell University, New York.
- (8) Pak, C. H., Rand, R. H, and Moon, F. C., 1992, Free Vibrations of a Thin Elastica by Normal Modes, *Nonlinear Dynamics*, Vol.3, pp.347-364.
- (9) M. R. M. Crespo da Silva and C. C. Glynn., 1978, Nonlinear Flexural- Torsional Dynamics of Inextensional Beam-I. Equations of Motion *J. Struct. Mech.* 6., pp.437-448.
- (10) Y. S. Lee, J. M. Joo and C.H. Pak, 1996, On the chaotic vibrations of thin beams by a bifurcation mode, Autumn Annual Conference of Korean Soc. Noise and Vibration Engineering, pp.121-128
- (11) ALI H. NAYFEH, 2000, *NONLINEAR INTERACTIONS Analytical, Computational and Experimental Methods*, JOHN WILEY & SONS, INC., pp. 181-304.
- (12) M. G. Kim, H. S. Lee and C. D. Cho, 2005, Non-linear Phenomenon in the Response of Circle Cantilever Beam, *KSNVE*, Vol. 15, No. 4, pp.445-451.
- (13) Y. S. Choi, K. S. Seo and Y. J. Woo, 2003, Nonlinear Vibration of a Cantilever Beam Subjected to Electromagnetic Forces, *KSME A*, Vol. 27, No. 1, pp. 48-57.
- (14) Jae-Hoon Lim, Goo-Choong Jung and Yeon-Sun Choi, 2003, Nonlinear Dynamic Analysis of Cantilever Tube Conveying Fluid with System Identification, *KSME International Journal*, Vol. 17, No. 12, pp.1994-2003.