

# 샌드위치형 다층 감쇠보의 강제진동 응답 해석

## Forced Vibration Analysis of Multi-Layered Damped Sandwich Beam

원성규† · 정의봉\*

Sung Gyu Won and Weui Bong Jung

**Key Words :** Multi-layered Damped Sandwich Beam(샌드위치형 다층 감쇠보), VEM(점탄성재료), FEM(유한요소법)

### ABSTRACT

In this paper the general equation of motion of damped sandwich beam including arbitrary viscoelastic material layer was derived based on the equation presented by Mead and Markus. The equation of motion of n-layered sandwich beam was represented by  $(n+3)$ th order ordinary differential equation. It was verified that the general equation of motion derived in this paper could represent the equations of motions for single-layered, three-layered, five-layered and multi-layered damped beam. Finite element method for the arbitrary-layered damped beam was formulated and programmed using higher order shape functions. Several numerical examples were implemented to show the effects of damped material.

### 1. 서 론

샌드위치형 감쇠보 구조물은 일반적으로 고감쇠 특성을 나타내는데 이것은 두 개의 탄성재 사이에 점탄성재질이 위치하여 전단변형을 일으킴으로써 진동에너지를 소산시키는 것으로 설명할 수 있다.

이러한 샌드위치형 감쇠보에 대한 초기 연구는 DiTaranto<sup>(1)</sup>, Mead 와 Markus<sup>(2)</sup>, Yan 과 Dowell<sup>(3)</sup> 그리고 Rao 와 Nakra<sup>(4)</sup> 등에 의해 이루어졌으며 그 내용은 주로 3 층 적층보의 자유진동, 강제진동 그리고 형상의 비대칭성 등에 관한 것이다.

본 논문에서는 Mead 와 Markus 의 운동방정식을 바탕으로 임의의 다층 감쇠층을 갖는 감쇠보의 운동방정식을 유도하고 그 강제진동응답을 해석하고자 한다.

### 2. 샌드위치형 다층 감쇠보

#### 2.1 3 층 감쇠보의 운동방정식

두 탄성재 사이에 감쇠재가 끼워져 있는 3 층 감쇠보에 대하여 Mead 와 Markus<sup>(2)</sup> 는 다음 식과 같은 운동방정식을 유도하였다.

$$\frac{\partial^6 w}{\partial x^6} - g(1+bY) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{m}{D_t} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial t^2} - g \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) = \frac{1}{D_t} \left( \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} - gq \right) \quad (1)$$

이 식은 다음 식과 같이 고쳐서 쓸 수 있다.

$$C_6 w^{(6)} + C_4 w^{(4)} + K_2 m \ddot{w}^{(2)} + K_0 m \ddot{q} = K_2 q^{(2)} + K_0 q \quad (2)$$

단,

$$C_6 = -D_t E_1 h_1 E_3 h_3 h_2$$

$$C_4 = (bd_2^2 E_1 h_1 E_3 h_3 + D_t(E_1 h_1 + E_3 h_3))G_2$$

$$K_2 = -E_1 h_1 E_3 h_3 h_2$$

$$K_0 = (E_1 h_1 + E_3 h_3)G_2$$

여기서  $E_i$  는 탄성재의 탄성계수,  $m$  은 감쇠보의 단위길이당 질량 그리고  $q$  는 외부분포하중이다.

#### 2.2 5 층 감쇠보의 운동방정식

Mead 와 Markus 가 유도한 3 층 감쇠보의 운동방정식과 같은 방법을 5 층 감쇠보로 확장하였다. Fig. 1 에 5 층 감쇠보의 모델을 나타내었다. 여기서  $h_1, h_3, h_5$  는 탄성재의 높이를 나타내고  $h_2, h_4$  는 감쇠재의 높이를 나타낸다.  $b$  는 감쇠보의 폭이고  $d_2, d_4$  는 각 감쇠재 아래위에 위치한 탄성재의 중심거리를 나타낸다. 전단변형률  $\gamma$  와 변위의 관계식

$$\gamma_2 = \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad \gamma_4 = \frac{\partial u_4}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad (3)$$

을 Fig. 2 에 적용하면 전단응력  $\tau$  와 변위는 다음의 관계를 갖는다.

$$\tau_2 = G_2 \cdot \gamma_2 = G_2 \left( \frac{d_2}{h_2} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{u_1 - u_3}{h_2} \right) \quad (4)$$

$$\tau_4 = G_4 \cdot \gamma_4 = G_4 \left( \frac{d_4}{h_4} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{u_3 - u_5}{h_4} \right)$$

† 부산대학교 대학원 기계설계공학과

E-mail : fabre@pusan.ac.kr

Tel : (051) 510-3088, Fax : (051) 517-3805

\* 부산대학교 기계공학부

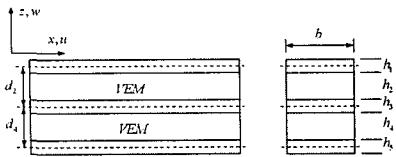


Fig. 1 Dimensions and coordinate of 5-layered damped beam

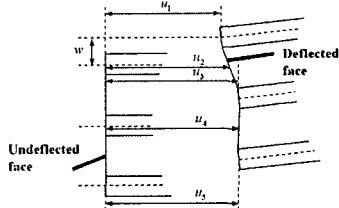


Fig. 2 Displacement in a section

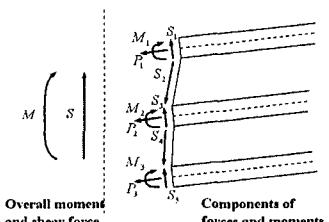


Fig. 3 Forces and moments acting on a section

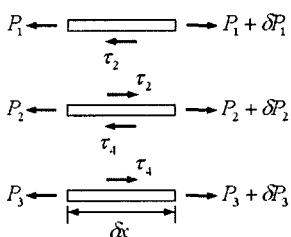


Fig. 4 Longitudinal forces acting on a section

여기서  $u_i$ 는 각 탄성재의 길이방향 변위이고  $w$ 는 전체 감쇠보의 횡방향 변위이고  $G_i^*$ 는 감쇠재의 복소전단탄성계수이다.

그리고 Fig. 3으로부터 5층 감쇠보 전체의 전단력은 식(5)과 같이 정할 수 있다.

$$S = D_i \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \tau_2 b d_2 - \tau_4 b d_4 \quad (5)$$

여기서  $D_i$ 는 각 탄성층의 굽힘강성의 합이다.

Fig. 4에서 감쇠보 전체의 전단력과 분포하중 사이의 관계식 및 각 탄성재에서의 힘평형식을 구하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial S}{\partial x} & \frac{\delta P_1}{\delta x} &= \tau_2 \\ \frac{\delta P_3}{\delta x} &= -\tau_2 + \tau_4 & \frac{\delta P_5}{\delta x} &= -\tau_4 \end{aligned} \quad (6)$$

여기서  $p$ 는 관성력을 포함한 분포하중이고  $P_i$ 는 탄성재에 작용하는 단위폭당 힘이다.

연립미분방정식(6)에 식(3)~(5)를 대입하면 다음과 같은 운동방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} C_8 \frac{\partial^8 w}{\partial x^8} + C_6 w \frac{\partial^6 w}{\partial x^6} + C_4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + K_4 m \frac{\partial^4 \ddot{w}}{\partial x^4} \\ + K_2 m \frac{\partial^2 \ddot{w}}{\partial x^2} + K_0 m \ddot{w} = K_4 \frac{\partial^4 q}{\partial x^4} + K_2 \frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + K_0 q \end{aligned} \quad (7)$$

단,

$$\begin{aligned} C_8 &= (h_2 h_4)(E_1 h_1 E_3 h_3 E_5 h_5)(1)(D_i) \\ C_6 &= -(G_4^* h_2)(E_1 h_1)(E_3 h_3 + E_5 h_5)(D_i) \\ &\quad - (G_4^* h_2)(E_1 h_1)(bd_4^2 E_3 h_3 E_5 h_5) \\ &\quad - (G_2^* h_4)(E_5 h_5)(E_1 h_1 + E_3 h_3)(D_i) \\ &\quad - (G_2^* h_4)(bd_2^2)(E_5 h_5)(E_1 h_1 E_3 h_3) \\ C_4 &= (G_2^* G_4^*)(1)(E_1 h_1 + E_3 h_3 + E_5 h_5)(D_i) \\ &\quad + (G_2^* G_4^*)(1)(bd_2^2 E_1 h_1 E_3 h_3) \\ &\quad + (G_2^* G_4^*)(1)(bd_4^2 E_3 h_3 E_5 h_5) \\ &\quad + (G_2^* G_4^*)(1)b((d_2 + d_4)^2 E_1 h_1 E_5 h_5) \\ K_4 &= (h_2 h_4)(E_1 h_1 E_3 h_3 E_5 h_5)(1) \\ K_2 &= -(G_4^* h_2)(E_1 h_1)(E_3 h_3 + E_5 h_5) \\ &\quad - (G_4^* h_2)(E_5 h_5)(E_1 h_1 + E_3 h_3) \\ K_0 &= (G_2^* G_4^*)(1)(E_1 h_1 + E_3 h_3 + E_5 h_5) \end{aligned}$$

식(7)의 5층 감쇠보의 운동방정식에서  $h_4$ 와  $h_5$ 가 영인 경우 식(2)의 3층 감쇠보의 운동방정식과 같게 된다. 따라서 식(7)은 식(2)를 포함하는 식이라고 할 수 있다.

### 2.3 다층 감쇠보의 운동방정식

임의의 수의 감쇠층을 포함하는 경우의 운동방정식도 전단력과 분포하중의 미분관계식과 각 탄성층에서의 힘의 평형관계식으로부터 연립미분방정식의 형태로 구성할 수 있다. 본 논문에서는 앞 절에서 언급한 3층 및 5층 감쇠보의 운동방정식을 7층, 9층 등의 감쇠보에 적용하여 일반식을 유도하였다.  $n$ 개의 감쇠층이 있는 경우의 횡변위에 대한 일반화된 운동방정식은 다음과 같다.

$$C_{2(n+2)} \frac{\partial^{2(n+2)} w}{\partial x^{2(n+2)}} + \cdots + C_4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + K_{2n} m \frac{\partial^{2n} \ddot{w}}{\partial x^{2n}} \quad (8)$$

$$+ \cdots + K_0 m \ddot{w} = K_{2n} \frac{\partial^{2n} q}{\partial x^{2n}} + \cdots + K_0 q$$

식(8)에서  $n$  개의 감쇠층을 갖는 경우, 즉  $2n+1$  개의 다층 감쇠보인 경우에 횡방향운동의 지배방정식은 최고차항이  $2n+4$  차인  $w$  만의 미분방정식으로 표현되는 것을 알 수 있다.

### 3. 유한요소법

앞에서 샌드위치형 감쇠보의 횡방향운동의 지배방정식은 고차의 짹수차만의 미분방정식으로 표현되는 것을 확인하였다. 본 논문에서는 앞에서 유도한 고차의 미분방정식의 강제진동응답을 예측하기 위해서 유한요소법을 이용하였다.

겔러킨법을 적용하기 위하여 식(8)의 양변에 가중함수  $w^*$ 를 곱하고 요소길이에 대해서 적분하면 식(9)과 같다. 여기서  $a$ 는 요소길이의 반이다.

$$\int_a^l w^* \left[ C_{2(n+2)} \frac{\partial^{2(n+2)} w}{\partial x^{2(n+2)}} + \cdots + C_4 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right. \\ \left. + K_{2n} m \frac{\partial^{2n} \ddot{w}}{\partial x^{2n}} + \cdots + K_0 m \frac{\partial \ddot{w}}{\partial x} \right] dx \quad (9)$$

$$= \int_a^l w^* \left[ K_{2n} \frac{\partial^{2n} q}{\partial x^{2n}} + \cdots + K_0 q \right] dx$$

유도된 지배방정식은  $2n+4$  차의 미분항이 포함되므로 일반적으로 탄성보에서 가정하는 노드당 2 자유도가 아닌 노드당  $n+2$  자유도의 유한요소를 가정하였다. 이 경우 형상함수는 다음과 같이  $2n+3$  차의 다항식으로 가정하였다.

$$w = [N] \{w\}_e \quad (10)$$

단,

$$\{w\}_e = \left\{ w_1, \frac{\partial w_1}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n+1} w_1}{\partial x^{n+1}}, w_2, \frac{\partial w_2}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n+1} w_2}{\partial x^{n+1}} \right\}^T$$

식(10)을 식(9)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 이산화된 운동방정식을 유도할 수 있다.

$$[M]_e \{\ddot{w}\}_e + [K]_e \{w\}_e = \{f\}_e \quad (11)$$

단,

$$[M]_e = K_{2n} m \int_a^l \left[ \frac{\partial^n N}{\partial x^n} \right]^T \left[ \frac{\partial^n N}{\partial x^{n+2}} \right] dx + \cdots + K_0 m \int_a^l [N]^T [N] dx$$

$$[K]_e = C_{2(n+2)} \int_a^l \left[ \frac{\partial^{n+2} N}{\partial x^{n+2}} \right]^T \left[ \frac{\partial^{n+2} N}{\partial x^{n+2}} \right] dx + \cdots + C_4 \int_a^l \left[ \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \right]^T \left[ \frac{\partial^2 N}{\partial x^2} \right] dx$$

$$\{f\}_e = K_{2n} q \int_a^l \left[ \frac{\partial^n N}{\partial x^n} \right]^T dx + \cdots + K_0 q \int_a^l [N]^T dx$$

식(11)을 각 요소에 대해서 중첩하면 전체 구조물에 대한 유한요소지배방정식을 구할 수 있다.

### 4. 수치예제

Table 1의 물성치를 사용하여 Fig. 5 와 같이 구속된 다층 감쇠외팔보의 강제진동응답을 해석하였다. 가진점은 구속단에서 20mm 지지고 응답점은 자유단에서 10mm 지점이다. Fig. 5a)는 감쇠재가 없는 외팔보를 나타내고, Fig. 5b)는 탄성재 사이에 감쇠재가 끼워져 있는 3 층 감쇠보를 나타내며, Fig. 5c)는 3 개의 탄성재와 2 개의 감쇠재로 구성된 5 층 감쇠보를 나타낸다.

Table 1 Material properties

	탄성재	감쇠재
Length (mm)	250	
Width (mm)	10	
$h_i$ (mm)	3	2
$\rho_i$ (kg/m <sup>3</sup> )	2710	1300
$E_i$ (N/m <sup>2</sup> )	$7.1 \times 10^{10}$	.
$\nu_i$	0.33	.
$G_i$ (N/m <sup>2</sup> )	.	$5.0 \times 10^6$
$\eta_i$	.	0.2

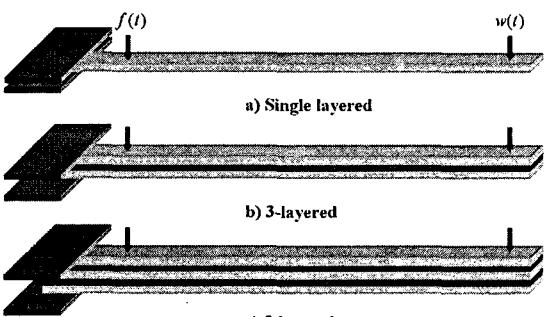


Fig. 5 Numerical models of damped beam

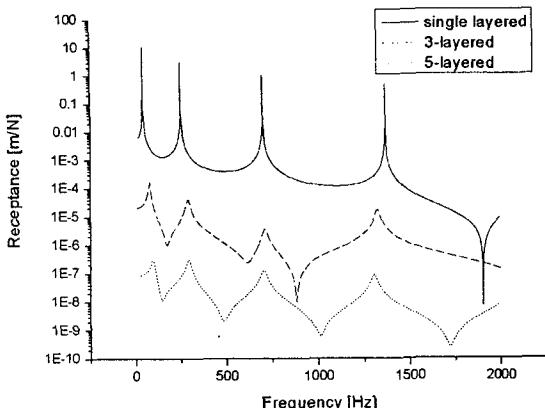


Fig. 6 Receptance of multi-layered damped beam

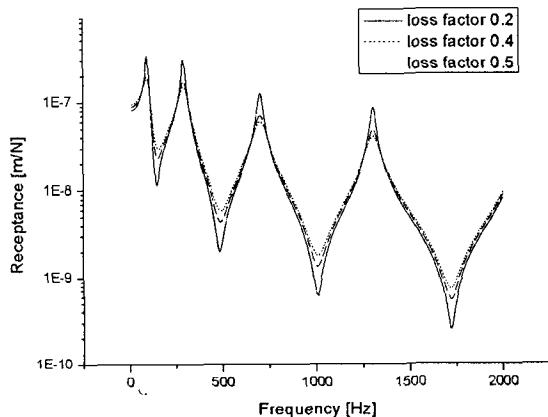


Fig. 7 Receptance according to loss factor (5-layered)

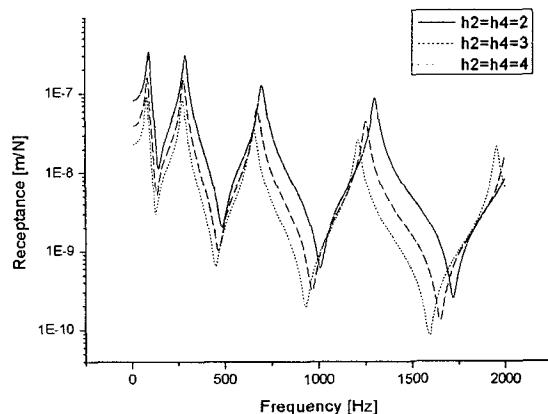


Fig. 8 Receptance according to VEM thickness (5-layered)

Fig. 6 은 감쇠층이 0, 1, 2 개인 경우에 감쇠보의 응답을 비교한 것으로 감쇠보의 전체 두께가 두꺼워지면서 응답이 작아지는 것을 볼 수 있다.

Fig. 7은 동일한 조건의 5 층 감쇠보에 대해서 감쇠층의 손실계수만을 0.2, 0.4, 0.5로 증가시키면서 응답을 비교한 것이다. 손실계수의 변화에 대한 고유진동수의 변화는 거의 없지만 손실계수가 0.4~0.5인 경우의 공진응답의 크기는 0.2인 경우의 50~60% 정도로 작아진다.

Fig. 8은 동일한 조건의 5 층 감쇠보에 대해서 감쇠층의 두께만을 2, 3, 4mm로 증가시키면서 응답을 비교한 것이다. 이 경우 감쇠보의 단위길이 당 질량과 횡방향 강성이 증가하였고 그 결과로 고유진동수가 감소하고 전주파수에서의 응답레벨이 작아졌다.

## 5. 결 론

본 논문에서는 Mead 와 Markus 의 운동방정식을 바탕으로 샌드위치형 다층 감쇠보에 대한 일반화된 운동방정식을 유도하였다.

본 논문에서 유도된 일반화된 운동방정식은 감쇠층이 없는 경우와 3 층, 5 층 감쇠보 등을 포함하는 것을 확인하였다.

일반화된 운동방정식으로부터 유한요소법을 이용하여 이산화된 운동방정식을 유도하였으며 강체진동을 해석할 수 있는 프로그램을 개발하였다.

수치예제로서 1 층, 3 층, 5 층을 갖는 샌드위치형 감쇠보에 적용하여 보았다.

## 후 기

본 연구는 국방부가 지정한 수중운동체특화연구센터(UVRC)의 지원에 의해 수행되었습니다.

## 참고문헌

- (1) DiTaranto, R. A., 1965, "Theory of the Vibratory Bending for Elastic and Viscoelastic Finite Length Beams," *Trans. of the ASME, J. of Applied Mechanics*, Vol. 32, pp. 881~886.
- (2) Mead, D. J. and Markus, S., 1969, "The Forced Vibration of a Three-Layer Damped Sandwich Beam with Arbitrary Boundary Conditions," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 10(2), pp. 163~175.
- (3) Yan, M. J. and Dowell, E. H., 1972, "Governing Equations for Vibrating Constrained Layer Damping of Sandwich Plates and Beams," *Trans. of the ASME, J. of Applied Mechanics*, Vol. 94, pp. 1041~1046.
- (4) Rao, Y. V. K. and Nakra, B. C., 1974, "Vibrations of Unsymmetrical Sandwich Beams and Plates with Viscoelastic Cores," *J. of Sound and Vibration*, Vol. 34(3), pp. 309~326.