

미분변환법을 이용한 축대칭 원판의 자유 진동 해석

Free Vibration Analysis of Axisymmetrical Circular Plate by Using Differential Transformation Method

신영재† · 윤종학* · 지영철* · 김준년* · 페디나노*

Shin Young Jae, Yun Jong Hak, Jy Young Chel, Kim Jun Nyen and Ferdinand T.

Key Words : Differential Transformation Method(미분변환법), Ring Mass(링 질량), Elastic Support(탄성지지)

ABSTRACT

The free vibration of solid circular plates has been studied using the differential transformation method(DTM). The effects such as mass at edge and elastic restraints have been considered. In order to avoid the singularity problem at the solid circular center two regularity conditions were applied with respect to the number of circumferential nodal line. The non-dimensional natural frequencies of the general circular plates were obtained for various boundary conditions. The results obtained by this method were compared with previous works. DTM showed fast convergency, accuracy, efficiency and validity in solving vibration problem of general circular plates.

1. 서 론

기계를 구성하는 기본 구조물에서 원판은 기계 설계시 중요한 요소 중 하나이며, 다양한 분야에 적용되고 있다. 그 중에서 탄성지지되며, 집중질량이 작용하는 원판에 관한 연구는 오래 전부터 연구되어왔다.

Gross 와 Laura 는 원판중심에 질량이 추가하여 원판과 질량의 비와 회전스프링계수와 관계에 따른 고유진동수를 연구 하였으며⁽¹⁾, Laura 는 그 후에 회전·병진스프링으로 지지되고 층으로 이루어진 원판에 관한 고유진동수와 스프링계수의 변화에 따른 연구를 수행하였고⁽²⁾, Achong 는 회전·병진스프링으로 지지되고 질량이 추가된 각각의 원판과 타원판의 고유진동수와 거동을 연구하였고⁽³⁾, Wu, Wang 와 Liu 는 미분구적법(GDQM)에 의한 다양한 두께를 가지는 원판의 고유 진동수를 해석하였다⁽⁴⁾. 이와 같이 원판에 대한 연구는 다양한 방법으로 많은 연구자들에 의하여 지금까지 활발히 연구되고 있다

이러한 원판에 대한 연구들은 해석적 방법과 수치적인 방법을 통하여 행하여지고 있지만, 해석적 방법으로 원판을 해석할 경우 복잡한 지배방정

식과 특이성 문제로 인하여 해를 얻기가 어렵고, 해를 얻더라도 많은 시간이 소요된다. 이와 같은 문제를 해결하기 위해 원판의 해석 시 간단한 수식관계에 의한 빠른 수렴성을 갖는 수치해석 방법이 요구되며, 이와 같은 요구조건을 충족하는 수치해석 방법 중의 하나가 미분변환법(Differential Transformation Method)이다. 이 수치해석법은 1986년 Zhou 가 전기회로에 관한 연구에서 선형과 비선형 초기값 문제의 해를 구하기 위해 처음 사용하였으며⁽⁵⁾, Chen 과 Ho 는 진동문제에 미분변환법을 처음 적용하였다⁽⁶⁾. 그리고 Malik 와 Dang 는 미분변환법을 적용한 연속시스템에서 진동을 해석하여 미분변환법의 타당성과 빠른 수렴성을 검증하였다⁽⁷⁾. 이와 같이 미분변환법은 많은 연구자들에 의해 활발히 연구되고 있으며 다양한 공학 분야에 적용되고 있다⁽⁸⁻¹²⁾.

본 연구의 목적은 노달라인(nodal line)에 따른 원판의 지배방정식을 유도하고, 유도된 지배방정식과 경계조건에 미분변환법을 적용하여 고유진동수를 해석하는 것으로 외경이 탄성지지단인 경우와 외경에 링질량(ring mass)이 작용하는 경우에 대하여 수치해석을 수행하였다.

그 결과와 기존의 연구 결과와 비교하여 미분변환법의 타당성 및 유용성을 검증하였고, 원판질량과 링질량의 임의의 비와 탄성계수에 따라 원판의 노달라인의 고유진동수를 연구하였다.

† 책임저자; 안동대학교 기계공학부

E-mail : yjshin@andong.ac.kr

Tel : (054) 820-5435, Fax : (054) 823-1630

* 안동대학교 대학원

2. 지배방정식

2.1 원판의 지배방정식

Fig. 1 은 원판의 가장자리에 링질량 M 이 있고, 병진 및 회전스프링의 강성이 각각 K, Φ 로 지지되고 있는 반지름이 a 인 원판을 나타내고 있다.

R, θ 는 각각 반지름 방향 및 원주방향을 나타내는 극좌표로 나타내고 있다.

일반적으로 원판의 자유 횡진동의 운동방정식을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial R^2} + \frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) u + \frac{\rho h \omega^2}{D} u = 0 \quad (1)$$

여기서, u 는 횡변위, ρ 는 판의 밀도, h 는 판 두께, ω 는 고유진동수 이며, $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ 는 휨 강성을 나타내며, μ, E 는 각각 원판의 포아송비 (poisson rate)와 탄성계수를 의미한다.

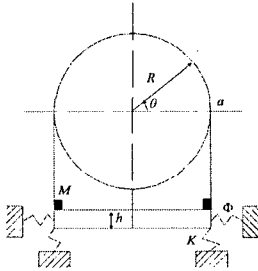


Fig. 1 An elastically supported circular plate carrying a ring mass along the edge

식(1)의 일반해와 무차원 변수를 각각 다음과 같이 가정한다.

$$u(R, \theta) = \sum_{nl=1}^{\infty} w_{nl}(r) \cos nl\theta, \quad r = \frac{R}{a} \quad (2)$$

여기서, nl 은 원판의 노달라인을 나타낸다.

일반해와 무차원 변수를 지배방정식에 대입하여 식(1)을 다시 정리하면 다음과 같다.

$$A_1 \frac{d^4 w}{dr^4} + A_2 \frac{d^3 w}{dr^3} + A_3 \frac{d^2 w}{dr^2} + A_4 \frac{dw}{dr} + A_5 w = 0 \quad (3)$$

여기서, A_1, A_2, A_3, A_4 및 A_5 는 각각 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A_1 &= r^4, & A_2 &= 2r^3 + 2r^4 \\ A_3 &= r^4 - (r^2 + 2nl^2 r^2) + (2 + \mu)r^3 \\ A_4 &= (1 + 2nl^2)(r - r^2 + 2nl^2 r^2) + \mu r^3 \\ A_5 &= (nl^4 - 4nl^2) + 3nl^2 r - \mu nl^2 r^2 - r^4 \Omega^2 \end{aligned} \quad (4)$$

여기서, Ω^2 는 원판의 무차원 고유진동수를 나타내며, 무차원 고유진동수는 다음과 같다.

$$\Omega^2 = \frac{\rho h \omega^2 a^4}{D} \quad (5)$$

그리고 병진 및 회전스프링계수의 무차원 강성비는 다음과 같다.

$$Ka^3/D = Ta, \quad \Phi a/D = Ra \quad (6)$$

2.2 경계조건에 대한 해석

원판의 진동해석에 있어서 중심($r=0$)에서 특이성을 가지는 문제가 발생을 한다.

이 문제를 해결하기 위해서 원판중심에 정규조건(regularity conditions) 및 원판 가장자리의 경계조건은 탄성지지단을 사용한다.

원판 중심에서의 정규조건은 다음과 같다.

$r=0$ 일 때

$$w = 0, \quad \frac{d^2 w}{dr^2} = 0 \quad (k=1, 3, 5, \dots) \quad (7a, b)$$

$$\frac{dw}{dr} = 0, \quad \frac{d^3 w}{dr^3} = 0 \quad (k=0, 2, 4, \dots) \quad (8a, b)$$

원판 가장자리의 조건은 다음과 같다.

$r=1$ 일 때

1) 탄성지지단

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dr^2} + \mu \frac{dw}{dr} - \mu nl^2 w + \frac{\Phi a}{D} \frac{dw}{dr} &= 0 \\ \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{d^2 w}{dr^2} + (\mu nl^2 - 2nl^2 - 1) \frac{dw}{dr} & \end{aligned} \quad (9a, b)$$

$$+ (3nl^2 - \mu nl^2) w - \frac{Ka^3}{D} w = 0$$

원판의 가장자리에 작용하는 링질량 M 과 원판의 질량과의 관계는 다음과 같으며, 각 경계조건은 다음과 같이 된다.

$$\alpha = \left(M \int_0^{2\pi} r_0 d\phi \right) / \rho h \pi a^2 \quad (10)$$

2) 탄성지지단 질량추가

$$\begin{aligned} \frac{d^2 w}{dr^2} + \mu \frac{dw}{dr} - \mu nl^2 w + \frac{\Phi a}{D} \frac{dw}{dr} &= 0 \\ \frac{d^3 w}{dr^3} + \frac{d^2 w}{dr^2} + (\mu nl^2 - 2nl^2 - 1) \frac{dw}{dr} & \end{aligned} \quad (11a, b)$$

$$+ (3nl^2 - \mu nl^2) w - \frac{Ka^3}{D} w + \frac{M\omega^2}{D} w = 0$$

3. 미분변환법

미분변환법은 테일러 시리즈(Taylor series expansion)에 기본을 두고 있다. 이 방법은 선형 파

비선형의 공학문제에 적용할 수 있고, 간단한 순환 관계에 의해서 해를 구할 수 있으며, 해의 정확도가 대단히 높은 수치해석 기법이다.

임의의 원함수(original function)에 대한 변환미분 변환은 다음과 같이 정의 된다

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \quad (12)$$

여기서 $Y(k)$ 을 T-function 이라 한다.

$Y(k)$ 의 미분역변환은 다음과 같이 정의 된다.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x-x_0)^k Y(k) \quad (13)$$

여기서 미분변환의 정의 식 (12)를 미분역변환 식(13)에 대입하여 다시 쓰면 원함수 $y(x)$ 는 다음과 같이 유도된다.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x-x_0)^k \frac{1}{k!} \left[\frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \quad (14)$$

상기 식 (14)에서 미분변환은 테일러 시리즈가 유래되었다는 것을 알 수 있다.

상기의 정의로부터 다음과 같은 미분변환법에 관한 기본적인 연산을 구할 수 있다.

실제의 적용에 있어서는 $y(x)$ 는 근사적으로 유한개의 항만을 고려하여 다음과 같이 표시된다.

$$y(x) = \sum_{k=0}^n (x-x_0)^k Y(k) \quad (15)$$

여기서 n 은 자연수로서 해의 수렴도에 의해 결정 되어 진다.

4. 미분변환법의 적용 및 수치해석

원판의 무차원 지배방정식(3)과 경계조건식((7a, b) ~ (9a, b), (11a, b))의 미분변환법 적용하여 아래와 같은 행렬식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \overline{W}(0) \\ \overline{W}(1) \\ \vdots \\ \overline{W}(n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

상기 방정식의 해인 $\overline{W}(0), \overline{W}(1), \dots, \overline{W}(n)$ 가 0이 아닌 값을 가지기 위해서는 식 (17)의 행렬식이 0이 되어야 한다.

$$\det \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & a_{1,n+1} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & a_{2,n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n+1,1} & a_{n+1,2} & \cdots & a_{n+1,n} & a_{n+1,n+1} \end{bmatrix} = 0 \quad (17)$$

고유진동수 방정식(Natural frequency equation)인

상기의 식으로부터 원판에 대한 무차원 고유진동수를 구할 수 있다.

Table 1 A comparison of the non-dimensional natural frequencies of solid circular plates with rotational and translational spring constants ($\mu = 0.3$)

Ta	Ra	The ring mass to plate mass ratio. α				
		0.01	0.1	0.25	1	
1	1	Ref(3)	1.382	1.328	1.250	0.995
		DT	1.382	1.328	1.250	0.995
	10	Ref(3)	3.737	3.658	3.531	2.999
		DT	3.737	3.658	3.531	2.999
	32	Ref(3)	5.032	5.000	4.946	4.640
		DT	5.031	5.000	4.946	4.640
∞	1	Ref(3)	1.400	1.343	1.261	0.999
		DT	1.400	1.343	1.261	0.999
	10	Ref(3)	4.223	4.078	3.863	3.119
		DT	4.223	4.078	3.863	3.119
	32	Ref(3)	6.715	6.575	6.347	5.384
		DT	6.715	6.574	6.347	5.384

Table 2 The non-dimensional natural frequencies for mass-loaded elastically supported circular plates($Ta = 10$, $Ra = 0.1$, $\mu = 0.3$)

nl		The ring mass to plate mass ratio. α			
		0.3	0.6	0.9	1.0
0	1	3.311	3.134	2.969	2.918
	2	8.824	7.635	6.985	6.831
	3	33.636	32.189	31.536	31.392
1	1	4.889	4.220	3.761	3.638
	2	17.741	16.431	15.797	15.653
	3	17.741	51.154	50.421	50.262
2	1	6.794	5.663	4.953	4.769
	2	30.233	28.570	27.799	27.627
	3	75.005	73.041	72.218	72.041
3	1	10.615	8.666	7.498	7.202
	2	45.425	43.356	42.436	42.233
	3	99.953	97.721	96.809	96.615

4.1 링질량이 있는 원판

Table 1은 미분변환법을 이용해서 탄성지지된 원판의 가장자리에 작용하는 링질량과 원판의 질량의 비에 따른 수치해석결과를 기존방법으로 연구한 결과와 서로 비교하기 위해서 표로 작성했으며, 그 결과가 일치 함을 알 수 있다⁽³⁾.

Table 2는 원판의 중심이 고정이고 가장자리가 탄성지지단 조건으로 원판의 질량과 링질량 비의 변화에 따른 각 노달라인의 무차원고유진동수를 구한 것이다. 질량비가 증가함에 따라 고유진동수가

작아지는 것을 알 수가 있다.

4.2 링질량이 없는 원판

Table 3 은 원판의 각각의 노달라인과 회전 및 병진스프링 계수에 따른 고유진동수의 변화를 나타내고 있으며, 질량비 $\alpha = 0.5$ 로 하고 수치해석한 결과이다. 병진스프링계수가 고정일 때 회전스프링계수가 높아질수록 고유진동수가 증가 함을 알 수 있으며, 회전스프링계수가 고정일 때 병진스프링계수가 높아질수록 고유진동수가 증가 함을 알 수 있다.

Table 3 The non-dimensional natural frequencies of solid circular plates with rotational and translational spring constants ($\mu = 0.3$)

Ta	Ra		The nodal lines. nl			
			0	1	2	3
1	1	1	1.145	1.840	4.447	8.492
		2	8.269	17.795	30.112	45.004
		3	33.713	52.733	74.662	99.380
	0.1	1	1.141	1.475	3.889	7.867
		2	7.050	16.533	28.875	43.792
		3	32.467	51.517	73.472	98.212
	10	1	1.151	2.468	5.847	10.538
		2	11.279	22.050	35.182	50.665
		3	39.153	58.876	81.280	106.340
0.1	1	1	0.365	1.290	4.214	8.360
		2	8.208	17.775	30.103	44.999
		3	33.706	52.729	74.660	99.379
	0.1	1	0.365	0.626	3.612	7.721
		2	6.973	16.512	28.865	43.787
		3	32.460	51.514	73.471	98.211
	10	1	0.365	2.126	5.688	10.442
		2	11.245	22.036	35.174	50.660
		3	39.147	58.873	81.278	106.340

5. 결 론

본 연구는 가장자리에 질량을 가지는 원판에 미분변환법을 사용하여 원주 방향 노달라인의 수에 따른 각 경계조건에서 자유진동 해석을 수행하였다.

그 결과 미분변환법을 이용한 수치해석 결과는 기존의 연구 결과와 비교하여 미분변환법의 타당성 및 유용성을 입증하였다.

원판의 자유 진동연구에 이용한 미분 변환법의 적용 시, 원판의 중심의 정규조건을 노달라인의 수에 따라 적용하고 다양한 경계조건과 가장자리에 적용한 질량 비에 따른 수치해석을 수행하였으며, 그 결과 기존의 연구 결과와 잘 일치함을 알 수 있다.

참고문헌

- (1) Grossi R. O. and Laura P. A. A., 1986, "A note on vibration polar orthotropic circular plates carrying concentrated masses", *Journal of Sound and Vibration* 106, pp. 181~186.
- (2) Laura P. A. A., 1991, "Numerical experiments on vibrating circular plates with stepped thickness and with edges elastically restrained against rotation and translation", *Journal of Sound and Vibration* 146, pp. 533~537.
- (3) Achong A., 1995, "Vibrational analysis of circular and elliptical plates carrying point and ring masses and with edges elastically restrained", *Journal of Sound and Vibration* 183, pp. 157~168.
- (4) Wu T. Y., Wang Y. Y. and Liu G. R., 2002, "Free vibration analysis of circular plates using generalized differential quadrature rule", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 191, pp. 5365~5380.
- (5) Zhou J. K., 1986, "Differential transformation and its applications for electrical circuits, Wuhan China:Huazhong University Press.
- (6) Chen C. K. and Ho S. H., 1996, "Application of differential transformation to eigenvalue problem", *Journal Applied Mathematics and Computation.* 79, 173~188.
- (7) Moinuddin Malik. and Dang. H. 1998, "Vibration analysis of continuous systems by differential transformation", *Applied Mathematics and Computation*, 96, pp. 17~26.
- (8) 권경문, 신영재, 유영순, 2001, "미분변환에 의한 비균질 보의 진동해석", *한국소음진동공학회 2001년도 추계학술대회 논문집*, pp. 617~621.
- (9) 신영재, 윤종학, 황기섭, 지영철, 로엘, 2004, "변분포 평면응력을 받는 직사각형 판의 진동과 좌굴해석", *한국소음진동공학회 2004년도 추계학술대회논문집*, pp. 651~656.
- (10) 신영재, 황기섭, 윤종학, 유영찬, 2003, "미분변환법에 의한 탄성 지반상의 열립 균열을 가진 Euler-Bernoulli 보의 진동해석", *한국소음진동공학회 2003년도 추계학술대회논문집*, pp. 690~695.
- (11) 신영재, 윤종학, 전수주, 유영찬, 2003, "Free vibration analysis of solid annular circular membranes with continuously varying density using the differential transformation method", *한국소음진동공학회 2003년도 추계학술대회논문집*, pp. 988~993.
- (12) 신영재, 전수주, 윤종학, 노엘, 황기섭, 지영철, 2004, "Vibration analysis for the circular plates by using the differential transformation method" *Eleventh International Congress on Sound and Vibration*, pp. 3723~3732.