

# 이중크랙을 가진 단순지지 보의 자유진동 해석

## Free Vibration Analysis of Simply Supported Beam with Double Cracks

안 성 진\*·손 인 수\*\*·윤 한 익†

Sung-Jin Ahn, In-Soo Son and Han-Ik Yoon

**Key Words :** Free Vibration(자유진동), Simply Supported Beam(단순지지 보), Double-crack(이중크랙), Eigenvalue(고유치), Flexibility Matrix(유연행렬)

### ABSTRACT

In this paper we studied about the effect of the double cracks on the dynamic behavior of a simply supported beam. The equation of motion is derived by using Lagrange's equation and analyzed by numerical method. The simply supported beam is modeled by the Euler-Bernoulli beam theory. The crack section is represented by a local flexibility matrix connecting three undamaged beam segments. The influences of the crack depth and position of each crack on the vibration mode and the natural frequencies of a simply supported beam are analytically clarified. The theoretical results are also validated by a comparison with experimental measurements.

### 1. 서 론

크랙은 구조물의 불안정을 증대시켜 구조물의 진동특성과 안정성을 변화시키며, 이러한 크랙은 실제로 구조물에서 2 개 이상 존재할 가능성이 있으며 이로 인하여 더욱 복잡한 진동현상을 수반하게 된다. 따라서 2 개 이상의 크랙이 존재하는 경우 각 크랙의 위치와 크기에 따른 상호 연성관계에 의한 구조물의 동적특성을 파악하는 것은 구조물의 안정성 확보에 중요한 문제라 할 수 있다. 크랙과 중동력을 고려한 보에 대한 연구는 티모센코 보 이론을 적용하여 크랙과 중동력이 보의 동적 안정성 및 동적응답에 미치는 영향에 대한 연구결과<sup>(1)</sup>가 있으며, 크랙과 이동질량을 가진 보 형태 구조물의 응답 및 진동수 변화에 대한 많은 연구결과들이 발표되어지고 있다.<sup>(2-4)</sup> 그러나 이들의 연구는 단일크랙(single crack)을 대상으로 한 경우가 대부분이며 이중크랙(double cracks)이 있는 보를 대상으로 한 연구는 소수에 불과하다. Ostashowicz 등<sup>(5)</sup>은 외팔보의 단면 및 양면에 2 개의 개구형 크랙이 존재하는 경우를 가정하여 해석적인 방법으로 두 크랙의 위치 및 깊이를 변수로 1 차 고유진동수의 변화를 고찰하였으며,

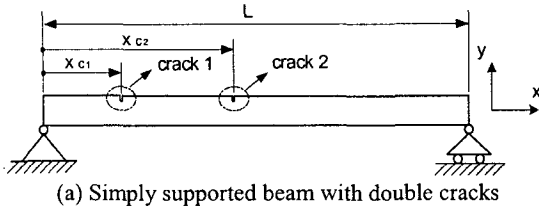
Sekhar<sup>(6)</sup>는 단순지지 상태의 금속재료의 로터에 대하여 유한요소해석으로 2 개의 횡방향 개구형 크랙의 상호 위치 및 깊이를 변수로 하여 고유진동수, 모드형상 및 위험속도 한계 등을 분석하였다. 또 Douka 등<sup>(7)</sup>은 2 개의 크랙이 존재하는 외팔보에 수직하중이 작용하는 경우 각 크랙의 크기에 따른 외팔보의 고유진동수 변화를 예측하는 방법을 제시하였다.

이 연구에서는 이중크랙이 존재하는 단순지지 보의 자유진동에 대하여 해석하였다. 크랙의 위치와 크기가 단순지지 보의 진동특성에 미치는 영향에 대하여 수치해석 하였으며, 이 결과를 실험을 통하여 확인하였다. 단순지지 보의 해석은 오일러-베르누이 보 이론을 적용하였으며, 크랙은 비진진, 개구형 크랙이라 가정하였다.

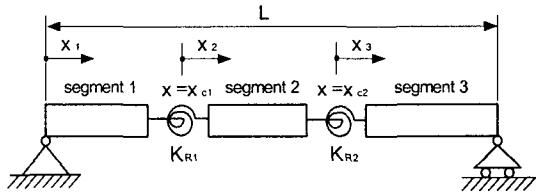
### 2. 시스템 모델

Fig. 1 은 이중크랙을 가진 단순지지 보를 나타낸다. 여기서  $L$  은 단순지지 보의 전체 길이를 나타내며,  $x_{c1}$  과  $x_{c2}$  는 크랙 위치를 나타낸다. 단순지지 보에서 각 크랙의 위치를 기준으로 세 부분으로 분리하여 모델링 하였으며, 크랙 위치에서는 크랙의 영향에 의한 파괴역학적 변수를 회전스프링 상수( $K_{R1}$ ,  $K_{R2}$ )로 변환하여 수치해석에 이용하였다. Fig. 2 의  $b$  와  $h$  는 각각 사각 단면 보의 가로와 높이의 길이를 나타낸다.

† 윤한익 ; 동의대학교 기계공학부  
E-mail : hiyoon@deu.ac.kr  
Tel : (051) 890-1645, Fax : (051) 890-2232  
\* 동의대학교 대학원 기계공학과  
\*\* 동의대학교 산업기술개발연구소



(a) Simply supported beam with double cracks



(b) Model of simply supported double-cracked beam

Fig. 1 Geometry of simply supported double-cracked beam

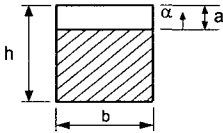


Fig. 2 Geometry of the cracked section of the beam

## 2.1 에너지식

단순지지 보의 횡변위는 가정모드법을 이용하여 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$y_k(x, t) = \sum_{i=1}^{\mu} \phi_k(x) q_i(t) \quad (1)$$

여기서  $q_i(t)$ 는 일반화 좌표,  $\mu$ 는 모드의 수를 나타낸다. 또, 크랙을 가진 단순지지 보의 고유함수  $\phi_i(x)$ 는 크랙이 존재하는 위치를 기준으로 다음과 같이 표현할 수 있다.

I) segment 1 ( $0 \leq x \leq x_{c1}$ );

$$\begin{aligned} \phi_{i1}(x) = & A_1 \cos(\lambda_i x) + A_2 \sin(\lambda_i x) \\ & + A_3 \cosh(\lambda_i x) + A_4 \sinh(\lambda_i x) \end{aligned} \quad (2)$$

II) segment 2 ( $x_{c1} \leq x \leq x_{c2}$ );

$$\begin{aligned} \phi_{i2}(x) = & A_5 \cos(\lambda_i x) + A_6 \sin(\lambda_i x) \\ & + A_7 \cosh(\lambda_i x) + A_8 \sinh(\lambda_i x) \end{aligned} \quad (3)$$

III) segment 3 ( $x_{c2} \leq x \leq L$ );

$$\begin{aligned} \phi_{i3}(x) = & A_9 \cos(\lambda_i x) + A_{10} \sin(\lambda_i x) \\ & + A_{11} \cosh(\lambda_i x) + A_{12} \sinh(\lambda_i x) \end{aligned} \quad (4)$$

여기서  $\lambda_i$ 는 단순지지 보의 진동수 방정식으로 부터 쉽게 구할 수 있다. 식(2)~식(4)에서 미지수  $A_1, A_2, \dots, A_{12}$ 는 단순지지 보의 경계조건과 크랙 위치에서의 연속조건에 대입하여 구할 수 있다.

$$\text{at } x=0, \quad \phi_{i1}(0) = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 \phi_{i1}(0)}{\partial x^2} = 0, \quad (5)$$

$$\text{at } x=L, \quad \phi_{i3}(L) = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 \phi_{i3}(L)}{\partial x^2} = 0$$

$$\phi_{i1}(x_{c1}) = \phi_{i2}(x_{c1}), \quad \frac{\partial^2 \phi_{i1}(x_{c1})}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi_{i2}(x_{c1})}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^3 \phi_{i1}(x_{c1})}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 \phi_{i2}(x_{c1})}{\partial x^3}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \phi_{i2}(x_{c1})}{\partial x} - \frac{\partial \phi_{i1}(x_{c1})}{\partial x} = \frac{EI}{K_{R1}} \frac{\partial^2 \phi_{i2}(x_{c1})}{\partial x^2}$$

$$\phi_{i2}(x_{c2}) = \phi_{i3}(x_{c2}), \quad \frac{\partial^2 \phi_{i2}(x_{c2})}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \phi_{i3}(x_{c2})}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^3 \phi_{i2}(x_{c2})}{\partial x^3} = \frac{\partial^3 \phi_{i3}(x_{c2})}{\partial x^3}, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \phi_{i3}(x_{c2})}{\partial x} - \frac{\partial \phi_{i2}(x_{c2})}{\partial x} = \frac{EI}{K_{R2}} \frac{\partial^2 \phi_{i3}(x_{c2})}{\partial x^2}$$

중력의 영향을 무시하고, 이중크랙을 가진 단순지지 보의 에너지식을 구할 수 있다.<sup>(3)</sup> 또, 선형 탄성구간에서 Castigliano의 정리에 의하여 크랙에 의해서 부가되는 변위와 크랙 부분의 유연행렬을 각각 구할 수 있으며, 해석에 필요한 회전 스프링 상수는 영향이 가장 큰 제 1 파괴모드에 해당하는 항만을 고려하여 계에 적용하였다.

## 2.2 계의 운동방정식

계의 운동방정식은 에너지식을 Lagrange 방정식에 대입하여 구할 수 있으며 구해진 계의 운동방정식은 다음과 같은 행렬 형태를 가진다.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}\mathbf{q} = \mathbf{0} \quad (8)$$

여기서  $\mathbf{M}$ 과  $\mathbf{K}$ 는 다음과 같다.

$$\mathbf{M} = \sum_{i=1}^{\mu} m \left[ \int_0^{x_{c1}} \phi_{i1}^2(x) dx + \int_{x_{c1}}^{x_{c2}} \phi_{i2}^2(x) dx + \int_{x_{c2}}^L \phi_{i3}^2(x) dx \right] \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{K} = \sum_{i=1}^{\mu} & \left[ EI \left[ \int_0^{x_{c1}} \{\phi_{i1}'(x)\}^2 dx + \int_{x_{c1}}^{x_{c2}} \{\phi_{i2}'(x)\}^2 dx \right. \right. \\ & + \left. \int_{x_{c2}}^L \{\phi_{i3}'(x)\}^2 dx \right] + K_{R1} \left( \frac{\partial \phi_{i2}(x_{c1})}{\partial x} - \frac{\partial \phi_{i1}(x_{c1})}{\partial x} \right)^2 \\ & + K_{R2} \left( \frac{\partial \phi_{i3}(x_{c2})}{\partial x} - \frac{\partial \phi_{i2}(x_{c2})}{\partial x} \right)^2 \end{aligned} \quad (10)$$

### 3. 실험

이중크랙이 있는 단순지지 보의 고유진동수를 실험을 통하여 측정하였다. 실험에 이용한 단순지지 보의 길이가 0.4 m, 단면은  $0.01 \times 0.01 \text{ m}^2$ 의 사각단면이다.

보의 탄성계수  $E = 2.16 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$  이고 밀도  $\rho = 7650 \text{ kg/m}^3$  이다. Fig. 3 은 본 실험의 실험 장치의 구성을 나타낸다. 여기서 Impact hammer(DYTRAN, series 5801 A), 가속도계(B&K, type 4507), 신호분석기(CADA-X 3.5D)로 실험하였다.

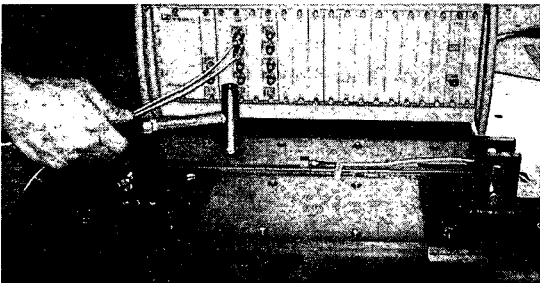


Fig. 3 Experiment set-up of a simply supported beam with double cracks

### 4. 결과 및 고찰

이 논문에서는 이중크랙을 가진 단순지지 보의 고유진동수에 미치는 이중 크랙의 영향을 이론적 해석과 실험적 결과를 통하여 연구하였다. 운동방정식의 유도와 해석은 Lagrange 방정식 및 4 차의 Runge-Kutta 법으로 수행하였으며, 크랙의 위치와 깊이는 다음의 무차원화된 값을 이용하였다.

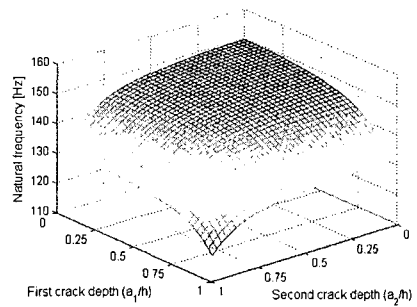
$$\xi_{c1,2} = \frac{x_{c1,2}}{L}, \quad H_{1,2} = \frac{a_{1,2}}{h} \quad (11)$$

Table. 1 Natural frequency of a simply supported beam with double cracks for the first mode ( $\xi_{c2}=0.5, H_1=0.5$ )

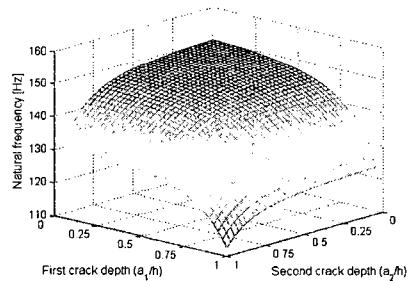
First crack position : $\xi_{c1}$	Second crack depth : $H_2$	Natural frequency [Hz]		Error(%) : $ E-T /E \times 100$
		T : Theory	E : Experiment	
0.1	0.1	148.96	149.5	0.36
	0.3	146.56	146.8	0.16
	0.5	137.30	139.8	1.79
0.3	0.1	141.89	142.0	0.08
	0.3	139.81	140.8	0.70
	0.5	131.72	134.5	2.06

Table 2 Natural frequency of a simply supported beam with double cracks for the first mode

First crack position : $\xi_{c1}$	Second crack position : $\xi_{c2}$	$H_1(a_1/h) = 0.5$			$H_2(a_2/h) = 0.5$	
		$H_2 = 0.1$	$H_2 = 0.3$	$H_2 = 0.5$	$H_1 = 0.1$	$H_1 = 0.3$
0.1	0.2	149.16	148.31	144.71	145.92	145.69
	0.5	148.96	146.56	137.30	138.29	138.11
	0.7	149.07	147.48	141.07	142.13	141.93
0.3	0.4	141.91	140.01	132.52	139.17	145.69
	0.5	141.89	139.81	131.72	138.16	138.11
	0.7	141.98	140.63	135.11	141.98	140.63
0.5	0.6	138.09	136.35	129.44	139.08	137.12
	0.7	138.16	136.89	131.72	141.89	139.81
	0.8	138.23	137.56	134.71	145.66	143.42



(a)  $\xi_{c1} = 0.3, \xi_{c2} = 0.7$



(b)  $\xi_{c1} = 0.5, \xi_{c2} = 0.7$

Fig. 4 Contours of natural frequency of double-cracked beam due to the crack depth for the first mode

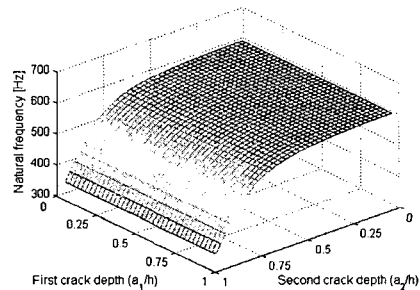


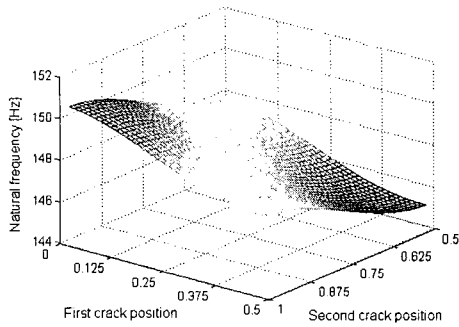
Fig. 5 Contours of natural frequency of double-cracked beam due to the crack depth for the second mode ( $\xi_{c1} = 0.5, \xi_{c2} = 0.7$ )

## 5. 결론

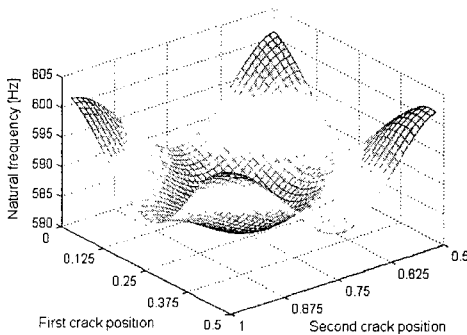
이중크랙을 가진 단순지지 보의 고유진동수에 미치는 크랙의 깊이와 위치에 따른 영향을 수치 해석하였으며, 실험을 통하여 이를 확인하였다. 단순지지 보의 오일러-베르누이 보의 이론에 적용하였으며, 운동방정식의 유도는 Lagrange 방정식을 이용하였다. 이중크랙을 가진 단순지지 보의 크랙이 존재하는 부분에서 회전 탄성스프링에 의해 연결되었다고 가정하였다. 크랙의 위치가 일정할 때 이중크랙을 가진 단순지지 보의 고유진동수는 크랙의 깊이에 반비례하고 첫번째 크랙이 단순지지 보의 중간에 존재할 때 단순지지 보의 고유진동수는 크랙의 위치변화에 매우 민감함을 알 수 있다.

## 참고문헌

- (1) Takahashi, I., 1999, "Vibration and Stability of non-uniform Cracked Timoshenko Beam Subjected to Follower Force," *Computers and Structures*, Vol. 71, pp. 585 ~ 591.
- (2) Mahmoud, M. A. and Abou Zaid, M. A., 2002, "Dynamic Response of a Beam with a Crack Subject to a Moving Mass," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 256, No. 4, pp. 591 ~ 603.
- (3) Yoon, H. I. and Son, I. S., 2002, "'Dynamic Characteristics of Cantilever Pipe Conveying Fluid with the Moving Masses," *Transactions of the KSNVE in Korea*, Vol. 12, No. 7, pp. 550 ~ 556.
- (4) Yoon, H. I., Jin, J. T. and Son, I. S., 2004, "A Study on the Dynamic Behavior of Cracked Pipe Conveying Fluid Using Theory of Timoshenko Beam," *Transactions of the KSNVE in Korea*, Vol. 14, No. 3, pp. 236 ~ 243.
- (5) Ostachowicz, W. M. and Krawczuk, M., 1991, "Analysis of the Effect of Cracks on the Natural Frequencies of a Cantilever Beam," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 150, No. 2, pp. 191 ~ 201.
- (6) Sekhar, A. S., 1999, "Vibration Characteristics of a Cracked Rotor with Two Open Cracks," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 223, No. 4, pp. 497 ~ 512.
- (7) Douka, E., Bammios, G. and Trochidis, A., 2004, "A Method for Determining the Location and Depth of Cracks in Double-cracked Beams," *Applied Acoustics*, Vol. 65, pp. 997 ~ 1008.



(a) first mode



(b) second mode

**Fig. 6** Contours of natural frequency of double-cracked beam due to the crack position

$$(H_1 = 0.3, H_2 = 0.3)$$

Table. 1 은 이중크랙을 가진 단순지지 보의 1 차 모드의 고유진동수를 실험 값과 이론적 결과값을 서로 비교한 것이다. 실험과 이론의 오차가 가장 큰 것이 2.06%이므로, 실험 값과 이론의 결과값이 잘 일치 함을 알 수 있다. Table. 2 는 각 크랙의 깊이와 위치에 따른 이중크랙을 가진 단순지지 보의 고유진동수를 나타내었다.

Fig. 4~6 은 이중크랙을 가진 단순지지 보의 고유진동수에 미치는 크랙의 영향을 나타낸 것이다. Fig. 4 와 Fig. 5 는 첫번째 크랙의 위치가 단순지지 보의 왼쪽 지지대로부터 0.5 인 지점에, 그리고 두번째 크랙이 0.7 인 지점에 존재할 때, 크랙의 깊이에 따른 단순지지 보의 고유진동수 변화를 나타낸 것이다. Fig. 6 은 첫번째와 두번째 크랙의 깊이가 모두 0.3 일 때, 크랙의 위치에 따른 단순지지보의 고유진동수 변화를 나타낸 것이다. 크랙의 위치가 일정할 때 이중크랙을 가진 단순지지 보의 고유진동수는 크랙의 깊이에 따라 반비례함을 알 수 있다.