

직사각형 구멍을 갖는 직사각형판의 자유진동해석 Free Vibration Analysis of Rectangular Plate with a Rectangular Cutout

곽 문 규† · 한 상 보*
Moon K. Kwak and Sangbo Han

Key Words : Free Vibration(자유진동), 직사각형판(Rectangular Plate), 직사각형 구멍(Rectangular Cutout)

ABSTRACT

This paper is concerned with the vibration analysis of a rectangular plate with a rectangular hole. Even though there have been many methods developed for the addressed problem, they suffer from computational time. In this paper, we developed a new methodology called Independent Coordinate Coupling Method which can couple two independent coordinate systems for the entire plate domain and the hole. By matching the deflection condition imposed on the expressions, the relationship between the global axes and the local axes is derived. This formula is then used for the calculation of the eigenvalue problem. The numerical results show the efficacy of the proposed method.

1. 서 론

구멍이 있는 직사각형판은 구조물의 일부로 선박, 비행기, 기계구조물, 원자력 발전소 등에 다양하게 사용되고 있다. 그러나 이렇게 구멍이 있는 정방형판의 진동 문제에는 엄밀해가 존재하지 않는다. Rayleigh-Ritz 방법과 유한요소법이 사용되어 왔는데, Rayleigh-Ritz 방법은 구멍이 비교적 단순한 기하학적인 형태를 가지는 경우에 제한적으로 적용되었다. 구멍을 가지는 직사각형판의 진동 문제에 Rayleigh-Ritz 방법이나 유한요소법을 적용하면 고유치 문제로 귀결되며 고유치 문제의 해를 통해 고유진동수와 고유모드가 얻어진다.

구멍을 가지며 모든 변의 경계 조건이 고정인 정방형 판에 대해 Monahan 등[1]은 유한요소법을 적용하고 실험을 통해 수치 계산 결과를 검증하였다. Paramasvam [2]은 유한차분법을 적용하여 단순지지와 고정 경계조건에 대해 수치 계산을 수행하였다. Aksu and Ali[3]는 하나 이상의 구멍을 가지는 경우에 대해 유한차분법을 적용하였다. 구멍을 가지는 복합재 판의 경우에 대해서는 Rajamani 등[4]이 잘라낸 부분이 변위와 관련되어 외부에서 인가된 하중과 같다고 가정을 사용하여 수치계산을 수행하였다. Rajamani 등[5]은 단순지지와 고정 경계 조건을 가지는 등방성과 이방성판에 대해 구멍의 크기를 변화시켜 가면서 구멍이 고유진동 특성에 미치는 영향을 조사하였다.

Ali and Atwal[6]은 Rayleigh-Ritz 방법을 사용하여 직사각형 구멍을 가지는 단순지지 직사각형판의 고유진동수를 계산하였다. Rayleigh-Ritz 방법에 사용한 허용함수는 균일 하중을 가지는 경우의 정적 변형을 사용하였다. Lam 등[7]은 직사각형 판의 진동에 대해 판을 몇 개의 작은 영역으로 나누고 Rayleigh-Ritz 방법을 수정하여 적용하였다. 이 방법을 다시 Lam and Hung[8]이 채택하여 보강된 구멍을 가지는 경우에 대해 적용하였다. 참고문헌 [7,8]에서 나뉘어진 부분에 적용된 허용함수는 Bhat[9-11]가 제안한 경계특성 직교 다항식 함수이다. Laura 등[12]은 단순지지된 직사각형판이 직사각형 구멍을 가지는 경우에 대해 전통적인 Rayleigh-Ritz 방법을 적용하여 고유진동 특성변화를 계산하였다. Sakiyama 등[13]은 구멍을 극단적으로 얇은 두께의 판으로 가정하고 Green 함수를 적용하여 직사각형 구멍을 가지는 이방성 직사각형판의 고유진동 문제를 해석하였다.

본 연구에서는 직사각형 구멍을 가지는 직사각형판의 고유 진동 문제를 Rayleigh-Ritz 방법을 적용하여 해석하였다. 기존의 방법과 비교한 장점은 직사각형판에 사용된 좌표계와 구멍에 대한 좌표계를 분리하여 운동 에너지와 탄성 에너지에 대한 표현식을 보다 쉽게 유도할 수 있다는 것이다. 본 연구에서는 이 방법을 독립좌표연성방법 (Independent Coordinate Coupling Method)이라고 부르고자 한다. 이 방법을 사용하면 직사각형 구멍 부분에 대한 수치계산이 수치 적분 없이 가능해진다. 수치계산을 수행한 결과는 ICCM의 타당성을 보여준다.

† 책임저자; 동국대학교 기계공학과, 정회원
E-mail : kwakm@dongguk.edu
Tel : (02) 2260-3705, Fax : (02) 2263-9379

* 경남대학교 기계설계학과

2. 직사각형 평판에 대한 Rayleigh-Ritz 방법의 적용

2.1 문제의 정식화

다음 그림은 구멍이 없는 직사각형판을 보여주고 있다.

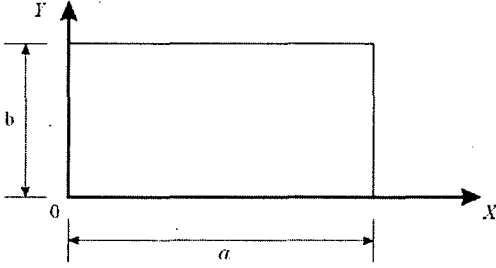


Fig. 1 Rectangular Plate

여기서 a 는 X 축 방향의 길이, b 는 Y 축 방향의 길이를 나타낸다. 이와 같은 직사각형판에 대해 운동에너지와 탄성에너지는 다음 식으로 주어진다.

$$T_p = \frac{1}{2} \rho h \int_0^a \int_0^b \dot{w}^2 dx dy \quad (1)$$

$$V_p = \frac{1}{2} D \int_0^a \int_0^b \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (2)$$

여기서 ρ 는 평판의 질량밀도, h 는 평판의 두께, $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$, E 는 영의 계수, ν 는 프와송비를 나타낸다. 위 식에 무차원변수, $\xi = x/a$, $\eta = y/b$ 를 도입하고 탄성변위에 대해 다음과 같이 표현해 보자.

$$w(\xi, \eta, t) = \Phi(\xi, \eta) q(t) \quad (3)$$

여기서 $\Phi(\xi, \eta) = [\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_m]$ 는 평판의 탄성변위에 대한 $1 \times m$ 의 이차원 허용함수 행렬을 나타내며, $q(t) = [q_1, q_2, \dots, q_m]^T$ 는 $m \times 1$ 의 일반좌표계 벡터를 나타낸다. 여기서 m 은 이차원 허용함수의 총수이다. 식(3)을 식(1)과(2)에 대입하면 운동에너지와 탄성에너지에 대해 다음과 같은 식이 유도된다.

$$T_p = \frac{1}{2} \dot{q}^T (\rho h a b \bar{M}) \dot{q} \quad (4)$$

$$V_p = \frac{1}{2} q^T \left(\frac{D b}{a^3} \bar{K} \right) q \quad (5)$$

여기서

$$\bar{M} = \int_0^a \int_0^b \Phi^T \Phi d\xi d\eta \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \bar{K} = \int_0^a \int_0^b & \left[\frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \alpha^4 \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \right. \\ & + \nu \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \right) \\ & \left. + 2(1-\nu) \alpha^2 \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} \right] d\xi d\eta \quad (7) \end{aligned}$$

은 무차원화된 질량, 강성 행렬이며 $\alpha = a/b$ 이다. 라그랑지 방정식에 식(4)와(5)를 대입하면 다음과 같은 운동방정식이 유도된다.

$$\rho h a b \bar{M} \ddot{q} + \frac{D b}{a^3} \bar{K} q = 0 \quad (8)$$

그리고 자유진동의 경우에 대해 $q = A e^{i\omega t}$ 를 대입하면 고유치 문제는 다음과 같이 무차원화된 식으로 귀결된다.

$$(\bar{K} - \bar{\omega}^2 \bar{M}) A = 0 \quad (9)$$

여기서

$$\bar{\omega}^2 = \frac{\rho h a^4}{D} \omega^2 \quad (10)$$

고유치 문제, 식(9)를 풀기 위해서는 먼저 질량과 강성 행렬을 유도하여야 한다. 이를 위해 이차원 허용함수를 변수 분리하는 방법을 적용해 각 방향으로 분리해보자. 이 경우 식(3)의 허용함수 요소는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\Phi_i(\xi, \eta) = \phi_i(\xi) \psi_i(\eta), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (11)$$

식(11)을 식(6)과(7)에 대입하면 무차원 질량, 강성 행렬이 다음과 같이 표현된다.

$$\bar{M}_{ij} = X_{ij} Y_{ij} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \bar{K}_{ij} = & \hat{X}_{ij} Y_{ij} + \alpha^4 X_{ij} \hat{Y}_{ij} + \alpha^2 \nu (\bar{X}_{ij} \bar{Y}_{ij} + \bar{X}_{ij} \hat{Y}_{ij}) \\ & + \alpha^2 (1-\nu) \bar{X}_{ij} \bar{Y}_{ij}, \quad i, j = 1, 2, \dots, m \quad (13) \end{aligned}$$

여기서

$$X_{ij} = \int_0^a \phi_i \phi_j d\xi, \quad \bar{X}_{ij} = \int_0^a \phi_i' \phi_j' d\xi \quad (14a,b)$$

$$\hat{X}_{ij} = \int_0^a \phi_i'' \phi_j'' d\xi, \quad \bar{X}_{ij} = \int_0^a \phi_i \phi_j'' d\xi \quad (14c,d)$$

$$Y_{ij} = \int_0^b \psi_i \psi_j d\eta, \quad \bar{Y}_{ij} = \int_0^b \psi_i' \psi_j' d\eta \quad (14e,f)$$

$$\hat{Y}_{ij} = \int_0^b \psi_i'' \psi_j'' d\eta, \quad \bar{Y}_{ij} = \int_0^b \psi_i \psi_j'' d\eta \quad (14g,h)$$

만일 x, y 축 방향으로 n 개의 허용함수를 도입한다면 평판의 변위를 표현하는데 총 n^2 의 허용함수가 사용된다. 즉, $m = n^2$ 의 관계식이 성립한다. x, y 축 방향의 허용함수를 각각 $\chi_i (i=1, 2, \dots, n)$ 와 $\gamma_i (i=1, 2, \dots, n)$ 라고 한다면 식(11)에서 도입한 허용함수와의 관계가 다음과 같이 표현된다.

$$\phi_k = \begin{cases} \chi_1 & 1 \leq k \leq n \\ \chi_2 & n+1 \leq k \leq 2n \\ \chi_3 & 2n+1 \leq k \leq 3n \\ \vdots & \\ \chi_n & (n-1)n+1 \leq k \leq n^2 \end{cases} \quad (15)$$

$$\psi_k = \begin{cases} \gamma_k & 1 \leq k \leq n \\ \gamma_{k-n} & n+1 \leq k \leq 2n \\ \gamma_{k-2n} & 2n+1 \leq k \leq 3n \\ \vdots & \\ \gamma_{k-(n-1)n} & (n-1)n+1 \leq k \leq n^2 \end{cases} \quad (16)$$

따라서 질량행렬과 강성행렬의 계산에 필요한 적분값, 식(14)가 최종적으로 다음과 같은 형태를 가지게 된다. 여기서는 X, Y 에 대한 표현식만 제공한다. $\bar{X}, \hat{X}, \bar{Y}, \hat{Y}$ 의 표현식도 이와 유사하다.

$$X = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} \bar{I} & \Sigma_{12} \bar{I} & \cdots & \Sigma_{1n} \bar{I} \\ \Sigma_{21} \bar{I} & \Sigma_{22} \bar{I} & \cdots & \Sigma_{2n} \bar{I} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Sigma_{n1} \bar{I} & \Sigma_{n2} \bar{I} & \cdots & \Sigma_{nn} \bar{I} \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} \Gamma & \Gamma & \cdots & \Gamma \\ \Gamma & \Gamma & \cdots & \Gamma \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Gamma & \Gamma & \cdots & \Gamma \end{bmatrix} \quad (17a, b)$$

여기서 \bar{I} 는 모든 요소가 1 인 $n \times n$ 행렬이며

$$\Sigma_{ij} = \int \chi_i \chi_j d\xi, \Gamma_{ij} = \int \gamma_i \gamma_j d\eta \quad (18a, b)$$

이다. 또한 다른 행렬 요소 계산을 위한 식은 다음과 같다.

$$\bar{\Sigma}_{ij} = \int \chi_i' \chi_j' d\xi, \hat{\Sigma}_{ij} = \int \chi_i'' \chi_j'' d\xi \quad (19a, b)$$

$$\bar{\Sigma}_{ij} = \int \chi_i \chi_j'' d\xi, \bar{\Gamma}_{ij} = \int \gamma_i' \gamma_j' d\eta \quad (19c, d)$$

$$\hat{\Gamma}_{ij} = \int \gamma_i'' \gamma_j'' d\eta, \bar{\Gamma}_{ij} = \int \gamma_i \gamma_j'' d\eta \quad (19e, f)$$

2.2 모든 변이 단순지지인 직사각형판

모든 변이 모두 단순지지인 경우를 고려해 보자. 이 경우에 각 방향의 허용함수는 다음과 같은 단

순지지 보의 고유벡터를 이용한다.

$$\chi_i = \sqrt{2} \sin i\pi\xi, \quad i=1, 2, \dots, n \quad (20)$$

식(20)을 식 (18)과 (19)에 대입하고 그 결과를 식 (17)에 대입한 다음, 다시 그 결과를 식 (12)와 (13)에 대입하면 질량행렬과 강성행렬을 유도할 수 있다. 모든 변이 단순지지된 경우에 대해서는 이 과정이 비교적 단순하다. 최종적인 고유진동수 표현식은 다음과 같다.

$$\bar{\omega}_k^2 = \pi^2 (i^2 + \alpha^2 j^2), \quad k = (i-1)n + j \quad (21)$$

2.3 모든 변이 고정된 직사각형판

모든 변이 고정인 경우에 대해서 각 방향으로 다음과 같은 고정-고정 보의 고유벡터를 허용함수로 고려해 보자.

$$\chi_i = \cosh \lambda_i \xi - \cos \lambda_i \xi - \sigma_i (\sinh \lambda_i \xi - \sin \lambda_i \xi) \quad (22)$$

$$i = 1, 2, \dots, n$$

γ_i 에 대해서도 동일한 함수를 사용한다. 여기서 $\lambda_i = 4.730, 7.853, 10.996, 14.137, \dots$ 이며

$$\sigma_i = (\cosh \lambda_i - \cos \lambda_i) / (\sinh \lambda_i - \sin \lambda_i) \quad (23)$$

단순지지인 경우와 마찬가지로 적분을 수행하면 모든 변이 고정된 직사각형 평판의 고유진동수와 고유모드를 구할 수 있다.

2.4 모든 변이 자유인 직사각형판

모든 변이 자유인 경우에 대해서 각 방향으로 다음과 같은 자유-자유 보의 고유벡터를 허용함수로 고려해 보자.

$$\chi_1 = 1, \chi_2 = \sqrt{12} \left(\xi - \frac{1}{2} \right)$$

$$\chi_{i+2} = \cosh \lambda_i \xi + \cos \lambda_i \xi - \sigma_i (\sinh \lambda_i \xi + \sin \lambda_i \xi) \quad (24a-c)$$

$$i = 1, 2, \dots, n-2$$

여기서 λ_i 와 σ_i 는 식 (22)의 고정-고정 보에 대한 값과 동일하다. 그리고 첫 번째와 두 번째 모드는 강체 운동을 나타낸다. 강체 운동을 고려하는 이유는 본 연구에서 새로 개발된 방법에 강체 운동이 고려되기 때문이다. 단순지지나 고정인 경우와 마찬가지로 적분을 수행하면 모든 변이 자유인 직사각형 평판의 고유진동수와 고유모드를 구할 수 있다.

3. 직사각형 구멍을 가지는 경우에 대한 Rayleigh-Ritz 방법의 적용

다음 그림과 같이 직사각형판이 직사각형 구멍을 가지고 있는 경우를 고려해 보자.

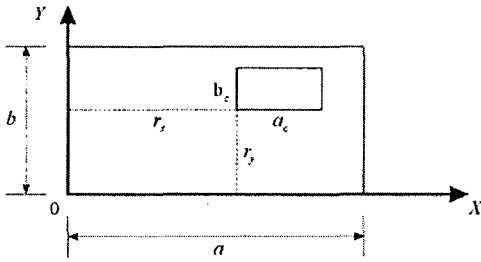


Fig. 2 Rectangular Plate with a Rectangular Hole

이 경우에 총 운동에너지와 탄성에너지는 직사각형 평판 전체의 에너지에서 구멍의 에너지를 제외한 에너지가 된다. 따라서 다음과 같이 표현할 수 있다. 즉,

$$T_{total} = T_p - T_h, \quad V_{total} = V_p - V_h \quad (25a, b)$$

그리고 무차원화를 위해 다음 변수들을 도입해 보자.

$$\bar{r}_x = r_x / a, \quad \bar{r}_y = r_y / b, \quad \bar{a}_c = a_c / a, \quad \bar{b}_c = b_c / b \quad (26a-d)$$

따라서 총 에너지에 대한 표현식은 다음과 같이 유도될 수 있다.

$$T_{total} = \frac{1}{2} \rho h a b \dot{q}^T (\bar{M} - \bar{M}_h) \dot{q} \quad (27)$$

$$V_{total} = \frac{1}{2} \frac{D b}{a^3} q^T (\bar{K} - \bar{K}_h) q \quad (28)$$

여기서

$$\begin{aligned} \bar{M}_h &= \int_{\bar{r}_x}^{\bar{r}_x + \bar{a}_c} \int_{\bar{r}_y}^{\bar{r}_y + \bar{b}_c} \Phi^T \Phi d\xi d\eta \quad (29) \\ \bar{K}_h &= \int_{\bar{r}_x}^{\bar{r}_x + \bar{a}_c} \int_{\bar{r}_y}^{\bar{r}_y + \bar{b}_c} \left[\frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} + \alpha^4 \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} \right. \\ &\quad \left. + \nu \alpha^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial \xi^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial \eta^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2(1-\nu) \alpha^2 \frac{\partial^2 \Phi^T}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi \partial \eta} \right] d\xi d\eta \quad (30) \end{aligned}$$

식(30)에서 알 수 있듯이 적분구간이 구멍 영역에 대해서이다. 이 경우에 고유치 문제는 다음과

같이 표현된다.

$$[(\bar{K}_p - \bar{K}_h) - \bar{\omega}^2 (\bar{M}_p - \bar{M}_h)] A = 0 \quad (31)$$

3.1 모든 바깥 변이 단순지지인 직사각형판

모든 바깥 변이 모두 단순지지인 경우에 대해 식(20)으로 주어진 허용함수를 고려하면 구멍 영역에 대한 국부 적분을 수행함에 있어 식(18)과(19)의 적분 구간이 바뀌게 된다. 이 경우 적분값이 조금 복잡해지지만 다음과 같이 엄밀해로 표현될 수 있다.

$$(\Sigma_h)_{ij} = \begin{cases} \bar{a}_c - \delta_1 & i = j \\ \delta_2 - \delta_3 & i \neq j \end{cases} \quad (32a)$$

$$(\bar{\Sigma}_h)_{ij} = \begin{cases} i^2 \pi^2 (\bar{a}_c + \delta_1) & i = j \\ ij \pi^2 (\delta_2 + \delta_3) & i \neq j \end{cases} \quad (32b)$$

$$(\hat{\Sigma}_h)_{ij} = \begin{cases} i^4 \pi^4 (\bar{a}_c - \delta_1) & i = j \\ i^2 j^2 \pi^4 (\delta_2 - \delta_3) & i \neq j \end{cases} \quad (32c)$$

$$(\tilde{\Sigma}_h)_{ij} = \begin{cases} -i^2 \pi^2 (\bar{a}_c - \delta_1) & i = j \\ -j^2 \pi^2 (\delta_2 - \delta_3) & i \neq j \end{cases} \quad (32d)$$

여기서

$$\delta_1 = \frac{(\sin 2i\pi(\bar{r}_x + \bar{a}_c) - \sin 2i\pi\bar{r}_x)}{2i\pi} \quad (33a)$$

$$\delta_2 = \frac{(\sin(i-j)\pi(\bar{r}_x + \bar{a}_c) - \sin(i-j)\pi\bar{r}_x)}{(i-j)\pi} \quad (33b)$$

$$\delta_3 = \frac{(\sin(i+j)\pi(\bar{r}_x + \bar{a}_c) - \sin(i+j)\pi\bar{r}_x)}{(i+j)\pi} \quad (33b)$$

3.2 모든 바깥 변이 고정된 직사각형판

모든 바깥 변이 고정된 경우에는 단순지지된 경우와 달리 구멍 영역에 대한 적분값을 엄밀해 형태로 구할 수 없다. 이 경우에는 수치적분을 이용한다. 수치적분을 수행하는 경우 계산 시간이 오래 걸리는 것은 자명하다. 따라서 본 연구에서는 이와 같이 수치적분을 통하지 않고 임의의 직사각형 구멍에 대해 손쉽게 고유진동수 변화를 예측할 있는 방법을 개발하였다. 다음 장에서 이에 대해 설명한다.

4. 독립좌표연성법

직사각형 구멍을 가지고 있는 직사각형 평판을 다

시 고려해 보자. 그러나 이번에는 직사각형 구멍의 왼쪽 아래 꼭지점을 원점으로 하는 국부 좌표계를 동시에 고려해 보자.

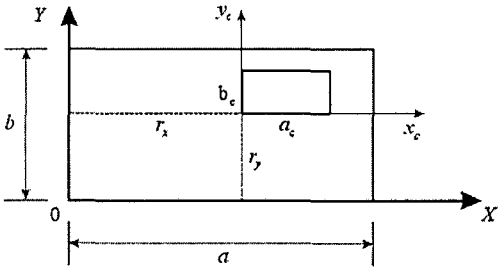


Fig. 3 Rectangular Plate with a Rectangular Hole with Local axes

이 경우에 무차원 좌표계 변수, $\xi_c = x_c / a_c$, $\eta_c = y_c / b_c$ 를 도입하면, 구멍 영역의 변위에 대한 허용함수를 국부좌표계에 근거해 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$w_c(\xi_c, \eta_c) = \Phi_c(\xi_c, \eta_c) q_c \quad (34)$$

여기서 $\Phi_c(\xi_c, \eta_c) = [\Phi_{c1} \Phi_{c2} \dots \Phi_{cm}]$ 는 구멍 영역의 탄성변위에 대한 $1 \times m$ 의 이차원 허용함수 행렬을 나타내며, $q_c(t) = [q_{c1} q_{c2} \dots q_{cm}]^T$ 는 $m \times 1$ 의 일반좌표계 벡터를 나타낸다. 이를 이용하면 구멍 영역의 운동에너지와 탄성에너지가 다음과 같이 표현된다.

$$T_c = \frac{1}{2} \dot{q}_c^T (\rho h a_c b_c \bar{M}_c) \dot{q}_c, \quad V_c = \frac{1}{2} q_c^T \left(\frac{D b_c}{a_c^3} \bar{K}_c \right) q_c \quad (35)$$

여기서

$$\begin{aligned} \bar{M}_c &= \int_0^1 \int_0^1 \Phi_c^T \Phi_c d\xi_c d\eta_c \quad (36a) \\ \bar{K}_c &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{\partial^2 \Phi_c^T}{\partial \xi_c^2} \frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial \xi_c^2} + \alpha_c^4 \frac{\partial^2 \Phi_c^T}{\partial \eta_c^2} \frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial \eta_c^2} \right. \\ &\quad \left. + \nu \alpha_c^2 \left(\frac{\partial^2 \Phi_c^T}{\partial \xi_c^2} \frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial \eta_c^2} + \frac{\partial^2 \Phi_c^T}{\partial \eta_c^2} \frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial \xi_c^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2(1-\nu) \alpha_c^2 \frac{\partial^2 \Phi_c^T}{\partial \xi_c \partial \eta_c} \frac{\partial^2 \Phi_c}{\partial \xi_c \partial \eta_c} \right] d\xi_c d\eta_c \quad (36b) \end{aligned}$$

또한 $\alpha_c = a_c / b_c$ 이다. 아래 첨자 c 가 붙어있지만 적분 영역은 식(31)과 (32)와 달리 0 에서 1 까지이다. 구멍의 각 변은 자유이기 때문에 구멍 부분의 영역에 대해서는 2.4 의 모든 변이 자유인 직사각형 평판에 대한 표현식을 그대로 사용할 수 있다. 따라서 수치적분이 필요 없다.

구멍에 고정된 국부 좌표계를 사용하였을 경우 전체 운동 에너지와 탄성 에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$T_{total} = \frac{1}{2} \dot{q}^T (\rho h a b \bar{M}) \dot{q} - \frac{1}{2} \dot{q}_c^T (\rho h a_c b_c \bar{M}_c) \dot{q}_c \quad (37)$$

$$V_{total} = \frac{D}{2} \left(\frac{b}{a^3} q^T \bar{K} q - \frac{b_c}{a_c^3} q_c^T \bar{K}_c q_c \right) \quad (38)$$

본 연구에서는 구멍 영역내 탄성변위의 일치 조건을 사용해 국부좌표계를 전체좌표계로 변환하는 방법을 사용한다. 본 연구에서는 이를 독립좌표연성법이라고 부르고자 한다. 구멍 영역내에 위치한 m 개의 점을 고려해보자. 전체좌표계에 근거한 탄성변위와 국부좌표계에 근거한 탄성변위가 이 점들에서 일치해야 하기 때문에 다음과 같은 식을 유도할 수 있다.

$$w_c(\xi_{ci}, \eta_{ci}) = w(\xi_i, \eta_i), \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (39)$$

식(3)과 (34)를 고려하면 식 (39)는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{bmatrix} \Phi_c(\xi_{c1}, \eta_{c1}) \\ \Phi_c(\xi_{c2}, \eta_{c2}) \\ \vdots \\ \Phi_c(\xi_{cm}, \eta_{cm}) \end{bmatrix} q_c = \begin{bmatrix} \Phi(\xi_1, \eta_1) \\ \Phi(\xi_2, \eta_2) \\ \vdots \\ \Phi(\xi_m, \eta_m) \end{bmatrix} q \quad (40)$$

이식을 풀면 다음식이 유도된다.

$$q_c = T_c q \quad (41)$$

여기서

$$T_c = \begin{bmatrix} \Phi_c(\xi_{c1}, \eta_{c1}) \\ \Phi_c(\xi_{c2}, \eta_{c2}) \\ \vdots \\ \Phi_c(\xi_{cm}, \eta_{cm}) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \Phi(\xi_1, \eta_1) \\ \Phi(\xi_2, \eta_2) \\ \vdots \\ \Phi(\xi_m, \eta_m) \end{bmatrix} q \quad (42)$$

이며, 국부좌표계의 점들 ξ_{ci}, η_{ci} 와 이를 전체 좌표계에 대해서 표현한 ξ_i, η_i 의 관계식은 다음과 같다.

$$\xi_i = \frac{r_x}{a} + \frac{a_c}{a} \xi_{ci}, \quad \eta_i = \frac{r_y}{b} + \frac{b_c}{b} \eta_{ci} \quad (43)$$

식 (41)을 식 (37)과 (38)에 대입하면 전체 운동에너지와 탄성에너지가 다음과 같이 표현된다.

$$T_{total} = \frac{1}{2} (\rho h a b) \dot{q}^T \bar{M} \dot{q} \quad (44)$$

$$V_{total} = \frac{D b}{a^3} \frac{1}{2} q^T \bar{K} q \quad (45)$$

여기서

$$\bar{M}_r = \bar{M}_p - (\bar{a}_c \bar{b}_c) T_c^T \bar{M}_c T_c \quad (46a)$$

$$\bar{K}_r = \bar{K}_p - \frac{\bar{b}_c}{\bar{a}_c} T_c^T \bar{K}_c T_c \quad (46b)$$

따라서 고유치 문제는 다음과 같은 식으로 표현된다.

$$[\bar{K}_r - \bar{\omega}^2 \bar{M}_r] A = 0 \quad (47)$$

5. 수치해석

본 연구에서는 먼저 가운데에 정사각형의 구멍을 가지고 있으며 모든 변이 단순지지된 정사각형 평판의 고유진동수를 기존의 Rayleigh-Ritz 방법과 본 연구에서 제안한 독립좌표연성법에 의해 구하였다. 각 방향으로 5 개의 허용함수를 고려하였다. 따라서 총 25 개의 허용함수가 평판의 변위를 묘사하는데 사용되었다.

다음 그림은 두 개의 경계조건에 대해 기존의 Rayleigh-Ritz 방법과 독립좌표연성법을 사용한 고유진동수 결과를 보여주고 있다. 그림에서 알 수 있듯이 본 연구에서 제안한 방법으로 계산한 값이 기존의 방법을 사용한 결과와 잘 일치함을 알 수 있다.

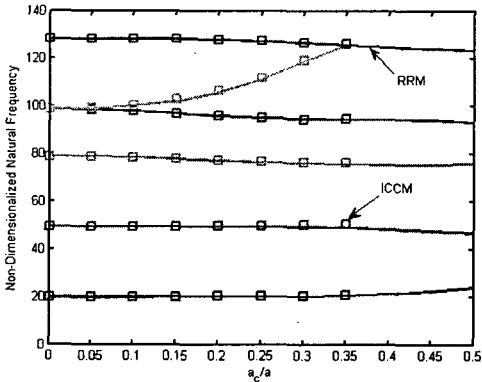


Fig. 4 Simply-Supported Square Plate with a Square Hole

계산 시간을 조사하기 위해 $\bar{a}_c = 0.35$ 인 경우에 대해 기존의 Rayleigh-Ritz 방법과 독립좌표연성법을 사용해 고유진동수를 계산하였다. 그 결과 기존의 Rayleigh-Ritz 방법으로는 계산 시간이 0.0938 초, 독립좌표연성법은 모든 변이 단순지지된 경우에는 0.2031 초가 걸림을 관찰하였다. 오히려 독립좌표연성법이 시간이 두 배 이상 소요되는

데 그 이유는 독립좌표연성법을 사용하는 경우 식 (42)에서 알 수 있듯이 역행렬 계산이 필요하기 때문이다. 그러나 가운데 정사각형 구멍이 있는 모든 변이 고정된 정사각형 평판의 경우에는 기존의 Rayleigh-Ritz 방법으로 4.25 초, 독립좌표연성법에 의해서는 0.2188 초로 기존 방법보다 약 1/20 정도밖에 시간이 걸리지 않음을 알 수 있었다. 기존의 방법에 의한 계산 시간이 모든 변이 단순 지지인 평판보다 모든 변이 고정인 경우에 엄청나게 늘어난 이유는 구멍 영역의 적분을 수치 방법에 의존하여 수행하기 때문이다. 이로부터 본 연구에서 제안한 독립좌표연성법의 유효성을 쉽게 인식할 수 있다.

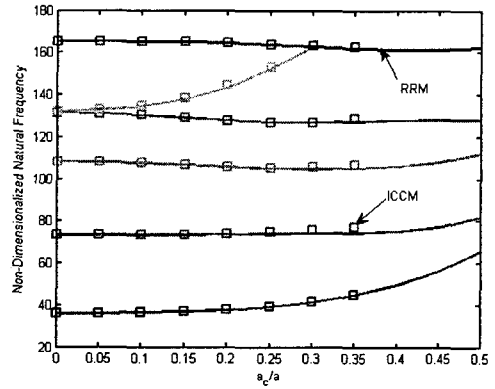


Fig. 5 Clamped Square Plate with a Square Hole

6. 결론

본 연구에서는 직사각형 평판이 직사각형 구멍을 가지고 있는 경우의 진동 해석을 전통적인 Rayleigh-Ritz 방법을 이용하여 수치해석을 수행하는 과정과 본 연구에서 개발된 독립좌표연성법 (ICCM)을 사용하여 결과를 도출하는 과정을 토의하였다.

전통적인 Rayleigh-Ritz 방법을 적용하는 경우에 구멍은 구조물의 일부 영역이 없는 것으로 간주하고 운동에너지와 탄성에너지에서 이 부분에 관한 적분을 차감하여 수치계산을 수행한다. 그러나 이 차원 허용함수의 구멍 영역에 대한 적분은 바깥 변이 단순 지지 경계조건인 경우를 제외하고는 엄밀해가 존재하지 않는다. 따라서 수치 적분을 수행해야 하며 이 과정에서 많은 계산 시간이 소요된다.

본 연구에서 개발한 독립좌표연성법은 구멍 영역에 대해 국부 좌표계를 도입하고 이 국부 좌

표계에 대해 자유-자유 보의 허용함수를 도입해 문제를 해석하는 방법이다. 자유-자유 보의 허용함수를 구멍 영역에 대해 도입하면 이 영역에 대한 운동에너지와 탄성에너지가 간단하게 표현된다. 두 번째 작업은 구멍 영역내에서의 변위 일치 조건을 사용하는 것이다. 이 과정에서 전체 좌표계에 근거한 일반좌표계와 국부 좌표계에 근거한 추가 일반 좌표계의 관계식이 유도된다. 이 관계식을 이용하면 비교적 쉽게 구멍 영역의 효과를 산출해 낼 수 있다. 고유치 문제를 해결하는 과정은 전통적인 방법을 사용한 경우와 동일하다.

모든 변이 단순지지된 평판과 고정인 평판을 대상으로 수치해석을 수행하였다. 수치해석 결과는 본 연구에서 제안한 독립좌표연성법이 타당한 결과를 주고 있음을 보여준다.

본 연구에서 제시하지는 않았지만, 직사각형 구멍이 어떤 각도를 가지고 있을 경우에는 전통적인 방법의 적용이 더욱 어려워진다. 그러나 독립좌표연성법을 사용하면 변위 일치 조건만 만족하면 되기 때문에 쉽게 이런 문제도 해결할 수 있다. 또한 독립좌표계로 표현이 가능한 원형 구멍도 해석이 용이할 것으로 예상된다.

후 기

본 연구는 동국대학교 논문 게재 장려금 지원으로 이루어졌다. 관계자 여러분께 감사드린다.

참고문헌

(1) Monohan, L. J., Nemergut, P. J., and Maddux, G. E., 1970, "Natural Frequencies and Mode Shapes of Plates with Interior Cut-outs," *The Shock and Vibration Bulletin*, Vol. 41, pp. 37-49.

(2) Paramasivam, P., 1973, "Free Vibration of Square Plates with Square Opening", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 30, pp. 173-178.

(3) Aksu, G and Ali, R., 1976, "Determination of Dynamic Characteristics of Rectangular Plates with Cut-outs Using a Finite Difference Formulation", *Journal of Sound and Vibration* Vol. 44, pp. 147-158.

(4) Rajamani, A. and Prabhakaran, R., 1977, "Dynamic Response of Composite Plates with Cut-outs, Part I: Simply-Supported Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 54, pp. 549-564.

(5) Rajamani, A. and Prabhakaran, R., 1977, "Dynamic Response of Composite Plates with Cut-outs, Part II: Clamped-Clamped Plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 54, pp. 565-576.

(6) Ali, R. and Atwal, S. J., 1980, "Prediction of Natural Frequencies of Vibration of Rectangular Plates with Rectangular Cutouts," *Computers and Structures*, Vol. 12, pp. 819-823.

(7) Lam, K. Y., Hung, K. C., and Chow, S. T., 1989, "Vibration Analysis of Plates with Cut-outs by the Modified Rayleigh-Ritz Method," *Applied Acoustics*, Vol. 28, pp. 49-60.

(8) Lam, K. Y. and Hung, K. C., 1990, "Vibration Study on Plates with Stiffened Openings Using Orthogonal Polynomials and Partitioning Method," *Computers and Structures*, Vol. 37, pp. 295-301.

(9) Bhat, R. B., 1985, "Natural Frequencies of Rectangular Plates Using Characteristic Orthogonal Polynomials in Rayleigh-Ritz Method," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 102, pp. 493-499.

(10) Bhat, R. B., 1985, "Plate Deflections Using Orthogonal Polynomials," *American Society of Civil Engineers, Journal of the Engineering Mechanics Division*, Vol. 111, pp. 1301-1309.

(10) Bhat, R. B., 1990, "Numerical Experiments on the Determination of Natural Frequencies of Transverse Vibrations of Rectangular Plates of Nonuniform Thickness," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 138, pp. 205-219.

(12) Laura, P. A. A., Romanelli, E., and Rossi, R. E., 1997, "Transverse Vibrations of Simply-Supported Rectangular Plates with Rectangular Cutouts," Vol. 202, No. 2, pp. 275-283.

(13) Sakiyama, T., Huang, M., Matsuda, H., and Morita, C., 2003, "Free Vibration of Orthotropic Square Plates with a Square Hole," *Journal of Sound and Vibration*, vol. 259, No. 1, pp. 63-80.