

회전하는 얇은 링의 고유진동 해석을 위한 모델링

Modelling for the Natural Vibration Analysis of a Rotating Thin Ring

김창부[†] · 김세희^{*}

Chang-Boo Kim and Sehee Kim

Key Words : Rotating Ring(회전 링), Virtual Work(가상일), Finite Deformation(유한변형), Thin Ring(얇은 링), In-plane Vibration(면내진동), Out-of-plane Vibration(면외진동), Secondary Effects(이차 효과)

ABSTRACT

In this paper, we present the principle of virtual work, from which the exact non-linear equations of motion of a rotating ring can be derived, by using the theory of finite deformation. For a thin ring of which the effect of variation in curvature across the cross-section is neglected, the radial displacement and the extensional stress are determined from the principle of virtual work at the steady state where the ring is rotating with a constant angular velocity. And also we formulate systematically the governing equations concerned to the in-plane vibrations and the out-of-plane vibrations at the disturbed state by using the principle of virtual work which is expressed with the disturbed displacements about the steady state. The formulated governing equations are classified by four models along the cases of considering or neglecting all or partly the secondary effects of flexural shear, rotary inertia, circumferential extension, and twist inertia. The natural vibrations of thin rings are analyzed, and its results are compared and discussed.

1. 서 론

공학 구조물에서 중요한 요소 중에 하나인 링의 진동에 관하여 오래 전부터 많은 연구가 수행되어 왔다⁽¹⁾. 특히 회전하는 링은 단순한 기하학적 구조를 갖고 있지만 링 보강재, 타이어, 기어, 링 자이로스코프 등의 회전체와 공통적인 동특성을 갖고 있기 때문에 연구 대상이 되어 왔다.

대표적인 연구로는 Carrier⁽²⁾가 회전하는 링에 관하여 선형탄성 이론으로부터 운동방정식을 유도하고 면내 고유진동을 해석하였고, Bert 등⁽³⁾이 Carrier의 연구를 바탕으로 링의 굽힘 전단 및 지지 강성을 고려하는 면내 및 면외 고유진동을 해석하였다. 또한 Endo 등⁽⁴⁾은 실험을 수행하여 면내 고유진동에 대한 실험결과와 이론결과를 비교하였다. 상기한 연구들은 두께가 반경에 비해서 매우 작아서 링 단면을 가로지르는 곡률의 변화가 무시되는 얇은 링 모델을 사용하였다.

Bickford 등^(5,6)은 링 단면을 가로지르는 곡률의 변화를 고려하는 두꺼운 링 모델을 사용하여 회전에 의한 원주방향 인장응력을 초기응력으로 고려하면서 원주방향 인장 변형을 무시한 경우의 운동에너지와 변형에너지로부터 Hamilton 원리를 사용하여 운동방정식을 유도하고, 굽힘 전단 및 회전 관성에 의한 면내 및 면외 고유진동수의 변화에 관한 결과를 제시하였다.

최근의 연구로는 Kim 등⁽⁷⁾은 원주방향 인장 변형의 비선형 항들의 조합에 따라서 인장응력을 4개의 모델로 분류하고, Hamilton 원리를 사용하여 굽힘 전단과 회전 관성 효과를 무시한 얇은 링의 비선형 운동방정식을 유도하여 정상상태에서의 반경방향 변위를 구하고, 교란상태에서 선형화된 운동방정식으로부터 면내 및 면외 고유진동을 모델별로 해석하고 비교하였다.

본 논문에서는 유한변형 이론⁽⁸⁾을 이용하여 회전하는 링의 정확한 비선형 운동방정식이 유도되는 가상일의 원리를 제시하고, 단면을 가로지르는 곡률의 변화가 무시되는 얇은 링에 대하여 링이 일정한 각속도로 회전하고 있는 정상상태에서의 반경방향 변위 및 인장 응력을 가상일의 원리로부터 구하고, 정상상태로부터 교란된 변위로 표현되는 가상일의 원리를 사용하여 교란상태에서의 면내진동 및 면외진동에

[†] 책임저자 : 정희원, 인하대학교 기계공학과
E-mail : kimcb@inha.ac.kr
Tel : (032) 860-7383, Fax : (032) 868-1716

* 인하대학교 대학원 기계공학과

관한 지배방정식을 체계적으로 유도한다. 유도된 지배방정식을 굽힘 전단, 회전 관성, 원주방향 인장, 비틀림 관성 등의 2차 효과를 전부 또는 일부 고려하거나 무시하는 경우에 따라서 4개의 모델로 분류하여 얇은 링의 고유진동을 해석하여 그 결과를 비교하고 검토한다.

2. 회전하는 링의 운동과 변형

Fig. 1에서처럼 링의 회전좌표계 $Oxyz$ 는 링과 함께 고정 좌표계 $OXYZ$ 의 Z 축 방향으로 일정한 각속도 Ω 로 회전하고 있다. 링의 원주방향에 수직인 단면의 면적 A 는 일정하고 단면의 중심점을 지나는 중심선의 반경은 a 이다. x 축에서 원주방향으로 θ 만큼 떨어진 단면의 기준 좌표계 $C\xi\eta\zeta$ 는 단면의 중심점 C 를 원점으로 하고 반경방향 ξ , 접선방향 η , 축방향 ζ 의 축을 갖는다. 단면은 ξ 및 ζ 축에 대하여 대칭이다.

링이 변형할 때에 단면은 모양이 변하지 않고 평면을 유지한다고 가정한다. 단면에 고착되어 움직이는 단면 좌표계 $C'\xi'\eta'\zeta'$ 는 좌표계 $C\xi\eta\zeta$ 와 일치한 상태에서 η' 축에 대하여 ϕ_η , ζ' 축에 대하여 ϕ_ζ , ξ' 축에 대하여 ϕ_ξ 만큼 순차적으로 회전되고, ξ 축 방향으로 u_ξ , η 축 방향으로 u_η , ζ 축 방향으로 u_ζ 만큼 변위된다.

따라서 링 중심선에 수직한 단면상에서 (ζ, ξ) 에 위치한 질점 P 의 변위는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \vec{u}_P &= u_r \vec{e}_\xi + u_\theta \vec{e}_\eta + u_z \vec{e}_\zeta \\ u_r &= u_\xi + \xi(c_\eta c_\zeta - 1) + \zeta(c_\eta s_\zeta s_\xi + s_\eta c_\xi) \\ u_\theta &= u_\eta + \xi(s_\zeta) + \zeta(-c_\zeta s_\xi) \\ u_z &= u_\zeta + \xi(-s_\eta c_\zeta) + \zeta(-s_\eta s_\zeta s_\xi + c_\eta c_\xi - 1) \\ c_\xi &= \cos \phi_\xi, \quad s_\xi = \sin \phi_\xi \end{aligned} \quad (1)$$

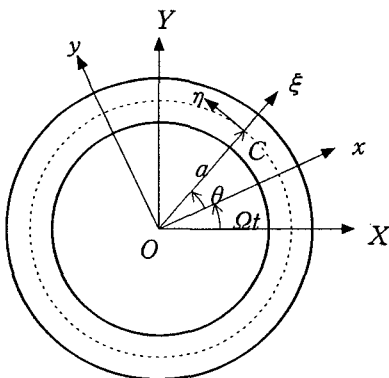


Fig. 1 Geometry of a rotating ring

변형 후의 질점 P 의 절대속도, 절대가속도 및 가상변위는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} \vec{v}_P &= \{-\Omega u_\theta + \dot{u}_r\} \vec{e}_\xi \\ &+ \{\Omega(r + u_r) + \dot{u}_\theta\} \vec{e}_\eta + \dot{u}_z \vec{e}_\zeta \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \vec{a}_P &= \{-\Omega^2(r + u_r) - 2\Omega\dot{u}_\theta + \ddot{u}_r\} \vec{e}_\xi \\ &+ \{-\Omega^2 u_\theta + 2\Omega\dot{u}_r + \ddot{u}_\theta\} \vec{e}_\eta + \ddot{u}_z \vec{e}_\zeta \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \delta \vec{u}_P &= \delta u_r \vec{e}_\xi + \delta u_\theta \vec{e}_\eta + \delta u_z \vec{e}_\zeta \\ r &= a + \xi \end{aligned} \quad (4)$$

따라서 밀도가 ρ 인 회전하는 링의 가속도량(acceleration quantity)에 의한 가상일은 다음과 같다.

$$\delta A = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_A (\delta \vec{u}_P \cdot \rho \vec{a}_P) r dA d\theta \quad (5)$$

좌표계 $C\xi\eta\zeta$ 에 대한 변위 구배(displacement gradient) 행렬 $[h]$ 의 성분은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} h_{\xi\xi} &= \frac{\partial u_r}{\partial \xi}, \quad h_{\xi\eta} = \frac{\partial u_r}{r \partial \theta} - \frac{u_\theta}{r}, \quad h_{\xi\zeta} = \frac{\partial u_r}{\partial \zeta} \\ h_{\eta\xi} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial \xi}, \quad h_{\eta\eta} = \frac{\partial u_\theta}{r \partial \theta} + \frac{u_r}{r}, \quad h_{\eta\zeta} = \frac{\partial u_\theta}{\partial \zeta} \\ h_{\zeta\xi} &= \frac{\partial u_z}{\partial \xi}, \quad h_{\zeta\eta} = \frac{\partial u_z}{r \partial \theta}, \quad h_{\zeta\zeta} = \frac{\partial u_z}{\partial \zeta} \end{aligned} \quad (6)$$

좌표계 $C\xi\eta\zeta$ 에 대한 Lagrange 변형도 행렬은 다음과 같다.

$$[\varepsilon] = \frac{1}{2} ([h] + [h]^T) + \frac{1}{2} [h]^T [h] \quad (7)$$

$\varepsilon_{\xi\xi}$, $\varepsilon_{\zeta\zeta}$, $\gamma_{\zeta\xi}$ ($= \varepsilon_{\zeta\xi} + \varepsilon_{\xi\zeta}$)는 0이 되므로 Kirchhoff 응력과 Lagrange 변형도의 관계를 Young 탄성계수 E , Poisson 비 ν , 전단계수 $G = E/2(1 + \nu)$ 로서 표현하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \sigma_m &= E \varepsilon_{\eta\eta} \\ \sigma_{\eta\xi} &= G \gamma_{\eta\xi} = G(\varepsilon_{\eta\xi} + \varepsilon_{\xi\eta}) \\ \sigma_{\eta\zeta} &= G \gamma_{\eta\zeta} = G(\varepsilon_{\eta\zeta} + \varepsilon_{\zeta\eta}) \end{aligned} \quad (8)$$

따라서 링의 가상변형에너지는 다음과 같다.

$$\delta V = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_A (\delta \varepsilon_m \sigma_m + \delta \gamma_{\eta\xi} \sigma_{\eta\xi} + \delta \gamma_{\eta\zeta} \sigma_{\eta\zeta}) r dA d\theta \quad (9)$$

외력을 받지 않으면서 일정한 각속도로 회전하고 있는 링에 대한 가상일의 원리는 다음과 같다.

$$\delta A + \delta V = 0 \quad \forall \delta u_\xi, \delta u_\eta, \delta u_\zeta, \delta \phi_\xi, \delta \phi_\eta, \delta \phi_\zeta \quad (10)$$

3. 회전하는 얇은 링의 운동방정식

단면을 가로지르는 곡률의 변화를 무시하는 얇은 링 모델에서는 ξ 를 a 에 비하여 무시한다. 즉 가상일의 식(5)과 (9)에서 r 대신에 a 를 사용한다.

3.1 정상상태(steady state)에서의 평형

일정한 각속도 Ω 로 회전하고 있는 링의 정상상태에서의 변위는 링 형상의 z 축에 대한 축대칭성 및 단면의 ζ 및 ξ 축에 대한 대칭성을 고려하면 다음과 같다.

$${}^s u_\xi = \text{constant}, \quad {}^s u_\eta = 0, \quad {}^s u_\zeta = 0, \quad {}^s \phi_\xi = 0, \quad {}^s \phi_\eta = 0, \quad {}^s \phi_\zeta = 0.$$

변수의 왼쪽 윗 첨자인 s 는 정상상태에서의 변수 값을 나타낸다.

외력을 받지 않으면서 회전하는 얇은 링의 정상상태에서의 가상일의 원리는 다음과 같다.

$${}^s \delta A + {}^s \delta V = 0 \quad \forall \delta u_\xi \quad (11)$$

여기서

$${}^s \delta A = \int_{\theta=0}^{2\pi} -\delta u_\xi \rho A \Omega^2 a^2 (1 + {}^s u_\xi / a) d\theta$$

$${}^s \delta V = \int_{\theta=0}^{2\pi} \delta u_\xi {}^s \sigma_m A (1 + {}^s u_\xi / a) d\theta$$

$${}^s \sigma_m = E \left\{ {}^s u_\xi / a + \frac{1}{2} ({}^s u_\xi / a)^2 \right\}$$

따라서 정적용력, 정적변위 및 η 방향의 선형 인장 변형도는 다음과 같고, 정적변위는 참고논문⁽⁷⁾의 식과 일치한다.

$${}^s \sigma_m = \rho \Omega^2 a^2 \quad (12)$$

$${}^s u_\xi = a e \quad (13)$$

$$e = \sqrt{1 + 2\rho \Omega^2 a^2 / E} - 1 \quad (14)$$

3.2 교란상태(disturbed state)에서의 고유진동

정상상태로부터 교란된 변위는 다음과 같이 정의된다.

$${}^d u_i = u_i - {}^s u_i, \quad {}^d \phi_i = \phi_i - {}^s \phi_i \quad \text{for } i = \xi, \eta, \zeta \quad (15)$$

상기 식에서 변수의 왼쪽 윗 첨자인 d 는 정상상태로부터 교란된 변수 값을 나타내며, 정상상태에서의 미분연산자(differential operator)처럼 사용된다.

교란상태에서 선형화된 운동방정식은 면내진동 변위 ${}^d u_\xi$,

${}^d u_\eta$, ${}^d \phi_\zeta$ 과 면외진동 변위 ${}^d \phi_\xi$, ${}^d \phi_\eta$, ${}^d u_\zeta$ 에 관한 운동방정식으로 분리될 수 있으며 가상일의 원리는 다음과 같다.

$${}^d \delta A_I + {}^d \delta V_I = 0 \quad \forall \delta u_\xi, \delta u_\eta, \delta \phi_\zeta \quad (16)$$

$${}^d \delta A_O + {}^d \delta V_O = 0 \quad \forall \delta \phi_\xi, \delta \phi_\eta, \delta u_\zeta \quad (17)$$

여기서

$${}^d \delta A_I = \int_{\theta=0}^{2\pi} [\delta u_\xi \rho A ({}^d \ddot{u}_\xi - 2\Omega {}^d \dot{u}_\eta - \Omega^2 {}^d u_\xi) + \delta u_\eta \rho A ({}^d \ddot{u}_\eta + 2\Omega {}^d \dot{u}_\xi - \Omega^2 {}^d u_\eta) + \delta \phi_\zeta \rho I_\zeta ({}^d \ddot{\phi}_\zeta - \Omega^2 {}^d \phi_\zeta)] a d\theta$$

$${}^d \delta V_I = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left\{ (\delta u_{\xi, \theta} - \delta u_\eta) ({}^d u_{\xi, \theta} - {}^d u_\eta) + (\delta u_{\eta, \theta} + \delta u_\xi) ({}^d u_{\eta, \theta} + {}^d u_\xi) \right\} \rho A \Omega^2 + \{ \delta \phi_\xi {}^d \phi_\xi + \delta \phi_\zeta {}^d \phi_\zeta \} \rho I_\zeta \Omega^2 + \frac{1}{a} (\delta u_{\eta, \theta} + \delta u_\xi) (1+e) {}^d N_\eta + \frac{1}{a} \delta \phi_{\xi, \theta} (1+e) {}^d M_\xi + \frac{1}{a} \{ (\delta u_{\xi, \theta} - \delta u_\eta) + a(1+e) \delta \phi_\zeta \} {}^d N_\zeta \} a d\theta$$

$${}^d \delta A_O = \int_{\theta=0}^{2\pi} [\delta \phi_\xi \rho I_\xi ({}^d \ddot{\phi}_\xi - 2\Omega {}^d \dot{\phi}_\eta - \Omega^2 {}^d \phi_\xi) + \delta \phi_\eta \rho I_\eta ({}^d \ddot{\phi}_\eta + \rho I_\xi (2\Omega {}^d \dot{\phi}_\xi - \Omega^2 {}^d \phi_\eta) + \delta u_\zeta \rho A ({}^d \ddot{u}_\zeta)] a d\theta$$

$${}^d \delta V_O = \int_{\theta=0}^{2\pi} \left[(\delta u_{\xi, \theta} {}^d u_{\xi, \theta}) \rho A \Omega^2 + \{ \delta \phi_{\eta, \theta} {}^d \phi_{\eta, \theta} \} \rho I_\eta \Omega^2 + \{ -\delta \phi_{\eta, \theta} {}^d \phi_{\eta, \theta} + (\delta \phi_{\eta, \theta} + \delta \phi_\xi) ({}^d \phi_{\eta, \theta} + {}^d \phi_\xi) + (\delta \phi_{\xi, \theta} - \delta \phi_\eta) ({}^d \phi_{\xi, \theta} - {}^d \phi_\eta) \} \rho I_\xi \Omega^2 + \frac{1}{a} (\delta \phi_{\xi, \theta} - \delta \phi_\eta) (1+e) {}^d M_\xi + \frac{1}{a} (\delta u_{\xi, \theta} - a(1+e) \delta \phi_\xi) {}^d N_\xi + \frac{1}{a} (\delta \phi_{\eta, \theta} + \delta \phi_\xi) {}^d M_\eta \right] a d\theta$$

$${}^d N_\xi = K_\xi G A \frac{1}{a} \{ ({}^d u_{\xi, \theta} - {}^d u_\eta) + a(1+e) {}^d \phi_\xi \}$$

$${}^d N_\eta = E A \frac{1}{a} (1+e) ({}^d u_{\eta, \theta} + {}^d u_\xi)$$

$${}^d N_\zeta = K_\zeta G A \frac{1}{a} \{ {}^d u_{\zeta, \theta} - a(1+e) {}^d \phi_\zeta \}$$

$${}^d M_\xi = E I_\xi \frac{1}{a} (1+e) ({}^d \phi_{\xi, \theta} - {}^d \phi_\eta)$$

$${}^d M_\eta = G J_\eta \frac{1}{a} ({}^d \phi_{\eta, \theta} + {}^d \phi_\xi)$$

$${}^d M_\zeta = E I_\zeta \frac{1}{a} (1+e) {}^d \phi_{\zeta, \theta}$$

상기 식에서 I_ξ , I_η , I_ζ 는 각각 링 단면의 ξ 축, η 축, ζ 축에 대한 관성모멘트이다. 또한 $J_\eta = K_\eta I_\eta$ 이며, K_ξ , K_ζ

및 K_n 는 링 단면에 작용하는 전단응력이 단면경계에서 응력경계조건을 만족하도록 단면의 뒤틀림(warping)을 고려하여 굽힘 전단력 및 비틀림 모멘트를 수정하기 위한 전단 계수 및 비틀림 계수이다.

진동수 ω_n , 질적경수 n 의 순환대칭모드로 진동하는 링의 면내진동 변위는 다음과 같이 표현된다.

$$\begin{aligned} {}^d u_I &= ({}^d u_\xi, {}^d u_\eta, {}^d \phi_\xi)^T \\ &= (U_{IC} \cos n\theta + U_{IS} \sin n\theta) e^{i\omega_n t} \end{aligned} \quad (18)$$

식(18)을 가상일의 원리 식(16)에 대입하여 정리하면 다음과 같은 면내 고유진동 방정식이 얻어진다.

$$\begin{aligned} & \left[(i\omega_n)^2 \begin{bmatrix} M_{IS} & 0 \\ 0 & M_{IS} \end{bmatrix} + (i\omega_n) 2\Omega \begin{bmatrix} M_{IC} & 0 \\ 0 & M_{IC} \end{bmatrix} \right. \\ & \left. + \begin{bmatrix} K_{IS} + n^2 \Omega^2 M_{IS} & -K_{IA} - 2n\Omega^2 M_{IC} \\ K_{IA} + 2n\Omega^2 M_{IC} & K_{IS} + n^2 \Omega^2 M_{IS} \end{bmatrix} \right] \begin{bmatrix} U_{IC} \\ U_{IS} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (19)$$

여기서 $i = \sqrt{-1}$ 이며, M_{IS} , K_{IS} 는 대칭행렬이고 M_{IC} , K_{IA} 는 사대칭(skew-symmetric)행렬이다.

식(19)을 만족하는 고유진동수 ω_n 는 실수이며, 부호가 다른 고유진동수가 존재한다. 고유진동수 $\omega_n > 0$ 에 대한 고유벡터가 (U_{IC}, U_{IS}) 이면 고유진동수 $-\omega_n$ 에 대한 고유벡터는 (U_{IC}, U_{IS}) 의 공액인 $(\overline{U_{IC}}, \overline{U_{IS}})$ 이다. 따라서 면내 고유진동 변위는 다음과 같이 표현될 수 있다.

$$\begin{aligned} {}^d u_I &= Re[(U_{IC} - iU_{IS}) e^{i(n\theta + \omega_n t)}] \\ &+ Re[(U_{IC} + iU_{IS}) e^{-i(n\theta - \omega_n t)}] \end{aligned} \quad (20)$$

상기 식으로부터 $n \geq 1$ 일 때의 면내 고유진동 변위는 $U_{IC} - iU_{IS} = 0$ 이면 전향 진행파(forward traveling wave)이고, $U_{IC} + iU_{IS} = 0$ 이면 후향 진행파(backward traveling wave)임을 알 수 있다.

고정좌표계에서 본 $\phi = \theta + \Omega t$ 에 위치한 단면의 면내 고유진동 변위는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} {}^d v_I(\phi, t) &= {}^d u_I(\theta, t) \\ &= Re[(U_{IC} - iU_{IS}) e^{i(n\phi + \rho_n t)}] \\ &+ Re[(U_{IC} + iU_{IS}) e^{-i(n\phi - \rho_n t)}] \end{aligned} \quad (21)$$

여기서 ρ_n 는 고정좌표계에서의 고유진동수로서 고유진동 변위가 전향 진행파이면 $\rho_n = \omega_n + n\Omega$, 후향 진행파이면 $\rho_n = \omega_n - n\Omega$ 이 된다.

면의 고유진동은 상기한 면내 고유진동과 같은 방법으로 해석될 수 있다.

3.3 굽힘 전단효과를 무시한 경우의 고유진동

교란상태에서 교란된 굽힘 전단 ${}^d \gamma_\xi$, ${}^d \gamma_\eta$ 의 효과를 무시하는 경우에는 다음과 같은 식을 만족하여야 한다.

$$({}^d u_{\xi, \theta} - {}^d u_\eta) + a(1+e) {}^d \phi_\xi = 0 \quad (22)$$

$${}^d u_{\xi, \theta} - a(1+e) {}^d \phi_\xi = 0 \quad (23)$$

구속 식(22), (23)를 고려하여 가상일의 원리 식(16)을 면내진동 변위 ${}^d u_\xi$, ${}^d u_\eta$ 과 면외진동 변위 ${}^d \phi_\eta$, ${}^d u_\xi$ 에 관하여 정리하면 다음과 같다.

$${}^d \delta A_I + {}^d \delta V_I = 0 \quad \forall \delta u_\xi, \delta u_\eta \quad (24)$$

$${}^d \delta A_O + {}^d \delta V_O = 0 \quad \forall \delta \phi_\eta, \delta u_\xi \quad (25)$$

고유진동은 3.2에서 기술된 방법과 동일하게 해석된다. 회전 관성을 무시하는 경우에는 가속도량에 의한 가상일에서 $\rho I_\xi = 0$, $\rho I_\xi = 0$ 라고 놓는다.

가상일을 부분적분하여 가상변위에 대한 식으로 표현하고 가상일의 원리 식(24), (25)를 사용하면 편미분 운동방정식이 얻어진다. 회전 관성을 무시한 경우의 편미분 운동방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} & \rho A ({}^d \ddot{u}_\xi - 2\Omega {}^d \dot{u}_\eta - \Omega^2 {}^d u_\xi) \\ & - \rho A \Omega^2 ({}^d u_{\xi, \theta\theta} - 2{}^d u_{\eta, \theta} - {}^d u_\xi) \\ & + EA \frac{(1+e)^2}{a^2} ({}^d u_{\eta, \theta} + {}^d u_\xi) \\ & + EI_\xi \frac{1}{a^4} ({}^d u_{\xi, \theta\theta\theta\theta} - {}^d u_{\eta, \theta\theta\theta}) = 0 \end{aligned} \quad (26a)$$

$$\begin{aligned} & \rho A ({}^d \ddot{u}_\eta + 2\Omega {}^d \dot{u}_\xi - \Omega^2 {}^d u_\eta) \\ & - \rho A \Omega^2 ({}^d u_{\eta, \theta\theta} + 2{}^d u_{\xi, \theta} - {}^d u_\eta) \\ & - EA \frac{(1+e)^2}{a^2} ({}^d u_{\eta, \theta\theta} + {}^d u_{\xi, \theta}) \\ & + EI_\xi \frac{1}{a^4} ({}^d u_{\xi, \theta\theta\theta\theta} - {}^d u_{\eta, \theta\theta}) = 0 \end{aligned} \quad (26b)$$

$$\begin{aligned} & \rho A {}^d \ddot{u}_\xi - \rho A \Omega^2 {}^d u_{\xi, \theta\theta} \\ & - GJ_\eta \frac{1}{a^4 (1+e)^2} \{ {}^d u_{\xi, \theta\theta} + a(1+e) {}^d \phi_{\eta, \theta\theta} \} \\ & + EI_\xi \frac{1}{a^4} \{ {}^d u_{\xi, \theta\theta\theta\theta} - a(1+e) {}^d \phi_{\eta, \theta\theta} \} = 0 \end{aligned} \quad (27a)$$

$$\begin{aligned} & \rho I_\eta {}^d \ddot{\phi}_\eta - \rho I_\eta \Omega^2 {}^d \phi_{\eta, \theta\theta} \\ & - GJ_\eta \frac{1}{a^3 (1+e)} \{ {}^d u_{\xi, \theta\theta} + a(1+e) {}^d \phi_{\eta, \theta\theta} \} \\ & - EI_\xi \frac{(1+e)}{a^3} \{ {}^d u_{\xi, \theta\theta} - a(1+e) {}^d \phi_\eta \} = 0 \end{aligned} \quad (27b)$$

참고논문⁽⁷⁾에 제시된 고정좌표계에서의 편미분 운동방정식을 회전좌표계에 관한 식으로 변환하고 식(13)과 식(14)을 사용하여 상기와 같은 형태의 식으로 정리하여 식(26)과 식(27)을 비교하면 다음과 같다.

면내진동에 관한 식(26)은 참고논문의 결과와 일치하지만, 면외진동에 관한 식(27)은 참고논문의 결과와는 일부분 차이가 있다. 즉, 식(27)에서의 $1 + e$, GJ_η , $\rho I_\eta \Omega^{2d} \phi_{\eta, \theta\theta}$ 는 참고논문에서는 각각 1 , GI_η , $\rho I_\xi \Omega^{2d} \phi_{\eta, \theta\theta}$ 로 표현되었다.

면내진동에서 회전 관성과 함께 원주방향 인장 $d\varepsilon_\eta$ 를 추가로 무시하는 경우에는 $d u_{\eta, \theta} + d u_\xi = 0$ 을 만족하도록 가상의 원리 식(24)으로부터 유도된 면내진동 변위 $d u_\eta$ 에 관한 고유진동방정식이 얻어지며 고유진동수 ω_n 는 다음과 같이 단순한 식으로 표현된다.

$$\omega_n = \pm \frac{2n}{(n^2+1)} \Omega + \sqrt{\omega_{nN}^2 + \frac{n^2(n^2-1)^2}{(n^2+1)^2} \Omega^2} \quad (28)$$

$$\omega_{nN} = \sqrt{\frac{n^2(n^2-1)^2}{(n^2+1)} \left(\frac{EI_\xi}{\rho A a^4} \right)}$$

여기서 +부호는 후향 진행파의 경우이고, -부호는 전향 진행파의 경우이다. $n=1$ 일 때의 고유진동수 ω_1 는 Ω 이며 이중이고 진행파는 후향이다. ω_{nN} 은 정지 링의 면내 고유진동수이며 고전 식⁽⁹⁾과 일치한다. 식(28)은 참고논문⁽⁷⁾의 식과 일치한다.

면외진동에서 회전 관성과 함께 비틀림 관성을 추가로 무시하는 경우에는 $\rho I_\eta = 0$ 일 때의 식(27b)을 만족하도록 가상의 원리 식(25)으로부터 유도된 면외진동 변위 $d u_\xi$ 에 관한 고유진동방정식이 얻어지며 고유진동수 ω_n 는 다음과 같이 단순한 식으로 표현된다.

$$\omega_n = \sqrt{\frac{(n^2+1/t_\eta)}{(n^2+(1+e)^2/t_\eta)} \omega_{nN}^2 + n^2 \Omega^2} \quad (29)$$

$$\omega_{nN} = \sqrt{\frac{n^2(n^2-1)^2}{(n^2+1/t_\eta)} \left(\frac{EI_\xi}{\rho A a^4} \right)}$$

$$t_\eta = \frac{GJ_\eta}{EI_\xi}$$

여기서 고유진동수 ω_n 는 이중이며 하나는 후향 진행파의 경우이고 다른 하나는 전향 진행파의 경우이다. ω_{nN} 은 정지 링의 면외 고유진동수이며 고전 식⁽⁹⁾과 일치한다.

4. 회전하는 얇은 링의 고유진동 해석 모델 비교

일정한 각속도로 회전하고 있는 얇은 링의 교란상태에서의 고유진동을 해석하기 위한 모델을 굽힘 전단, 회전 관성, 원주방향 인장, 비틀림 관성 등에 의한 2차 효과를 전부 또는 일부 고려하거나 무시하는 경우에 따라서 4개의 모델로 분류하면 Table 1에 제시된 바와 같다.

수치해석에서 사용되는 두께가 b 인 정사각형 단면을 갖는 링의 물성치 및 단면계수는 다음과 같다.

$$\rho = 7850 \text{ kg/m}^3, E = 207 \text{ GPa}, G = 80 \text{ GPa}, K_\xi = 0.85, K_\zeta = 0.85, K_\eta = 0.84346.$$

$a = 0.100 \text{ m}$, $b = 0.002 \text{ m}$ 인 매우 얇은 링 ($b/a = 0.02$)에 대하여 Table 1에 제시된 4개의 모델을 사용하여 각속도 Ω 를 0에서부터 1000 rad/s 까지 증가시키면서 링의 고유진동을 해석하였다. $n=0$ 의 경우에는 최저차 면내 및 면외 고유진동수는 0이며 고유모드는 링의 z 축 방향 강체 회전 운동 및 강체 병진운동이다.

Fig. 2 및 Fig. 3에는 $n=1, 2, 3, 10$ 의 각각의 경우에 계산된 2개의 최저차 면내 및 면외 고유진동수를 Ω 의 함수로 나타내었다. B는 후향 진행파의 경우이고, F는 전향 진행파의 경우이다.

면내진동에서 $n=1$ 의 경우에는 4개의 모든 모델에 대하여 2개의 면내 고유진동수는 각속도 Ω 와 정확히 같고 진행파는 모두 후향이다. 따라서 고정좌표계에서의 2개의 최저차 면내 고유진동수는 모두 0이 되며 고유모드는 $X-Y$ 면에서의 강체 병진운동이다. $n \geq 2$ 의 경우에는 각속도 Ω 가 커짐에 따라서 후향 진행파의 고유진동수는 올라가고 전향 진행파의 고유진동수는 약간 내려오다가 올라가고 있다. $n=2, 3$ 의 경우에는 모델에 따른 고유진동수의 차이가 거의 없다. 그러나 $n=10$ 의 경우에는 모델에 따라서 고유진동수에서 차이가 있고, Table 1에 제시된 모델의 순서대로 고유진동수는 상대적으로 약간씩 증가한다.

면외진동에서 $n=1$ 의 경우에는 4개의 모든 모델에 대하여 후향 진행파의 면외 고유진동수는 Ω 와 정확히 같고 전향 진행파의 면외 고유진동수는 Ω 와 거의 같다. 따라서 고정좌표계에서의 후향 진행파의 면외 고유진동수는 0이 되고 전향 진행파의 면외 고유진동수는 약 2Ω 가 되며 고유모드는 축대칭 팽이의 느린 세차운동(slow precession) 및 빠른 세차운동(fast precession)⁽¹⁰⁾과 유사하다. $n \geq 2$ 의 경우에는 Ω 가 커짐에 따라서 후향 및 전향 진행파의 고유진동수가 모두 올라가고 있고, 회전 관성을 무시하면 식(27)에서 알 수 있듯이 Coriolis 가속도 효과가 없기 때문에 후향 및 전향 진행파의 고유진동수는 정확히 일치하고 회전 관성을 고려하면 거의 일치한다. $n=2, 3$ 의 경우에는 모델에 따른 고유진동수의 차이가 거의 없다. 그러나 $n=10$ 의 경우에는 모델에 따라서 고유진동수에서 차이가 있고, Table 1에 제시된 모델의 순서대로 고유진동수는 상대적으로 약간씩

증가한다.

해석모델에 따른 고유진동수의 차이를 자세히 비교하기 위하여 $a=0.100$ m, $b=0.020$ m인 약간 얇은 링($b/a=0.2$)에 대하여 Table 1에 제시된 4개의 모델 및 참고논문⁽⁷⁾의 모델인 K&C 모델을 사용하여 각속도 Ω 가 0 과 1000 rad/s일 때 계산된 고유진동수의 수치 값을 Table 2 및 Table 3에 제시하였다. Table 2와 Table 3에서 K&C 모델에 대한 고유진동수는 참고논문의 면의진동에 관한 식에서 GI_y 를 GJ_y 로 수정하여 해석된 결과이다.

면내진동에서 $n=1$ 의 경우에는 모든 모델에 대하여 고유진동수는 일치하고 있다. $n=2, 3$ 의 경우에는 모델에 따라서 고유진동수에서 약간 차이가 있고, Table 1에 제시된 모델의 순서대로 고유진동수는 상대적으로 약간씩 증가하고 있다. Model D2B에 대한 고유진동수는 K&C 모델에 대한 고유진동수와 정확히 일치하고 있다.

면외진동에서 Model D2B와 K&C 모델에 대한 고유진동수는 Ω 가 0일 때는 일치하지만 Ω 가 1000 rad/s일 때는 약간 차이가 있다. $n=1$ 의 경우에는 후향 진행파의 고유진동수는 제시된 4개의 모델에 대하여 고유진동수는 정확히 일치하고 있지만 전향 진행파의 고유진동수는 회전 관성을 고려한 경우와 무시한 경우에 따라서 약간의 차이가 있다. $n=2, 3$ 의 경우에는 모델에 따라서 고유진동수에 약간 차이가 있고, Table 1에 제시된 모델의 순서대로 고유진동수는 상대적으로 약간씩 증가하고 있다.

일정한 각속도 Ω 로 회전하는 축대칭 팽이운동에서 팽이의 선회점(pivot)에서 질량중심까지의 거리 및 수직축과 회전축 사이의 각을 0으로 접근시키면 팽이의 느린 세차속도 및 빠른 세차 속도⁽¹⁰⁾는 0 및 $(C/A)\Omega$ 로 접근하게 되고 회전하는 링의 면외 강제운동과 같게 된다. 따라서 회전좌표계에서 본 회전하는 얇은 강체 링의 후향 세차 속도 ω_B 및 전향 세차 속도 ω_F 는 다음과 같다.

$$\omega_B = \Omega \quad (30a)$$

$$\omega_F = (C/A - 1)\Omega \quad (30b)$$

$$C = 2\{(1+e)^2 \rho A a^2 + \rho I_y - \rho I_x\}$$

$$A = \{(1+e)^2 \rho A a^2 + \rho I_y + \rho I_x\}$$

$a=0.100$ m, $b=0.020$ m인 약간 얇은 링($b/a=0.2$)에 대하여 회전 관성을 고려하는 경우에는 식(30)으로부터 $\omega_B = \Omega$, $\omega_F = 0.9868\Omega$ 이고, 회전 관성 ρI_x 을 무시하는 경우에는 $\omega_B = \Omega$, $\omega_F = \Omega$ 이다.

Ω 가 1000 rad/s일 때의 ω_B , ω_F 는 Table 3에서 $n=1$ 인 경우에는 본 논문에서 제시된 4개의 모델에 대한 고유진동수와 일치하고 있지만 K&C 모델에 대한 고유진동수와는 차이가 있음을 알 수 있다.

5. 결 론

본 논문에서는 일정한 각속도로 회전하고 있는 얇은 링의 면내 및 면외 고유진동을 해석하기 위한 모델을 Lagrange 변형도를 사용하는 유한변형이론 및 가상일의 원리를 이용하여 체계적으로 유도하였다. 얇은 링의 굽힘 전단, 회전 관성, 원주방향 인장, 비틀림 관성 등에 의한 2차 효과를 전부 또는 일부 고려하거나 무시하는 경우에 따라서 분류된 4개의 해석모델을 제시하였다.

매우 얇은 링에 대해서 면내 및 면외 고유진동에 미치는 상기한 2차 효과에 의한 영향은 절 직경수가 작은 경우에는 매우 작으므로 2차 효과를 전부 무시한 Model D1로부터 유도하여 제시된 단순 식을 사용하여도 고유진동수를 어느 정도 정확히 계산할 수 있다. 그러나 매우 얇은 링이지만 절 직경수가 큰 경우 또는 약간 얇은 링의 경우에는 2차 효과에 의한 영향이 크므로 고유진동수를 정확히 해석하기 위해서는 2차 효과를 전부 고려하는 Model D3을 사용하여 수치 해석을 수행해야 한다.

얇은 링의 굽힘 전단 및 회전 관성을 무시하여 얻어진 참고논문⁽⁷⁾의 면외 고유진동에 관한 식에서 일부분 오류가 있음을 밝혔고 수치적 예를 통하여 증명하였다.

또한 링의 면외 강제운동은 팽이운동과 유사함을 알 수 있었다.

참 고 문 헌

- (1) Chidamparam, P. and Leissa, A. W., 1993, "Vibrations of Planar Curved Beams, Rings, and Arches," Appl. Mech. Rev., ASME, Vol. 46, No.9, pp. 467~483.
- (2) Carrier, G. F., 1945, "On the Vibration of the Rotating Ring," Quarterly of Applied Mechanics, Vol. 3, pp. 235~245.
- (3) Bert, C. W. and Chen, T. L. C., 1978, "On Vibration of a Thick Flexible Ring Rotating at High Speed," Journal of Sound and Vibration, Vol. 61, No. 4, pp. 517~570.
- (4) Endo, M., Hatamura, K., Sakata, M. and Taniguchi, O., 1984, "Flexural Vibration of a Thin Rotating Ring," Journal of Sound and Vibration, Vol. 92, No. 2, pp. 261~272.
- (5) Bickford, W. B. and Reddy, E. S., 1985, "On the In-plane Vibrations of Rotating Ring," Journal of Sound and Vibration, Vol. 101, No. 1, pp. 13~22.
- (6) Bickford, W. B. and Maganty, S. P., 1986, "Out-of-plane Vibrations of Thick Rotating Rings,"

Journal of Sound and Vibration, Vol. 110, No. 1, pp. 121~127.

(7) Kim, W. and Chung, J., 2002, "Free Non-linear Vibration of a Rotating Thin Ring with In-plane and Out-of-plane Motions," Journal of Sound and Vibration, Vol. 258, No. 1, pp. 167~178.

(8) Washizu, K., 1982, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, Oxford.

(9) Love, A. E. H., 1944, *A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity*, Dover, New York

(10) Meirovitch, L., 1970, *Methods of Analytical Dynamics*, McGraw-Hill, New York.

Table 1 Models for the natural vibration analysis of a rotating thin ring

Case	In-plane vibration			Out-of-plane vibration		
	Degree of freedom of the cross-section	Secondary effects neglected	Equation used	Degree of freedom of the cross-section	Secondary effects neglected	Equation used
Model D3	${}^d u_\xi, {}^d u_\eta, {}^d \phi_\zeta$		Eq.(16)	${}^d \phi_\xi, {}^d \phi_\eta, {}^d u_\zeta$		Eq.(17)
Model D2A	${}^d u_\xi, {}^d u_\eta$	${}^d \gamma_\xi$	Eq.(24)	${}^d \phi_\eta, {}^d u_\zeta$	${}^d \gamma_\zeta$	Eq.(25)
Model D2B	${}^d u_\xi, {}^d u_\eta$	${}^d \gamma_\xi, \rho I_\xi$	Eq.(24)	${}^d \phi_\eta, {}^d u_\zeta$	${}^d \gamma_\zeta, \rho I_\zeta$	Eq.(25)
Model D1	${}^d u_\eta$	${}^d \gamma_\xi, \rho I_\xi, {}^d \varepsilon_\eta$	Eq.(28)	${}^d u_\zeta$	${}^d \gamma_\zeta, \rho I_\zeta, \rho I_\eta$	Eq.(29)

Table 2 Comparison of the natural frequencies of the in-plane vibration for $b/a=0.2$

n	Ω (rad/s)	ω_n (rad/s)				
		Model D3	Model D2A	Model D2B	Model D1	K&C ⁽⁷⁾
1	0	0	0	0	0	0
	1000	1000 B 1000 B	1000 B 1000 B	1000 B 1000 B	1000 B 1000 B	1000 B 1000 B
2	0	7746	7898	7921	7955	7921
	1000	7034 F 8640 B	7185 F 8791 B	7203 F 8818 B	7245 F 8845 B	7203 F 8818 B
3	0	21250	22150	22380	22500	22380
	1000	20770 F 21990 B	21670 F 22890 B	21880 F 23130 B	22030 F 23230 B	21880 F 23130 B

Table 3 Comparison of the natural frequencies of the out-of-plane vibration for $b/a=0.2$

n	Ω (rad/s)	ω_n (rad/s)				
		Model D3	Model D2A	Model D2B	Model D1	K&C ⁽⁷⁾
1	0	0	0	0	0	0
	1000	986.8 F 1000 B	986.8 F 1000 B	1000 F 1000 B	1000 F 1000 B	995.0 F 995.0 B
2	0	7373	7429	7478	7562	7478
	1000	7610 F 7656 B	7663 F 7711 B	7740 F 7740 B	7955 F 7955 B	7734 F 7734 B
3	0	20710	21270	21570	21920	21570
	1000	20880 F 20960 B	21430 F 21510 B	21780 F 21780 B	22130 F 22130 B	21770 F 21770 B

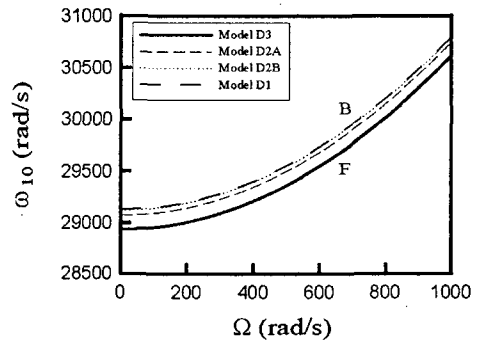
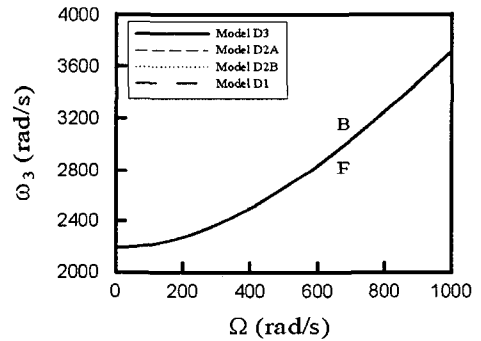
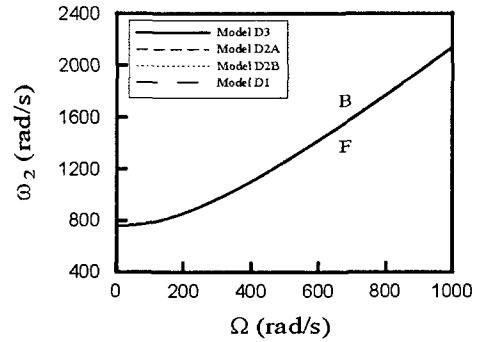
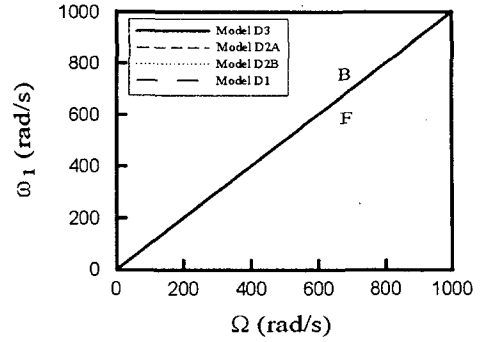
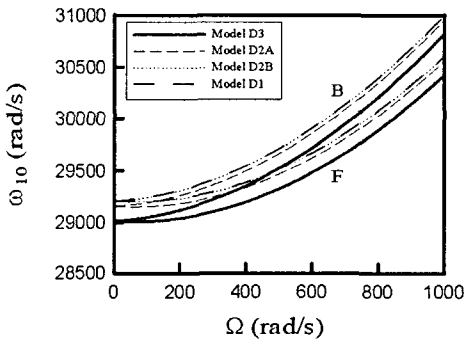
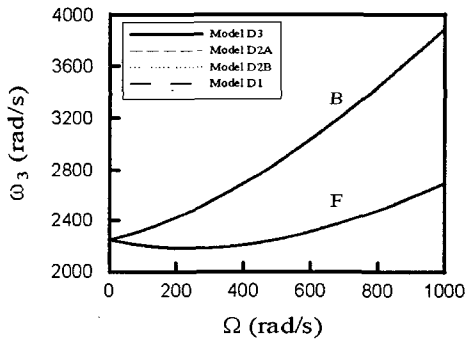
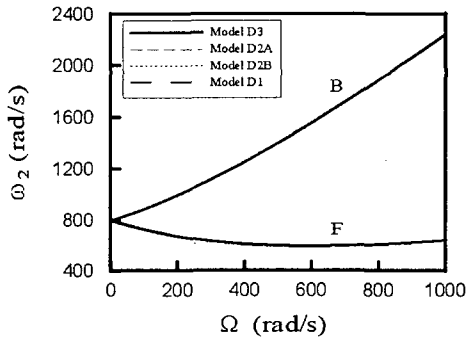
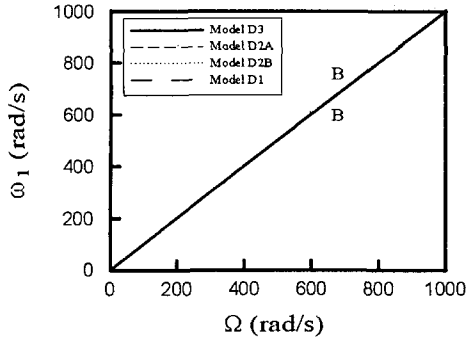


Fig. 2 Natural frequencies ω_n of the in-plane vibration for $b/a=0.02$

Fig. 3 Natural frequencies ω_n of the out-of-plane vibration for $b/a=0.02$