

다수의 단극 음원들을 이용한 속이 빈 실린더 형상의 음향 위치 에너지 집적공간 형성방법

A method of Shaped Sound Focusing Using Multiple Monopole Sources: Hollow Cylinder shape

박진영*·김양한**
Jin-Young Park, Yang-Hann Kim

Key Words : Shaped Sound Focusing(형상음향집적), Acoustic Potential Energy(음향 위치 에너지), Acoustic Brightness Control(음향밝기 제어), Acoustic Contrast Control(음향대조제어)

ABSTRACT

Shaped Sound Focusing is defined as the generation of acoustically bright zone with a certain shape in space using multiple sources. The acoustically bright zone is a spatially focused region with relatively high acoustic potential energy level. In view of the energy transfer, acoustic focusing using multiple sources is essential because acoustic energy is very small to use other type of energy. It can be done by taking optimization techniques which can be acoustic brightness control and acoustic contrast control. But it has not been frequently concerned about several cases, so the case of hollow cylinder shaped sound focusing is adapted and there will be arguments about available control variables and spatially controllable region in this case.

1. 서론

형상음향집적(shaped sound focusing)이란, 공간 상에 다수의 음원들을 사용하여 어떠한 형상을 갖는 음향학적으로 밝은 공간을 형성하는 것으로 정의된다. 여기서 음향학적으로 밝은 공간이란, 다른 공간에 비해서 상대적으로 높은 음향 위치 에너지 레벨을 갖는 공간을 의미한다. 에너지는 물리적 계가 일을 할 수 있는 용량을 의미하고, 또한 여러 가지 형태의 에너지로의 변환이 가능하다. 이러한 에너지의 변환의 관점에서 보면 음향 에너지도 다른 에너지로의 변환이 가능할 것이라는 생각이 가능할 것이다. 그러나 음향 에너지의 경우, 에너지의 레벨 자체가 매우 낮기 때문에 에너지의 변환에 이용하기 위해서는 다수의 음원들을 사용한 음향에너지의 집적이 필수적이다. 실제로 초음파 집적을 통해 종양을 제거하는 등의 음향에너지의 변환 이용에 대한 논문들이 발표된 바 있으며 그러한 의료장비 개발 사례 또한 알려져 있다.(1) 음향 위치 에너지를 집적하는 방법으로, 다수의 음원들을 사용하는 최적화 문제의 경우, 음향밝기 제어(Acoustic brightness control)와 음향대조제어(acoustic contrast control) 방법이 제안된 바 있다.(2,3) 그러나 이러한 제어 방법들의 다양한 경

우들에 대한 해석 사례들은 많지 않다. 따라서 본 연구에서는 속이 빈 실린더 형상의 음향학적 밝은 공간 형성의 예제를 통해 형상음향집적과 관련된 변수들과 그들 사이의 물리적인 상호관계 및 제어 가능성 여부를 고찰해 보고자 한다.

2. 문제 정의

2.1 수학적 기술

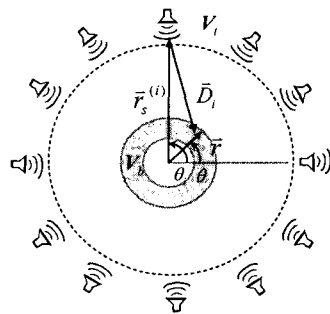


Fig. 1. System configuration

Fig. 1 과 같이 단극 음원들이 원주 방향으로 배치된 공간을 가정한다. Fig. 1 의 점선으로 둘러 쌓인 공간을 전체관심공간(V_t : total zone of interest), 띠의 형상으로 나타나는 공간을 음향학적 밝은 공간(V_b : acoustically bright zone)으로 정의한다. 또 한 음원들은 계(system)의 해에 맞는 임의의 체적

* 정회원, 한국과학기술원 기계공학과
E-mail: jypark1979@kaist.ac.kr
Tel: (042) 869-3065, Fax: (042) 869-8220

** 정회원, 한국과학기술원 기계공학과

속도를 가질 수 있다고 가정한다. 그러면 제안된 문제는 속이 빈 실린더 형상의 집적공간에 음향 위치에너지를 집적시키기 위한 단극 음원들의 최적화된 체적속도를 구하는 문제로 정의될 수 있다.

유한개(N)의 음원이 공간 상에 분포되어 있을 때, 공간 상의 임의의 지점(\bar{r})에서의 음압 $\hat{p}(\bar{r})$ 은 각각의 음원들로부터의 음압의 합으로써 표현될 수 있으며

$$\hat{p}(\bar{r}) = \sum_{i=1}^N \hat{G}(\bar{r} | \bar{r}_s^{(i)}) \hat{q}(\bar{r}_s^{(i)}) \quad (4)$$

$$= \mathbf{G}(\bar{r} | \bar{\mathbf{r}}_s) \mathbf{q}(\bar{\mathbf{r}}_s)$$

$$\hat{G}(\bar{r} | \bar{r}_s^{(i)}) = -j \frac{\rho_0 c k}{4\pi} \frac{e^{jk|\bar{r}-\bar{r}_s^{(i)}|}}{|\bar{r}-\bar{r}_s^{(i)}|} \quad (5)$$

와 같이 표현된다. 여기서 $\hat{q}(\bar{r}_s^{(i)})$ 는 i 번째 단극 음원의 세기(monopole source strength) 혹은 체적속도(volume velocity)이며, $\hat{G}(\bar{r} | \bar{r}_s^{(i)})$ 는 i 번째 음원으로부터 공간 상의 한 지점(\bar{r})까지의 전달함수로 정의된다.

제어 변수를 사용함에 있어서 여러 가지가 제안될 수 있겠지만, 이 경우는 에너지의 관점에서 공간을 제어하는 것이 목적이기 때문에 주파수와 더불어 공간의 평균 음향 위치 에너지를 그 공간을 대표하는 변수로 선정한다. 어떠한 공간(V_0) 내의 평균 음향 위치 에너지는

$$e_0 = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \hat{p}(\bar{r})^H \hat{p}(\bar{r}) dV \quad (6)$$

와 같이 정의할 수 있고, 결국 앞서 언급된 문제 정의는 원하는 공간의 평균 음향 위치 에너지가 최대 되도록 공간상에 에너지를 집적시키는 방법을 찾는 최적화의 문제로 달리 표현할 수 있다. 이러한 최적화 문제의 해결 방법은 전술된 바와 같이 음향밝기제어(Acoustic brightness control)와 음향대조제어(Acoustic contrast control) 방법을 통해 얻을 수 있다.

3. 문제해결 방법론

3.1 음향밝기제어와 음향대조제어

음향밝기제어는 주어진 총 입력파워에 대해서

원하는 공간의 공간평균 음향 위치 에너지를 최대한 집적시키는 제어방법이다. 그리고 음향대조제어는 두 개의 공간이 주어질 때 각각의 공간평균 음향 위치 에너지의 비를 최대화 시키는 제어방법이다. 이러한 문제들을 풀기 위해서 음향밝기(acoustic brightness)와 음향대조(acoustic contrast)라는 목적함수(objective function)가 정의될 필요가 있으며, 이 목적함수들이 최대값을 갖도록 하는 방법은 다음과 같다. (2, 3)

식 (4)를 식 (6)에 대입하면

$$e_0 = \mathbf{q}^H \mathbf{R}_0 \mathbf{q} \quad (6a)$$

$$\mathbf{R}_0 = \frac{1}{V_0} \int_{V_0} \mathbf{G}(\bar{r} | \bar{\mathbf{r}}_s)^H \mathbf{G}(\bar{r} | \bar{\mathbf{r}}_s) dV \quad (7)$$

와 같이 표현할 수 있다. 여기서 식 (7)은 원하는 음장 형성을 위한 음원들 사이의 상관관계를 나타내 주는 상관행렬(correlation matrix)로 정의되며, V_0 는 공간의 특성에 따라 V_b (bright zone), V_d (dark zone), V_b (total zone of interest)로 대체될 수 있다.

음향밝기(α)는 가해질 수 있는 입력파워의 총합에 대한 공간평균 음향 위치 에너지의 비로 정의된다. 여기서 $|\hat{G}_0|^2$ 는 목적함수를 무차원 화하기 위해 도입된 상수이다.

$$\alpha = \frac{\mathbf{q}^H \mathbf{R}_b \mathbf{q}}{|\hat{G}_0|^2 \mathbf{q}^H \mathbf{q}} \quad (8)$$

여기서, 식 (8)의 값을 최대로 만드는 최적해는 라그랑지안 승수(Lagrange multiplier)를 도입하여서 수학적으로 구해보면, 결국 \mathbf{R}_b 의 고유치를 최대가 되도록 하는 고유벡터가 된다.

음향대조(β)는 어떠한 두 영역이 주어질 때, 그 때의 음향밝기의 비로 정의된다. 즉,

$$\beta = \frac{\alpha_b}{\alpha_t} = \frac{\mathbf{q}^H \mathbf{R}_b \mathbf{q}}{\mathbf{q}^H \mathbf{R}_t \mathbf{q}} \quad (9)$$

과 같이 주어지는데, 이 경우도 앞서의 경우처럼 수학적 계산을 수행하면 음향밝기(β)를 최대로 만들어주는 최적해는 $\mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{R}_b$ 의 최대 고유치에 해당하는 고유벡터가 됨을 알 수 있다. (참고: 식

(9)의 분모에 α_i 대신 α_d 를 대입하여도 동일한 해를 얻게 된다.)

4. 전산기 모의 실험 및 결과 분석

4.1 상관행렬 요소의 수학적 표현

모의 실험 과정에서 상관행렬이 주어질 경우 해를 구하는 것은 단순한 고유치 문제의 해석이기 때문에 그리 어려운 문제가 아니다. 그러나 상관행렬을 구하는 데는 많은 노력과 시간이 필요하게 된다. 그 이유는 상관행렬의 각 요소들 별로 공간 적분이 각각 수행되어야 하고, 또한 집적 형상이 복잡해질 경우, 그 적분 방정식을 물리적 현상을 이해할 수 있는 형태의 수학적 표현으로 만드는 것이 매우 어려워지기 때문이다. 따라서 상관행렬을 구하는 것이 모의 실험의 가장 중요한 부분이 된다. 상관행렬의 각 성분들은 다음과 같이 수식화 할 수 있다.(Fig. 1)

$$R^{(i,j)} = \frac{1}{V} \int_V \hat{G}(\bar{r} | \bar{r}_s^{(i)})^H \hat{G}(\bar{r} | \bar{r}_s^{(j)}) dV \quad (10)$$

$$= \left(\frac{\rho_0 c k}{4\pi} \right)^2 \frac{1}{V} \int_V \frac{e^{-jk(D_i - D_j)}}{D_i \cdot D_j} dV$$

$$D_i = |\bar{r} - \bar{r}_s^{(i)}| \quad (11)$$

$$= \sqrt{r^2 + R_0^2 - 2rR_0 \cos(\theta - \theta_i) + (z - z_i)^2}$$

여기서 속이 빈 실린더 집적형상을 고려한 원통형 좌표 계의 한 평면 ($z = z_i$)을 관심 평면으로 고려하면, 밝은 공간의 경우 상관행렬의 요소는

$$R_b^{(i,j)} = \left(\frac{\rho_0 c k}{4\pi} \right)^2 \frac{I}{S} \quad (12)$$

$$I = \frac{\pi^2}{4R_0} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} [(2m+1)(2n+1)H_{m+1/2}^{(2)}(kR_0)H_{n+1/2}^{(1)}(kR_0)]$$

$$\times \int_{r_1}^{r_2} J_{m+1/2}(kr)J_{n+1/2}(kr) dr$$

$$\times \int_0^{2\pi} P_m(\cos(\theta - \theta_i))P_n(\cos(\theta - \theta_j)) d\theta$$

(r_1 : 내부집적반경, r_2 : 외부집적반경) (13)

와 같이 급수의 형태로 표현할 수 있다.(4)

여기서, 식 (13)의 곱해진 요소들의 m 과 n 에 대한 변화를 관찰해 보면 상관행렬의 형태는 각 음원들 사이의 각도에 따라서 주요하게 다르게 나타남을 알 수 있다. 식 (13)의 우변의 마지막 항

의 적분 식을 음원들 사이의 각도 차에 대하여 살펴보면 음원의 각도가 0° , 180° 일 경우를 제외하고는 상대적으로 매우 작은 값을 갖게 된다. 따라서 상관행렬을 구해보면 대각요소(diagonal term)들의 값들이 주요(dominant)하게 될 것임을 쉽게 짐작 할 수 있다.

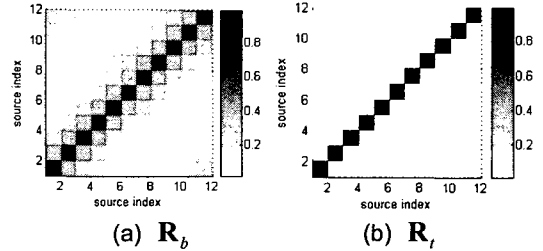


Fig. 2. Magnitude of correlation matrix

$$(kR_0 = 20.9, r_1/R_0 = 0.3, r_2/R_0 = 0.4)$$

Fig. 2 는 밝은 공간에 대한 상관행렬과 전체관심공간에 대한 상관행렬의 형태를 보여준다. 모의 실험에서 음원은 12 개를 사용하였으며 전체관심공간의 반지름은 $0.9R_0$ 이다. 특히 전체관심공간에 대한 상관행렬은 단위행렬과 거의 같음을 알 수 있는데, 이를 통해 주어진 문제정의의 경우는 밝기제어와 대조제어의 해가 거의 동일함을 알 수 있다.

4.2 모의실험 결과 및 고찰

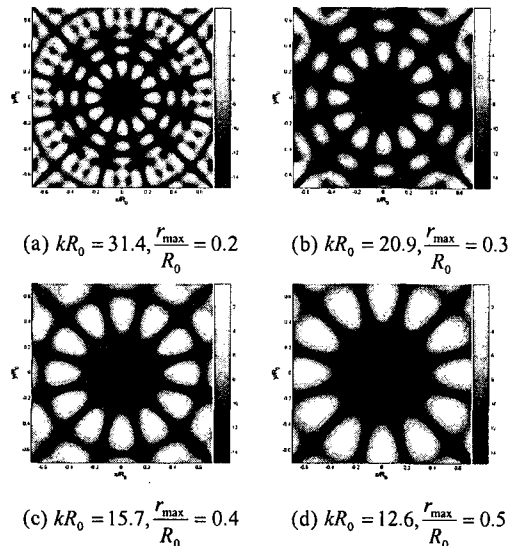


Fig. 3. Optimized acoustic potential energy field at maximum available inner focusing radius. (dB scale)

Fig. 3의 결과들은 kR_0 값에 따라 집적이 가능한 최대집적반경에 대한 해의 결과이다. 이 결과들을 통해서 kR_0 이 커질수록 최대 집적가능반경이 줄어들고, 정의된 밝은 공간 외에 다른 곳에서 밝은 공간이 동시에 발생함을 확인할 수 있다. 그 이유는 상관행렬의 형태에서 그 이유를 찾을 수 있다. 이 문제의 경우 음원들 사이의 상관성이 크지 않기 때문이다. 그것은 달리 말하면 제어가능 변수들과 제어가능 공간이 제한된다는 것을 의미한다. 실제로 전산기 모의 실험 수행 결과 제어가능 공간은 내부집적반경이 가진 되는 음원의 파장의 길이와 같은 영역까지로 나타났으며, 정의된 밝은 공간 이외의 영역에 생기는 밝은 영역에 대한 제어 가능성이 거의 없음을 확인할 수 있었다.

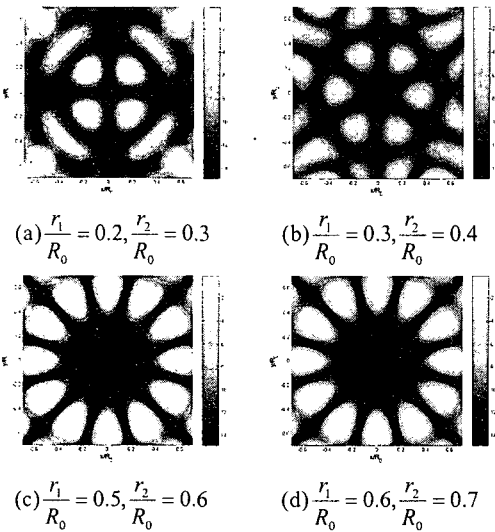


Fig. 4. Acoustic potential energy field at $kR_0 = 12.6$ (dB scale)

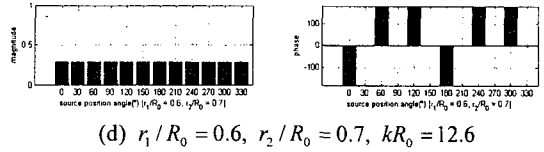
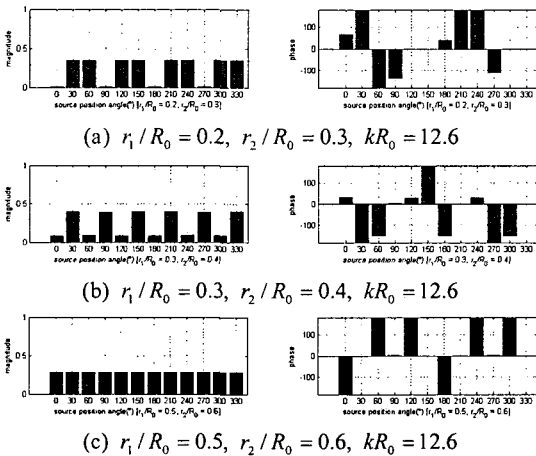


Fig. 5. Magnitude and phase of solution vectors.

Fig. 5, 6을 통해서 살펴보면 내부 집적반경이 가진 되는 파장의 길이에 비해 커질 경우 해의 변화가 없고, 실제로 형성되는 음향 위치 에너지 영역시 변화가 없음을 확인할 수 있다. 즉 최대 집적반경 이상의 공간영역에서는 현재의 제어 노력이 큰 의미가 없다는 것이다. 반면 최대집적반경 내부의 영역에서는 상대적으로 제어가 잘 됨을 확인할 수 있다. 또한 집적 반경에 따라서 Fig. 5(a), 6(b)처럼 사용되지 않는 음원이 발생할 수 있음도 확인할 수 있다. 물론 정의된 밝은 공간 이외의 공간에서 발생하는 음향학적으로 밝은 영역에 대한 제어 가능성이 거의 없는 것이 사실이지만, 우선적으로 정의된 밝은 공간에 대한 제어 가능성은 확인할 수 있다.

5. 결론

형상음향집적은 공간 상에 여러 개의 음원들을 이용하여 어떤 형상을 갖는 공간에 음향학적 밝은 공간을 형성하는 것을 의미한다. 이를 위해서 음향 밝기제어와 음향 대조제어의 방법을 적용할 수 있고, 주어진 문제에 따라서 그 때의 상관행렬과 해를 통해 만들어진 음향 위치 에너지 장을 관찰함으로써 제어 변수들의 제어 가능성 여부 및 제어 가능 공간 등의 제한 조건들을 확인할 수 있다

후 기

본 연구는 한국과학기술평가원(KISTEP)의 국가 지정연구실 사업과 교육부의 두뇌한국 21(BK21) 프로그램의 지원에 의하여 연구되었음을 밝힙니다.

참고문헌

- (1) Gail ter Haar, 1999, "Therapeutic Ultrasound," Eur. J. Ultrasound, Vol. 9, pp. 3-9.
- (2) J.-W. Choi, Y.-H. Kim, 2002, "Generation of an acoustically bright zone within an illuminated region," J. Acoust. Soc. Am. Vol. 111(4), pp. 1695-1700.
- (3) J.-W. Choi, Y.-H. Kim, 2002, "Generation of acoustically bright and dark zone using multiple sources," in Proc. of INTER-NOISE 03, Michigan, paper N322.
- (4) I. S. Gradshteyn, I.M. Ryzhik, 1980, Tables of Integrals, Series, and Products, Academic Press, New York, pp. 979-980