

# 미분변환법에 의한 Euler-Bernoulli 썩기 보의 진동 해석

## Vibration Analysis for the Euler-Bernoulli Wedge Beam by using Differential Transformation Method

신영재† · 윤종학\* · 페르디난드\* · 윌모\*

Shin Young Jae, Yun Jong Hak, Ferdinand T. and Willmo I. C.

**Key Words :** Differential Transformation Method (미분변환법), Wedge Beam(썩기 보), Regular Singularity (특이성)

### ABSTRACT

This paper investigated the vibration analysis for the Euler-Bernoulli complete and truncate wedge beams by Differential Transformation Method(DTM). The governing differential equation of the Euler-Bernoulli complete and truncate wedge beams with regular singularity is derived and verified. The concepts of DTM were briefly introduced. Numerical calculations are carried out and compared with previous published results. The usefulness and the application of DTM are discussed.

## 1. 서론

완전한 썩기 보(complete wedge beam)는 일정한 폭을 가지며, 선형적으로 깊이가 변하고, 날카로운 단을 가지며, 잘린 썩기 보(truncate wedge beam)는 완전한 썩기 보의 일부분이다. 이러한 썩기 보는 산업기계 요소 및 건설현장 등에서 많이 사용되고 있으나 그 연구는 상대적으로 적은 편이다.

이러한 썩기 보의 선행 연구로는, Todhunter 와 Person 이 Euler-Bernoulli 썩기 보의 모드형상의 식을 유도하였으며, 그 해는 독립된 1 종 및 2 종의 네 개의 Bessel 함수 항의 합으로 표현되었다<sup>(1)</sup>. Todhunter 와 Person 의 연구에서는 썩기 보의 큰 단이 고정된 보에 대하여 진동수 파라미터의 다항식과 같이 진동수 식을 표현하였으며, 기초 고유진동수를 계산하였다. 그 작업은 Ward, Nicholson 그리고 Wrinch 에 의하여 계속되었다<sup>(2-4)</sup>.

Conway 와 Dubil 이 잘린 썩기 보에 대해 고정단, 편단 및 자유단 경계조건에 조건들의 조합에 대하여 Bessel 함수를 사용하여 기초진동수를 목록화하여 나타내었다<sup>(5)</sup>. Lee 는 한쪽 끝단에 질량

이 있는 경계조건에 대하여 다루었고, Goel 은 양쪽 끝단에 탄성적으로 지지된 썩기나 콘(cone) 보에 대하여 확장하였다<sup>(6,7)</sup>. Yang 은 내부에 지지하는 썩기 보를 연구하였으며, Sanger 는 단면이 일정하지 않는(non-uniform) 보들의 집단을 고려하여 연구 하였다<sup>(8,9)</sup>. 그 해는 n 차 Bessel 함수들로 표현이 가능하다. 그리고 해가 Bessel 함수로 나타나지 않는 일정하지 않는 보의 형태들일 때, Wang 은 초기하(hypergeometric) 함수에 기초한 해를 제안하였다<sup>(10)</sup>. Naguleswaran 는 Froenius 법을 사용하여 완전한 썩기 및 잘린 썩기 보에 대하여 고정단, 편단, 미끄럼단 그리고 자유단의 16 개의 조합에 대하여 잘림율이 0.05 에서부터 0.7 까지 변할 때 처음 세 고유진동수를 목록화 하였다<sup>(11-13)</sup>.

미분변환법(DTM)의 개념은 전기회로 해석에서 선형 및 비선형 초기치 문제에 대하여 적용되었다. 최근에 미분변환법은 고유값 문제를 풀기 위하여 많은 연구자들의 관심이 집중되고 있다<sup>(14-16)</sup>. 또한 미분변환법을 사용하여 얻은 해의 함수는 급수의 중심(center of the series)에 대한 무한 급수로 표현된다. 이러한 미분변환법의 급수의 중심에 관한 연구는 Shin 등에 의해 변화하는 두께를 가지는 중실(solid) 및 환형(annular) 원판에 대하여 연구 되어졌다<sup>(17)</sup>.

본 논문에서는 완전하거나 잘린 Euler-Bernoulli 썩기 보에 대하여 미분변환법을 사용하여 진동 해석을 수행하였다. 특이성(regular singularity)을 가지는 완전하거나 잘린 Euler-

† 책임저자, 정희원, 안동대학교 기계공학부  
E-mail : yjshin@andong.ac.kr  
Tel : (054) 852-5435, Fax : (054) 820-5167

\* 안동대학교 대학원 기계공학부

Bernoulli 썬기 보에 지배 미분방정식을 유도하고 간단히 소개하였으며, 미분변환법의 개념이 간단히 소개되었다. 수치적 계산에 의해 얻은 결과들은 미분변환법의 정확성과 효용성을 증명하기 위하여 이미 연구된 결과들과 비교하였으며, 선행 연구에서 계산하지 못한 영역을 완성하였다. 그리고 미분변환법의 효용성 및 특이문제에 대한 적용이 논의 되었다.

## 2. 미분변환법(DTM)

미분변환법(Differential Transformation Method)의 개념은 Zhou(1986)에 의하여 처음 제안되었다. 미분변환법은 Taylor 급수 전개에 기초를 두었고, 미분방정식의 해는 미분변환의 기초적인 연산에 의하여 변환된 운동의 지배방정식의 대수적인 순환관계로 얻어진다. 그리고 미분변환법은 선형 및 비선형 문제를 풀기 위하여 유용한 방법이다.

도메인 D 에서  $y(x)$  가 해석적이고  $x=x_0$  인 점이 존재한다면, 급수의 중심이  $x=x_0$  이고 함수  $y(x)$  을 나타낼 수 있는 어떤 급수가 존재한다. 그리고 이 급수를  $y(x)$  의 Taylor 급수라 하며, 그 형태는 식 (1)과 같다.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x-x_0)^k}{k!} \left[ \frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \quad \text{for } \forall x \in D \quad (1)$$

식 (1)에서 함수의 미분변환을  $Y(k)$  라고 정의하면 식 (2)와 같다.

$$Y(k) = \frac{1}{k!} \left[ \frac{d^k y(x)}{dx^k} \right]_{x=x_0} \quad (2)$$

그리고 식 (2)를 식(1)에 대입하고 다시 정리하면, 원시함수  $y(x)$ 는 식 (3)같이 얻어진다.

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (x-x_0)^k Y(k) \quad (3)$$

여기서  $Y(k)$  을 원시함수  $y(x)$  에 대한 T 함수(T-function)라고 하며, 식 (3)은 T 함수  $Y(k)$  의 미분역변환이다.

위의 미분변환의 정의로부터 변환 연산자의 규칙을 유도할 수 있으며, 미분변환의 적용 및 해석에 있어서 유용한 이러한 연산의 몇몇 예는 Table 1 에 목록화 되었다.

**Table 1** Examples of the differential transformation of the original function

Original function	T-function
$w(x) = y(x) \pm z(x)$	$W(k) = Y(k) \pm Z(k)$
$z(x) = \lambda y(x)$	$Z(k) = \lambda Y(k)$
$w(x) = \frac{d^n y(x)}{dx^n}$	$W(k) = P_{k+n} Y(k+n)$
$w(x) = y(x)z(x)$	$W(k) = \sum_{l=0}^k Y(l)Z(k-l)$
$w(x) = x^m$	$W(k) = \frac{P_k}{k!} x_0^{m-k}$
$w(x) = \sin(\lambda x)$	at $x_0 = 0$ $W(k) = \frac{\lambda^k}{k!} \sin\left(\frac{\pi k}{2}\right)$

특히,  $x_0=0$  이고 원시함수가  $w(x)=x^m$  이라면, 그 T 함수는 식 (4)와 같다.

$$W(k) = \delta(k-m) \quad \text{at } \begin{matrix} 1 & k=m \\ 0 & k \neq m \end{matrix} \quad (4)$$

여기서  $\delta$  는 크로넬케 델타(Kronecker delta)를 나타낸다.

실제 적용에 있어서,  $y(x)$  는 유한개의 항을 취하는 식 (5)에 의하여 근사 표현된다.

$$y(x) = \sum_{k=0}^n (x-x_0)^k Y(k) \quad (5)$$

여기서 n 은 해의 수렴도를 결정하는 자연수이다.

## 3. 썬기 보의 지배방정식

Fig. 1 은 완전한 썬기 보(complete wedge beam) 및 잘린 썬기 보(truncated wedge beam)의 직교 좌표계를 나타내었다. 그림에서  $x, y, z$  및  $X, Y, Z$  는 각각  $x, y, z$  축과  $x, y$  및  $z$  에 보의 길이( $l$ )로 나누어진 무

차원 좌표축을 나타낸다. 그리고  $O$  는 좌표계의 원점을 나타내며,  $\alpha$  는 잘림율을 나타낸다.  $x$  에 따른 단위길이당 질량( $m(x)$ )과 휨강성( $EI(x)$  : flexural rigidity)은 각각 식 (6), 식 (7)와 같다.

$$m(x) = \frac{x}{l} m(l) \quad (6)$$

$$EI(x) = \left(\frac{x}{l}\right)^3 EI(l) \quad (7)$$

굽힘 모멘트( $M(x)$ )와 전단응력( $Q(x)$ )는 Euler-Bernoulli 이론에 의해 유도된다.

$$M(x) = EI(x) \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \quad (8)$$

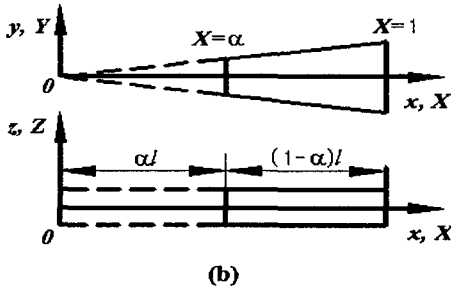
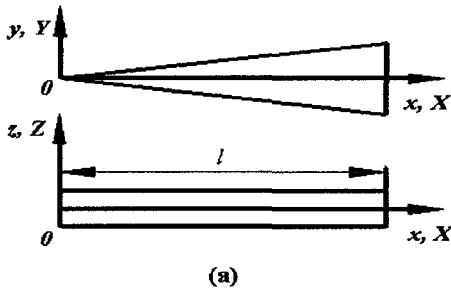


Fig. 1 The coordinate systems: (a) complete wedge beam, (b) truncated wedge beam

보의 요소에 회전과 병진을 고려하면 식 (9)와 식 (10)와 같이 나타난다.

$$Q(x) = -\frac{dM(x)}{dx} \quad (9)$$

$$\frac{dQ(x)}{dx} = -m(x)\omega^2 y(x) \quad (10)$$

여기서  $\omega$  는 고유진동수이다.

식 (11)과 같이 무차원 변수를 정의하고, 식 (8)과 식 (9)에 대입하여 정리하면 식 (12)와 식 (13)과 같다.

$$X = \frac{x}{l}, \quad Y(X) = \frac{y(x)}{l} \quad (11)$$

$$M(X) = \frac{M(x)l}{EI} = X^3 \frac{d^2 Y(X)}{dX^2} \quad (12)$$

$$Q(X) = \frac{Q(x)l^2}{EI(l)} = -\frac{d}{dX} \left( X^3 \frac{d^2 Y(X)}{dX^2} \right) \quad (13)$$

그리고 식 (11) ~ 식 (13)을 식 (10)에 대입하여 정리하면 식 (14)와 같은 지배방정식을 구할 수 있다.

$$\frac{d^2}{dX^2} \left( X^3 \frac{d^2 Y(X)}{dX^2} \right) - \mu XY(X) = 0 \quad (14)$$

여기서  $\mu$  는 진동수 파라미터를 나타내며 식 (15)과 같다.

$$\mu = \Omega^2 = \frac{m(l)\omega^2}{EI(l)} \quad (15)$$

식 (15)에서  $\Omega$  는 무차원 고유 진동수이고,  $EI(l)$  은  $x-y$  평면의 굽힘에 대한 큰 단의 휨강성이다.

그리고 식 (14)는 식 (16)과 같이 나타난다.

$$X^2 \frac{d^4 Y(X)}{dX^4} + 6X \frac{d^3 Y(X)}{dX^3} + 6 \frac{d^2 Y(X)}{dX^2} - \mu Y(X) = 0 \quad (16)$$

식 (16)의 무차원 지배방정식은 본 시스템이 특이문제(singularity problem)라는 것을 보여준다.

본 논문에서 고려된 네 가지 이상적인 경계조건들의 수학적 표현은 식 (17) ~ 식 (20)과 같이 표현된다.

고정단 : cl

$$Y(X) = \frac{dY(X)}{dX} = 0 \quad (17)$$

핀단 : pn  
 $Y(X) = M(X) = 0$  (18)

미끄럼단 : sl  
 $\frac{dY(X)}{dX} = Q(X) = 0$  (19)

자유단 : fr  
 $M(X) = Q(X) = 0$  (20)

#### 4. 미분변환법의 적용

원시함수에 대한 T 함수 연산을 나타낸 Table 1 을 사용하여 완전한 썩기 및 잘린 썩기 Euler-Bernoulli 보의 지배방정식 (16)의 미분변환을 취하면 식 (21)과 같은 순환관계식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} & \bar{X}_2(0)(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)\bar{Y}(k+4) \\ & + \sum_{l=1}^k \bar{X}_2(l)(k-l+1)(k-l+2)(k-l+3)(k-l+4)\bar{Y}(k-l+4) \\ & + 6 \times \sum_{l=0}^k \bar{X}_1(l)(k-l+1)(k-l+2)(k-l+3)\bar{Y}(k-l+3) \\ & + 6 \times (k+1)(k+2)\bar{Y}(k+2) - \mu\bar{Y} = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

여기서  $\bar{Y}$ ,  $\bar{X}_2$  및  $\bar{X}_1$ 은 각각  $Y(X)$ ,  $X^2$  및  $X$ 의 T 함수이다.

식 (21)을 다시 표현하면 식(22)와 같다.

$$\bar{Y}(k+4) = G(k, \bar{Y}(0), \bar{Y}(1), \bar{Y}(2), \bar{Y}(3)) \quad \text{for } k=0,1,2,\dots \quad (22)$$

식 (22)를 식 (3)에 대입하여 완전한 썩기 및 잘린 썩기 Euler-Bernoulli 보의 해 ( $Y(X)$ )를 구한 다음, 적절한 경계조건 식 (17) ~ (20)에 대입하여 정리하면 식 (23)과 같이 나타난다.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{Y}(0) \\ \bar{Y}(1) \\ \bar{Y}(2) \\ \bar{Y}(3) \end{Bmatrix} = 0 \quad (23)$$

식 (23)에서  $a_{i,j}$ 는 진동수 파라미터  $\mu$  및 잘

림을  $\alpha$ 의 함수이며  $i, j=1,2,3,4$ 이다. 또한 식 (23)이 무영근을 가지지 않기 위해서 계수 행렬의 행렬 값이 0이라는 식 (24)을 만족하여야 한다.

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & a_{1,4} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & a_{2,4} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} \\ a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} & a_{4,4} \end{vmatrix} = 0 \quad (24)$$

#### 5. 수치적 결과

본 논문에서는 미분변환법은 해의 급수 중심 ( $x_0$ )이 0.5를 사용하였으며, 특이성을 가지는 완전한 썩기 및 잘린 썩기 Euler-Bernoulli 보의 수치해석을 수행하였다. 그리고 모든 계산은 Maple 9.01을 사용하여 계산되었다.

Table 2에는 완전한 Euler-Bernoulli 보의 처음 네 무차원 진동수( $\Omega$ )를 소수점 이하 7 자리까지 정도로 미분변환법을 사용하여 계산하여 참고문헌(13)과 비교되었다. Table 2에서 cl, pn, sl 그리고 fr은 각각 고정단, 핀단, 미끄럼단 그리고 자유단 경계조건을 나타낸다. 그 결과는 선행 연구 결과와 잘 일치함을 알 수 있다.

Table 3과 Table 4는 각각 cl-cl, cl-pn, cl-sl 및 cl-fr인 경계조건의 조합과 잘림율이 0.5, 0.6, 0.7에서 잘린 썩기 Euler-Bernoulli 보의 무차원 진동수가 참고문헌(13)의 결과와 비교되었다. 표에서 잘림율( $\alpha$ )가 0.7일 때 표시 xx.xxxx는 선행연구에서 충분히 수렴된 결과를 얻지 못한 것을 나타낸다. 충분한 정도로 계산된 선행연구의 결과(Ref. 13)와 미분변환법을 사용한 본 연구에서의 결과는 잘 일치함을 보이고, 선행연구에 충분한 정도로 계산되지 못한 값도 본 연구에서는 충분한 정도로 구할 수 있었다.

Table 5의 결과는 각각 cl-cl, cl-pn, cl-sl 및 cl-fr인 경계조건에서 잘림율이 0.8 및 0.9에서 잘린 썩기 Euler-Bernoulli 보의 무차원 진동수를 나타내었다. 선행연구(Ref. 13)에서 빠져 있으나, 본 연구에서 미분변환법을 사용해서 충분한 정도의 수렴된 값을 얻어 잘림율이 0.8 및 0.9에서의 선행연구의 Table을 완성하였다.

**Table 2** The first four dimensionless frequencies of complete wedge beam

		Ref.(13)	DTM
fr-cl	1 st	5.315099	5.3150994
	2 nd	15.207168	15.2071680
	3 rd	30.019809	30.0198091
	4 th	49.763345	49.7633447
fr-pn	1 st	10.902362	10.9023622
	2 nd	24.631377	24.6313772
	3 rd	43.204752	43.2047519
	4 th	66.683114	66.6831144
fr-sl	1 st	6.593654	6.5936541
	2 nd	17.712500	17.7124997
	3 rd	33.755177	33.7551772
	4 th	54.730047	54.7300473
fr-fr	1 st	12.757509	12.7575089
	2 nd	27.755353	27.7553530
	3 rd	47.575945	47.5759449
	4 th	72.294973	72.2949734

**Table 3** The first three dimensionless frequencies for cl-cl and cl-pn wedg beams

$\alpha$		cl-cl		cl-pn	
		Ref.(13)	DTM	Ref.(13)	DTM
0.5	1st	16.3356	16.33557	10.1833	10.18330
	2nd	44.9806	44.98063	35.5240	35.52399
	3rd	88.1386	88.13826	75.1005	75.10055
0.6	1st	17.6354	17.63542	11.2976	11.29763
	2nd	48.5839	48.58357	38.6104	38.61041
	3rd	xx.xxxx	95.21860	xx.xxxx	81.36422
0.7	1st	18.8791	18.87907	12.3708	12.37084
	2nd	xx.xxxx	52.02553	xx.xxxx	41.57594
	3rd	xx.xxxx	101.9779	xx.xxxx	87.36306

**Table 4** The first three dimensionless frequencies for cl-sl and cl-fr wedge beams

$\alpha$		cl-sl		cl-fr	
		Ref.(13)	DTM	Ref.(13)	DTM
0.5	1st	3.4717	3.47170	1.6380	1.63798
	2nd	21.4272	21.42716	14.1101	14.11014
	3rd	53.7625	53.79253	43.2086	43.20865
0.6	1st	3.8985	3.89848	1.9993	1.99932
	2nd	23.2917	23.29174	15.7694	15.76936
	3rd	58.2856	58.26276	47.1322	47.13158
0.7	1st	4.3227	4.32272	2.3685	2.36850
	2nd	25.0929	25.09150	17.3820	17.38195
	3rd	xx.xxxx	62.54877	xx.xxxx	50.91605

**Table 5** The first three dimensionless frequencies for cl-cl, cl-pn, cl-sl and cl-fr wedge beams by using DTM

$\alpha$		cl-cl	cl-pn	cl-sl	cl-fr
0.8	1st	20.07821	13.41161	4.74601	2.74476
	2nd	55.33995	44.44592	26.84090	18.95898
	3rd	108.4828	93.15269	66.68989	54.59218
0.9	1st	21.24098	14.42595	5.16934	3.12744
	2nd	58.55005	47.23796	28.54993	20.50801
	3rd	114.7802	98.77171	70.71332	58.18086

## 6. 결론

본 논문에서는 완전하거나 잘린 Euler-Bernoulli 썩기 보에 대하여 미분변환법을 사용하여 진동 해석을 수행하였다. 특이성(regular singularity)을 가지는 완전하거나 잘린 Euler-Bernoulli 썩기 보에 지배 미분방정식을 유도하고, 수치적 계산을 수행한 결과들은 다음과 같다.

1. 해의 급수 중심( $x_0$ )이 0.5 를 사용하여 특이성을 가지는 Euler-Bernoulli 썩기 보의 수치 해석을 수행하였다.
2. 완전한 Euler-Bernoulli 보의 무차원 진동수는 참고문헌(13)과 잘 일치한다.
3. 참고문헌(13)에서 충분한 정도로 계산되지 못한 값도 본 연구에서는 충분한 정도로 구할 수 있었다.
4. 참고문헌(13)에서 빠져있는 잘림율이 0.8 및 0.9 에서의 Table 을 완성하였다.
5. 미분변환법(DTM)은 유한요소법(FEM), 유한차분법(FDM) 및 Frobenius 법에 대하여 추가적으로 미분방정식을 풀기 위한 또 다른 방법으로 사용할 수 있다.

## 참고문헌

- (1) Todhunter, I. and Pearson, K., 1960, A history of the theory of elasticity and of the strength of materials, 2(2) 92-98. New York:Dover(reprint of 1893 publication of Cambridge University Press)
- (2) Ward, P. F., 1913, "Transverse vibration of a rod of varying cross section", Philosophical Magazine (series 6), 46, pp. 85-106.

- (3) Nicholson, J. W., 1920, "The lateral vibration of sharply pointed bars", *Proceedings of the Royal Society of London (series A)*, 97, pp. 172-181.
- (4) Wrinch, D.M., 1992, "On the lateral vibration of bars of conical type", *Proceedings of the Royal Society of London (series A)*, 101, pp. 493-508.
- (5) Conway, H. D. and Dobil, J. F., 1965, "Vibration frequencies of truncated cone and wedge beams", *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics (series E)*, 32, pp. 923-925.
- (6) Lee, T. W., 1976, "Transverse vibrations of a tapered beam carrying a concentrated mass", *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics (series E)*, 43, pp. 366-367.
- (7) Goel, R. P., 1976, "Transverse vibration of taper beams", *Journal of Sound and Vibration* 47, pp. 1-7.
- (8) Yang, K. Y., 1990, "The natural frequencies of a non-uniform beam with a tip mass and with translational and rotational springs", *Journal of Sound and Vibration*, 137, pp. 339-341.
- (9) Sanger, D. J., 1986, "Transverse vibration of a class of non-uniform beams", *Journal of Mechanical Engineering Science*, 16, pp. 111-120.
- (10) Wang, H. C., 1997, "Generalized hypergeometric function solutions on the transverse vibrations of a class of non-uniform beams", *Transactions of the American Society of Mechanical Engineers, Journal of Applied Mechanics (series E)*, 34, pp. 702-708.
- (11) Naguleswaran, S., 1992, "Vibration on an Euler-Bernoulli beam of constant depth and with linearly varying breadth", *Journal of Sound and Vibration*, 153, pp. 509-522.
- (12) Naguleswaran, S., 1994, "Vibration in the two principal planes of a non-uniform beam of rectangular cross-section, one side of which varies as the square root of the axial co-ordinate", *Journal of Sound and Vibration*, 172, pp. 305-319.
- (13) Naguleswaran, S., 1994, "A direct solution for the transverse vibration of Euler-Bernoulli wedge and cone beams", *Journal of Sound and Vibration*, 172(3), pp. 289-304.
- (14) Zhou, J. K., 1986, "Differential transformation and its application for electrical circuits", Huazhong University Press, Wuhan China (in Chinese).
- (15) Malik, M. and Dang, H. H., 1998, "Vibration analysis of continuous systems by differential transformation", *Applied Mathematics and Computation*, 96, pp. 17-26.
- (16) Chen, C. K. and Ho, S. H., 1996, "Application of differential transformation to eigenvalue problems", *Applied Mathematics and Computation*, 79, pp. 173-188.
- (17) Shin, Y. J., Jaun, S. J., Yun, J. H., Dioyan, N. M., Hwang, K. S. and Jy, Y. C., 2004, "Vibration analysis for the circular plates by using the differential transformation method", *Eleventh International Congress on Sound and Vibration (2004)*, pp. 3723-3732.