

양자화된 진동신호를 이용한 모델기반 고장진단

Model-based Fault Diagnosis Using Quantized Vibration Signals

김도현* · 최연선**

Do-Hyun Kim and Yeon-Sun Choi

Key Words : 모델기반 고장진단(model-based fault diagnosis), 연속변수 시스템(continuous variable system), 양자화 시스템(quantized system), 정성적 진단법(qualitative diagnosis), 거동반응(automaton)

ABSTRACT

Knowledge based fault diagnosis has a limitation in determining the cause and scheme for the fault, because it detects faults from signal pattern only. Therefore, model-based fault diagnosis is requested to determine the fault by analyzing output of the equipment from its dynamic model. This research shows a method how to devise the automaton of system as a model for normal and faulty condition through the reduction of handling data by quantization of vibration signals and the example which is concerning to the bearing of ATM. The developed model based fault diagnosis was applied to detect the faulty bearing of ATM, which showed highly satisfactory results.

1. 서 론

기계에 이상이 있으면 먼저 진동과 소음이 발생하고 고장의 형태에 따라 그 파형이 달라지므로 진동, 소음 신호에 대한 분석할 수 있다면 정확한 진단이 가능하다. 그러나 신호 파형의 단순 신호처리에 의한 지식기반(knowledge based) 고장진단은 신호패턴 분류에 따른 고장여부만을 판단하는 것으로써 고장의 원인과 대처 방안을 마련하기에는 한계가 있다. 따라서 시스템의 모델을 바탕으로 측정기의 출력 신호와 수립된 모델의 결과 사이를 분석하여 설비의 고장을 진단하는 모델기반 고장진단(model-based fault diagnosis) 기술의 개발이 요구된다.

Lunze^{[1][2]}는 거동반응(automata)이론을 정성적 모델(qualitative modeling) 기법에 적용하여 하이브리드 동적 시스템의 거동에 대한 연구를 수행하였으며, 실제 하이브리드 시스템인 물탱크에 대해 이산화 기법을 통한 거동예측과 감시 기법을 제안하고 연속계에 대한 정량적 거동해석과 일치함을 논하였으며, Venkatasubramanian^[3]는 고장진단에 정성적 모델 적용을 함에 있어 causal model과 abstraction hierarchies 기법의 장, 단점에 대한 연구를 수행하였다.

Gradisek^[4]은 절삭공구와 레이저 용접기의 측정 데이터에 확률적 기법을 이용하여 정량적, 정성적 분석 방법을 연구하였다.

본 연구에서는 모델기반 고장진단(model-based fault diagnosis)기술에 기반을 둔 연속변수시스템의 입력과 출력 신호의 양자화(quantized) 변환을 통한 설비의 고장을 진단하는 정성적 모델 진단법(qualitative modeling diagnosis)을 개발하여 베어링의 고장 진단에 적용하였다. 이를 위해 거동반응 이론을 이용한 정성적 모델 기법을 진동신호에 적용하여 진동 레벨에 대한 양자화를 통해, 정상, 결함 베어링의 확률적 거동 모델인 거동반응식 도출하고, 베어링의 진동 레벨의 정성적인 진행을 분석하여 정상과 결함의 확률을 표현하여 ATM기의 베어링의 고장 진단을 실시하였다.

2. 정성적 모델을 이용한 고장진단

2.1 모델기반 정성적 고장진단

모델기반 고장진단은 센서의 출력 신호와 수립 모델의 거동 결과로 시스템의 모델을 표시하여 설비의 고장을 진단하며, 연속변수 의해 결정되는 동적시스템의 고장 진단에 사용

* 정회원, 성균관 대학교 기계공학과 대학원

** 책임저자, 정회원, 성균관 대학교 기계공학과

E-mail : yschoi@yurim.skku.ac.kr

Tel : (031)290-7440, Fax : (031)290-5849

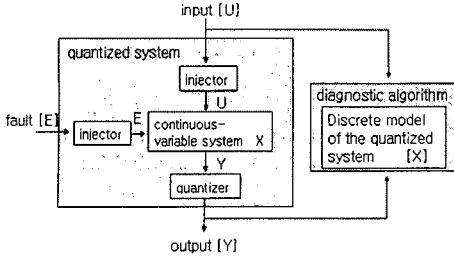


Fig. 1 Qualitative diagnosis system

된다. 그러나 실질적으로는 감시되는 설비는 연속변수로서 방대한 양의 데이터가 된다. 따라서 신호의 량을 줄이기 위해서는 연속 변수를 이산화 변수로 바꾸는 양자화 과정이 필요하며, 정상과 고장의 경우 각각에 대한 이산 신호 상태 방정식을 유도하고 이를 바탕으로 고장 진단을 해야 한다.

2.2 양자화 시스템

Fig. 1은 연속 변수 시스템의 양자화를 통한 고장진단의 일련 과정을 나타내며, 연속 시스템은 이산화 상태 모델에 의해 식 (1)과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{aligned} X(k+1) &= g(X(k), U(k), E(k)), \quad X(0) = x_0 \\ Y(k+1) &= h(X(k), U(k), E(k)) \end{aligned} \quad (1)$$

$X(k)$ 는 상태, $U(k)$ 는 입력, $E(k)$ 는 결함, $Y(k)$ 는 출력을 나타내며, 투입기(injector)에 의해 정성적 입력 $[U(k)]$ 와 $[E(k)]$ 는 실제치 $U(k)$, $E(k)$ 로 변환된다. 출력에 관한 정성적 정보를 주는 양자기(quantizer)에 의해 오직 시스템의 출력 $Y(k)$ 만이 측정되며, 이 출력치는 출력 상태를 나타내는 유한한 정수로 표현되어 출력상태공간은 $N_y = \{0, 1, 2, \dots, R\}$ 과 같다. 유사한 방법으로 입력과 결함에 대해 $N_u = \{0, 1, 2, \dots, M\}$, $N_f = \{0, 1, 2, \dots, S\}$ 의 상태공간이 표현할 수 있다. 양자화 시스템의 거동은 정성적 입력, 결함, 출력에 대해 식 (2)와 같이 나타낸다.

$$\begin{aligned} [U(0..T)] &= ([U(0), [U(1)], \dots, [U(T)]] \\ [E(0..T)] &= ([E(0), [E(1)], \dots, [E(T)]] \\ [Y(0..T)] &= ([Y(0), [Y(1)], \dots, [Y(T)]] \end{aligned} \quad (2)$$

확률적 거동반응은 양자화 시스템의 동적 특성을 확률적으로 정의하여 표시한 정성적 모델로서 S는 거동반응을 의미한다.

$$S(N_z, N_w, N_f, N_u, L)$$

거동 관계(behavior relation) L은 식 (3)과 같고 Prob는 확률을 의미한다.

$$L: N_z \times N_w \times N_z \times N_u \rightarrow [0, 1]$$

$$\begin{aligned} L(z', w | z, v) &= \text{Prob}(z', w | z, v) \\ z', z \in N_z, w \in N_w, v \in N_u \end{aligned} \quad (3)$$

또한 시스템에 결함이 발생한 경우는 식 (4)와 같다.

$$L: N_z \times N_w \times N_z \times N_u \times N_f \rightarrow [0, 1]$$

$$\begin{aligned} L(z', w | z, v, f) &= \text{Prob}(z', w | z, v, f) \\ z', z \in N_z, w \in N_w, v \in N_u, f \in N_f \end{aligned} \quad (4)$$

2.3 진동 신호에 대한 양자화 시스템

시스템의 진동을 측정하면 시간과 진폭에 대해 연속적인 값을 얻는다. 시스템을 양자화하기 위해 시스템의 입, 출력 값에 대해 일정 구간을 나누어 각 구간을 정하고 측정값이 그 구간내의 값에 속하면, 그 값들을 동일 상태 공간에 있는 것으로 정의한다. 예를 들어, 연속적인 가속도 신호를 일정한 시간별로 그에 해당하는 일정량의 데이터로 이산화 하여 RMS 값을 구하고, 이산화에 따른 진행되는 시간을 k 라고 하면 입, 출력 값은 $U(t)$, $Y(t)$ 에서 $U(k)$, $Y(k)$ 로 표현할 수 있다. 또한 가속도의 연속적인 RMS 값의 변화치를 일정 구간별로 정의하여 상태를 정의하여 $U(k)$, $Y(k)$ 를 다시 정성적 입력 $[U(k)]$ 와 $[Y(k)]$ 로 표현되면 각 값들은 상태공간을 표시하는 값으로 1, 2, 3과 같은 자연수가 된다. 이 때, 이산화 시간을 통해 처리 데이터의 개수를 줄일 수 있으며, 이산화 시 데이터 단위의 적절한 결정을 통해 신호의 변동 특성을 유지하면서 데이터 처리시간을 줄일 수 있다. 재이산 시간이 지나치게 길면 데이터 처리 개수는 줄어들지만 이산 시간 마다의 해당 RMS 값의 편차가 줄어들어 신호의 변화를 나타내기가 어려워지며, 이산시간이 필요이상으로 짧아지면, 데이터의 변동을 나타내기는 쉽지만, 데이터의 증가로 이산화의 의미가 없어진다.

대상 시스템을 작동 중 RPM의 변화 등 입력의 변화가 없다고 가정하면, $[U(k)]$ 는 항상 1이 되며, 출력을 이산시간별 RMS 값이라고 가정하고, $[Y(k)]$ 는 정의한 출력 상태공간 만큼의 수를 갖는다. 또한 정상 경우는 $[E(k)]=0$, 결함 경우는 $[E(k)]=1$ 로 표현할 수 있다.

2.3 양자화 시스템을 이용한 고장진단 알고리즘

Fig. 2는 진동신호로부터 거동관계를 얻는 일련의 과정으로 시스템의 연속 변수들의 양자화를 이용한 시스템의 상태 거동을 확률적으로 나타내는 거동반응을 구하는 과정이다. 예를 들어 일정 시간별 RMS 값을 4구간으로 나누어 4가지의 상태를 정의하면 z 에서 z' , 즉 이전상태에서 다음 상태로

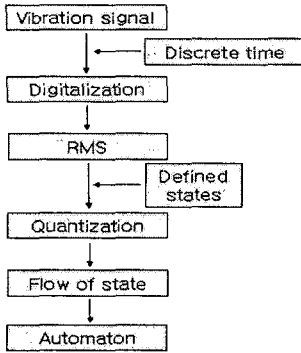


Fig. 2. Process of automaton acquisition from vibration signal

갈 수 있는 경우의 수는 16개가 된다. 일정 측정시간 동안의 이전상태와 다음 상태의 이동 확률을 표현하면, 확률 분포(probability distribution)를 얻을 수 있다. 만약 100개의 상태변화 중 1에서 1로 10회의 상태 변화가 일어났다면, 이때 상태 1에서 상태 1로의 확률 분포는 0.1의 값을 갖는다. 이와 같이 나머지 15개의 상태 변화의 횟수에 의해 각각의 확률 분포값을 갖으며, 각 상태별 확률 분포의 총합은 '1'이다. 또한 이전 상태 1에서 다음 상태 1~4까지의 확률 분포값이 0.1, 0.15, 0.2, 0.05라고 하면 동일 이전상태의 확률 분포의 총합은 0.5가 되며 각 확률 분포와 총합 0.5의 각각의 비는 0.2, 0.3, 0.4, 0.1이 되며 각각의 값을 거동 관계라고 정의한다. 이 거동 관계는 시스템의 거동반응이 되며, 이 거동반응을 통해 시스템의 거동 특성을 예측할 수 있으며, 시스템의 모델로 사용할 수 있다. 시스템 거동반응을 얻기 위해 시스템의 진동 측정 시 얼마동안의 측정시간을 기준으로 하느냐에 따라 거동반응의 값이 약간 달라질 수 있기 때문에, 서로 다른 시간동안의 반복측정을 통해 계속적으로 거동반응의 값의 편차를 비교하여 편차가 더 이상 작아지지 않는 측정시간을 찾는 것이 중요하다. 또한 정상과 결함에 대해 측정된 데이터를 통해 정상과 결함의 거동 특성을 표현하는 거동반응을 각각 획득할 수 있다. 획득된 정상과 결함의 거동반응을 이용한 고장 진단 알고리즘은 Table. 1과 같다. 입력은 항상 일정하므로 알고리즘을 간략화하기 위해 고려 대상에서 제할 수 있으며, 출력과 시스템의 상태를 동일하게 간주하여, 고장진단 알고리즘을 제시하였다.

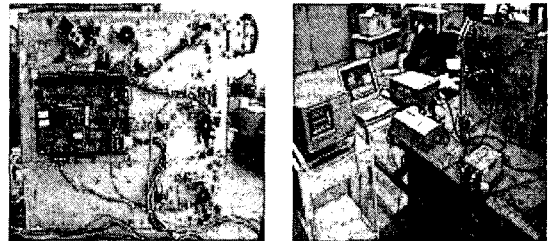
3. ATM기 베어링 고장 진단

3.1 베어링 진동 실험

정상과 결함 베어링의 진동 측정 실험에 사용된 ATM기는 Fig. 3 (a)와 같다. 실험장치는 Fig. 3 (b)와 같고, 구동 모터의 회전속도는 2530 RPM이며 사용된 베어링의 설계인자는 Table 2와 같다. 사용한 장비들은 Table 3에 나타내었다.

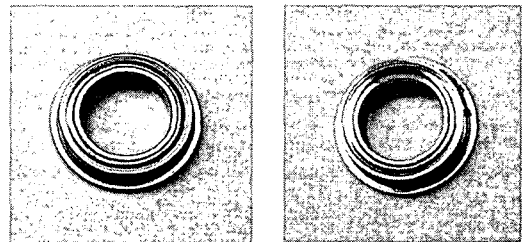
Table 1 Process Algorithm of diagnosis of stochastic automata

<p>Given: Stochastic automaton S and fault model automaton S_f Initialization: $\text{Prob}(f(0) 0) = 0.5$ Loop: 1. Measure the current output w 2. For all $f \in N_f$ and $z \in N_z$ determine $h(f, z) = \sum_{f', z'} L(z', w z, f) \cdot p_r(f, z')$ 3. If $\sum_{f, z} h(f, z) = 0$ holds, stop the algorithm 4. For all $f \in N_f$ and $z \in N_z$ determine $p_k(f, z) = \frac{h(f, z)}{\sum_{f, z} h(f, z)}$ 5. For $f \in N_f$ and $z \in N_z$ determine $P_r(f, z) = \frac{\sum_{f', z'} L(z', w z, f) \cdot p_r(f', z')}{\sum_{f, z} h(f, z)}$ 6. Determine $\text{Prob}(f(k_h) = f k_h) = \sum_z p_k(f, z)$ 7. $k_h := k_h + 1$ Continue with step 1. Result: $\text{Prob}(f(k_h) = f k_h)$ for increasing time horizon k_h</p>



(a) ATM (b) Experimental set-up

Fig. 3 Photo of apparatus



(a) normal (b) faulty bearing

Fig. 4 Photo of bearings

베어링의 기계적 고장은 대개 피로, 마모 또는 소성변형 등에 의해 발생한다.^[5] 따라서 본 연구에서는 Fig. 4와 같이 정상 베어링과 측면에 하중을 가하여 베어링 하우스 케이스 결함을 가진 각 베어링이 장착된 경우에 대하여 Fig. 3 (a)

Table 2 Design parameters of the bearing

Type	Pitch diameter(mm)	Number of Ball	Ball diameter(mm)
SSL-1280	19,906	11	0.047

Table 3 Specification of the experimental apparatus

Instrument	Model	Maker
Accelerometer	Type 4393	B&K
Charge Amplifier	2635	B&K
A/D Board	Wavebook	IO-tech

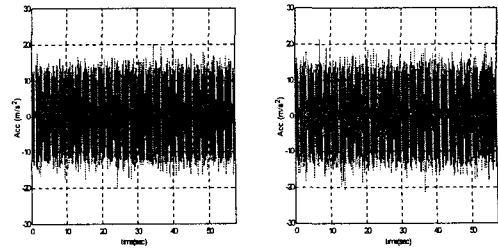
의 ATM기의 베어링 부위에 가속도계를 부착하여 진동신호를 측정하였고, A/D Board를 통과한 신호를 컴퓨터에 저장한 후, 상용 프로그램인 MATLAB⁶⁾을 이용하여 분석하였다.

3.2 실험 결과

샘플링 주파수를 10 kHz로 정상, 25회 반복 작동 총 57.5 초 간 진동 신호를 측정하였다. Fig. 5는 정상, 결함 베어링 진동 신호이다. 정상, 결함 베어링의 가속도 RMS 값은 각각 $3.61m/s^2$, $3.71m/s^2$ 이다. 결함 발생시 진동레벨이 약간 높아진 것을 확인할 수 있으나, 두 값이 차이가 근소하여 정상, 결함 여부를 판단하기에는 불가능하다. 또한, ATM기의 베어링 부위뿐만 아니라, 모터, 기어 등 각종 부품의 진동 신호가 혼재되어 구별이 쉽지 않기 때문에, 측정된 가속도 데이터만으로는 베어링의 결함을 판단하는데 한계가 있다.

3.3 베어링 신호에 대한 정성적 모델링

재 이산시간 0.04, 0.02, 0.01초로 하여 정상과 결함 베어링에 대해 RMS 값의 분포를 표시하면 Table 4와 같다. 재 이산시간 길어질수록 각 상태의 분포에 대한 표준 편차가 커진다. 이는 각 상태별 분포도가 낮다는 의미로, 재 이산시간을 필요이상으로 길게 하면 신호 레벨표현에 있어 신뢰도가 떨어진다. 진동 레벨의 양자화를 실시하기 위해, 각 state를 정상과 결함 베어링의 진동 레벨에 따른 분포를 구하여 가장 많은 분포를 보이는 레벨을 중심으로 4등분 하여, 중간 2구간의 해당 분포가 70%가 되도록 진동 레벨의 RMS 값에 따라 0~3.2, 3.2~3.7, 3.7~4.1, 4.1 이상 각 4 구간으로 나누어지며, 각 구간을 state 1부터 state 4로 정의한다. 재 이산시간이 0.04초일 때, 결함 베어링의 경우 state 4에 대한 분포가 작아 신호의 레벨 변동 특성을 표현하기에 부족하다. 재 이산시간이 짧을 수록 상태의 분포에 대한 표준

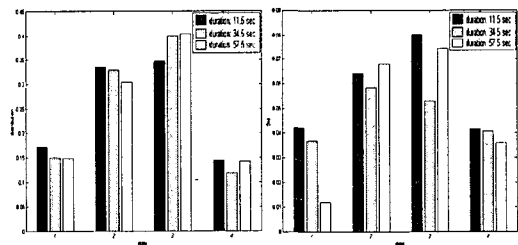


(a) Normal (b) Faulty bearing

Fig. 5 Bearing vibration

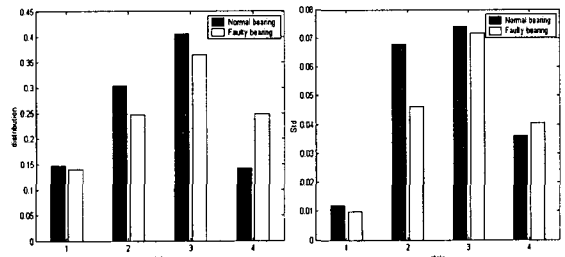
Table 4 State probability distributions according to sampling time

Sampling time	Normal bearing			Faulty bearing		
	0.04	0.02	0.01	0.04	0.02	0.01
State 1	0.1351	0.1465	0.2348	0.1274	0.1381	0.1901
State 2	0.2981	0.3239	0.3223	0.1010	0.2613	0.2322
State 3	0.5035	0.4325	0.3007	0.5265	0.3417	0.3021
State 4	0.0634	0.0971	0.1421	0.2451	0.2589	0.2755
Std.	0.1954	0.1558	0.0810	0.1947	0.0839	0.0492



(a) Distribution (b) Standard deviation

Fig. 6 Distribution and Standard deviation of the state depending on the operating time



(a) Distribution (b) Standard deviation

Fig. 7 Distribution and Standard deviation of the state depending on the bearing condition

편차가 작아지며, 각 상태별 분포도가 높아 신호 특성을 구분하기 용이하나, 데이터 처리시간이 길어진다. 본 연구에서는 재 이산시간을 0.02초로 정하였다. 측정시간 결정을 위하여 ATM기를 연속 5회(11.5초), 15회(34.5초), 25회(57.5초) 작동시킨 각 경우에 대해 총 5회 반복 실험을 실시하여 상태별 분포와 표준편차를 구하면 Fig. 6과 같다. 측정시간 11.5초일 때 반복 실험 데이터는 중간값을 기준으로 15% 분포를 갖으며, 34.5초, 57.5초일 때 표준편차의 차이가 거의 없어 측정시간을 더 이상 늘이는 것은 데이터 처리량의 증가만을 가져와, 본 연구에서는 1회 측정 시간을 57.5초로 정하였다. 또한, 반복측정에 따른 독립성을 확인하기 위해서 57.5초 동안의 진동신호를 정상과 결함이 있는 베어링 각각에 대해, 각각 5회 씩 측정하여 정상과 결함 경우에 대해 state별 분포도는 Fig. 7과 같다. 각 state 별 분포도는 11~12%의 분포를 보인다. 따라서 정상, 결함 베어링의 반복 측정에 따른 각 진동 레벨의 분포는 88~89%의 유사성을 갖는다고 할 수 있다. 각 상태 변화 횟수를 전체 상태변화 횟수로 나누어 분포를 구하여 상태 변화와 확률을 행렬 형태로 표현하여 정상, 결함 베어링에 따른 행렬을 확률 분포라 한다. 또한 동일한 상태에서 다음 상태로 이동하는 경우에 대하여 확률 분포의 비를 계산하여 얻은 행렬을 거동 관계, 즉 L로 정의하며, 정상의 경우를 L_{normal}, 결함의 경우를 L_{fault}라고 표현하며, 이를 거동 반응으로 표현하면 Fig. 8과 같다. 거동 관계는 모델 기반 고장진단 기법에서 수학적 모델링을 대신하여 시스템 거동을 확률적으로 정의하는 모델이다. 따라서 정의된 거동 관계를 바탕으로 모델을 수립하여 측정된 센서의 신호를 정량적으로 변환하여 비교함으로써 모델 기반 고장진단을 수행한다. 거동 관계의 신뢰도를 얻기 위해, 57.5초 동안의 진동신호를 정상과 결함이 있는 베어링 각각에 대해, 각 5회 측정하여 정상, 결함 경우에 대해 5개의 거동 관계행렬인 L을 구하였다. (a)의 경우, 정상의 베어링에 대한 5회 진동 측정으로부터의 거동 관계의 각 값들은 10%이내의 분포를 보인다. 또한 (b)의 경우는 결함의 베어링에 대한 5회 진동측정으로부터 거동 관계의 각 값들은 6%이내의 분포를 보이는 값으로 정상, 결함 베어링의 반복 측정에 따른 각 거동 관계는 약 90~94%의 유사성을 갖는다고 할 수 있다.

3.4 베어링 신호에 대한 정성적 고장 진단

L_{normal}과 L_{fault}는 정상과 결함시의 거동 관계로서, 거동 특성을 확률적으로 나타내는 것이다. 각 경우에 대하여 거동관계를 구하면 시스템의 확률적 거동을 예측할 수 있다. Fig. 9는 정상, 결함을 확인하기 위하여 1초간 측정된 베어링의 진동 신호이다. 두 가지 베어링 신호를 0.02초 간격으로 이산화 하여 1초 동안의 50회 의 RMS 값의 변화를 이산화 시간에 따른 양자화 흐름으로 나타내면 Fig. 10과 같

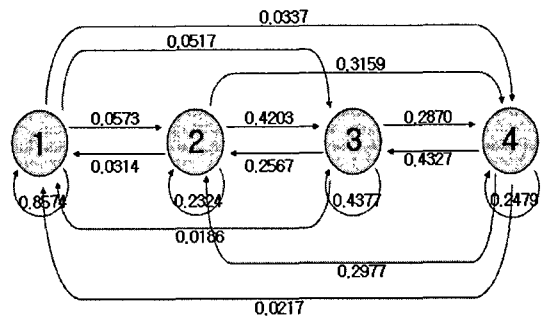
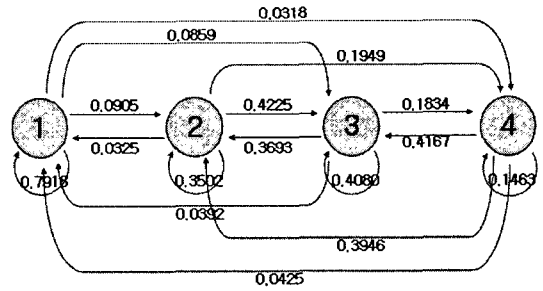
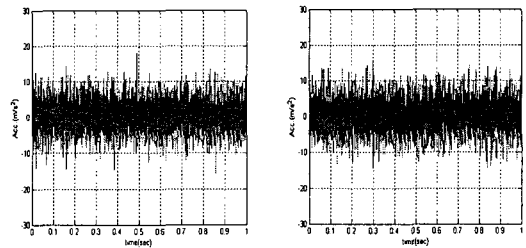
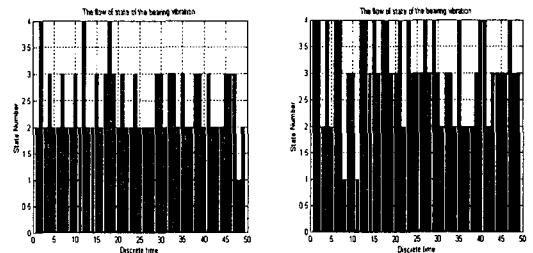


Fig. 8 Automata of bearings



(a) Bearing 1 (b) Bearing 2

Fig. 9 Bearing vibration



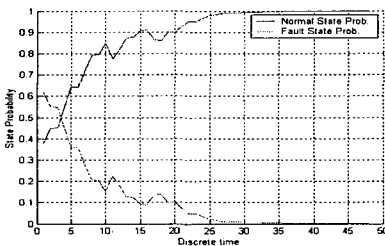
(a) Bearing 1 (b) Bearing 2

Fig. 10 Bearing vibration

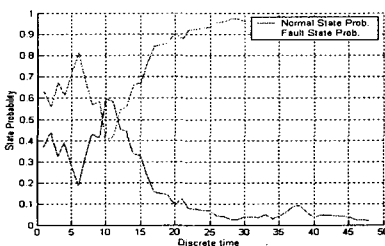
다. Fig. 11 (a)는 K가 1~51의 진행에 따라 양자화된 state의 변화에 따라 이산시간 K가 50 step진행되었을 때 임의의 베어링이 정상일 확률은 '1'로, 결함이 있는 베어링일 확률은 '0'으로 수렴함을 나타낸다. 최초 K가 1일 때, 정상과 결함일 확률은 각 0.5이며, state(1)=2이며, state(2)=4이므로 정상과 결함이 있는 거동 시 구한 거동 관계의 각 확률은 L_normal과 L_fault를 통해 각 0.1949, 0.3159임을 알 수 있고, 정상과 결함 시 상태 확률(state probability)에 각 확률 값을 곱하여, 정상 확률(normal probability)과 고장 확률(fault probability)을 각 0.0974, 0.1580으로 구할 수 있으며, 정상 확률과 고장 확률의 상호간의 각 각의 비율은 다음 단계의 상태 확률로서 K가 2일 때 각 각 0.3816와 0.6184의 값을 갖는다.

위와 같이 K=2,...,51까지의 이산시간 증가에 따른 연속적인 연산을 통하여 정상과 결함의 상태 확률을 구할 수 있고, 측정 베어링의 진동신호는 정상일 확률이 '1'로 수렴하는 것을 알 수 있다.

Fig. 11 (b)는 최초 K가 1일 때, 정상, 결함 확률은 각 0.5이며, 위와 같은 방식으로 K=1,...,51까지의 연속적인 연산을 통하면 K가 1부터 51까지 진행됨에 따라 정상과 결함 경우의 상태확률을 구할 수 있고, 결국 측정 베어링의 진동신호는 고장일 확률이 '1'로 수렴하는 것을 알 수 있다.



(a) Bearing 1



(b) Bearing 2

Fig. 11 State probability according to state flow

4. 결론

모델기반 고장진단 기술에 기반 한 연속변수시스템의 신호를 양자화 시스템 변환을 통한 설비의 고장을 진단하는 정성적 진단법을 제안하였다. 이를 위해 진동 신호를 RMS 값의 크기를 구간별로 나누어 각 상태를 정의하였다. 진동 신호를 정성적인 상태로 정의하여 양자화하고 시간을 관심 간격으로 이산화 하여 정상, 결함 베어링의 확률 거동의 특성을 규정하는 거동관계를 찾아내는 방법을 적용하였다. 또한 ATM기의 베어링의 진동 측정을 통해 획득된 데이터의 시간에 대한 이산화와 레벨에 대한 양자화를 통해, 정상과 결함 베어링의 각 각의 거동관계를 획득하고, 이산시간의 경과에 따른 베어링의 진동 레벨의 정성적인 진행만을 분석, 거동반응을 이용하여 고장 여부에 따라 정상, 결함 확률이 1에 수렴하는 것을 예시하였다.

참고 문헌

- (1) J. Lunze, 1998, "Qualitative modeling of dynamical system Motivation, methods, and prospective applications," *Mathematics and Computers in Simulation*, Vol. 4, pp. 465-483.
- (2) J. Lunze, B. Nixdorf, H. Richter, 2001, "Process supervision by means of a hybrid model," *Journal of Process Control*, Vol. 11, pp. 89-104
- (3) V. Venkatasubramanian, R. Rengaswamy, S. Kavuri, 2003, "A review of process fault detection and diagnosis Part II: Qualitative models and search strategies," *Computers and Chemical Engineering*, Vol. 27, pp. 313-326
- (4) J. Gradisek, I. Grabec, 2002, "Qualitative and quantitative analysis of stochastic processes based on measured data, I,II: Theory and applications to synthetic data," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 252, No. 3, pp. 545-562, 564-572
- (5) H. R. Martin, 1992, "Detection of Gear Damage by Statistical Vibration Analysis," *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers*, pp. 395-401.
- (6) Using Matlab version 6,1 The Math Works, Inc. 2001.