

Zener 모델을 사용한 동흡진기 특성 연구

A Study on Dynamic Vibration Absorber Using Zener's Model

오일권* · 임승현*

Il-Kwon Oh and Seung-Hyun Lim

Key Words : Zener's Model(제너모델), Dynamic Vibration Absorber(동흡진기), Tuned Mass Damper(동조질량감쇠기)

ABSTRACT

A dynamic vibration absorber using the Zener's model has been taken into account with respect to frequency response characteristics. The concept of the tuned mass damper with a single degree of freedom has been well applied for many industrial fields, because many researchers have extensively studied various basic characteristics, performance and optimization methods for long time. The Zener's model has an additional spring, which is connected between a damper and a mass, while the tuned mass damper with a single degree of freedom consists of a mass, a spring and a damper connected in parallel. In previous works, the basic performance and characteristics of the Zener's model as a dynamic vibration absorber have not been investigated. In this study, the frequency response characteristics according to the parameter change of the Zener's model have been described. In order to find the optimum value of several parameters, we use iterative scheme with three dimensional frequency response diagram by MATLAB programming. Present results shows the Zener's model can give more good damping performance than the simple tuned mass damper, and the numerical optimization method should be developed for the efficient vibration absorbtion.

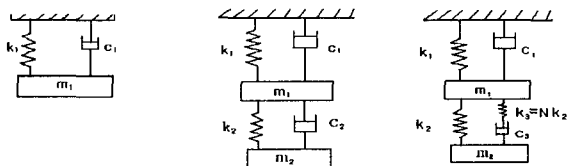
기 호 설 명

- μ = mass ratio between primary and additional masses
- ω_p = original natural frequency of the primary system
- ω_a = natural frequency of Zener's dynamic absorber
- β = frequency ratio
- r = non-dimensional driving frequency
- ζ_1 = damping loss factor of the primary system
- ζ_3 = damping loss factor of Zener's model

1. 서 론

기계 또는 구조물에서 자신의 고유진동수와 거의 일치하는 주파수의 가진력이 작용 한다면 공진이 발생하여 과도한 진동이 발생하게 된다. 이와 같은 경우에는 기존의 진동계에 댐퍼(damper)를 이용하거나 Fig. 1과 같이 댐퍼와 스프링 그리고 질량을 가진 계를 부가적으로 더함으로써 감쇠의 효과를 얻는 동흡진기(vibration absorber)를 사용한다.^(1,2) 일반적인 일자유도의 동조질량감쇠기(tuned mass damper)는 Fig. 1.b와 같이 댐퍼와 스프링이 부가적인 질량에 병렬로 연결되어 있는 형태로 이루어진다. 이와는 다르게 Zener모델은 일반적인 1자유도 감쇠계와는 달리 Fig. 1.c와 같이 댐퍼에 부가적인 스프링이 하나 더 직렬로 연결된다. 이런 Zener모델은 새로운 진동감쇠특성과 성능을 보이고 이에 따라 새로운 최적화 방법이 필요하게 되었다. 최근에 일반적인 동흡진기에 대한 최적화 방안의 연구는 여러 다른 논문을 통하여 활발히 발표되어 왔고 이미 여러 가지 방법들도 제시되어 있다. 이에 반하여 Zener모델 자체에는 연구된 사례가 있으나^(3,4,5) Zener모델이 동흡진기에 적용된 시스템(Fig. 3)에 대해선 연구된 바가 없으며 때문

프링 그리고 질량을 가진 계를 부가적으로 더함으로써 감쇠의 효과를 얻는 동흡진기(vibration absorber)를 사용한다.^(1,2) 일반적인 일자유도의 동조질량감쇠기(tuned mass damper)는 Fig. 1.b와 같이 댐퍼와 스프링이 부가적인 질량에 병렬로 연결되어 있는 형태로 이루어진다. 이와는 다르게 Zener모델은 일반적인 1자유도 감쇠계와는 달리 Fig. 1.c와 같이 댐퍼에 부가적인 스프링이 하나 더 직렬로 연결된다. 이런 Zener모델은 새로운 진동감쇠특성과 성능을 보이고 이에 따라 새로운 최적화 방법이 필요하게 되었다. 최근에 일반적인 동흡진기에 대한 최적화 방안의 연구는 여러 다른 논문을 통하여 활발히 발표되어 왔고 이미 여러 가지 방법들도 제시되어 있다. 이에 반하여 Zener모델 자체에는 연구된 사례가 있으나^(3,4,5) Zener모델이 동흡진기에 적용된 시스템(Fig. 3)에 대해선 연구된 바가 없으며 때문



(a) Base system (b) TMD (c) Zener's model

Fig. 1. Concept of dynamic vibration absorber.

† 책임저자, 정희원, 전남대학교 기계시스템공학부
Email: ikoh@chonnam.ac.kr
Tel: (062)530-1685 Fax: (062)530-1689

* 전남대학교 기계시스템공학부

에 이에 관한 성능이나 특성 또는 최적화 방법에 대한 이론은 전무한 실정이다.

본 연구에서는 Zener모형을 사용한 동흡진기의 운동방정식의 수식화 그리고 무차원화 과정을 거쳐, 모델의 파라미터 변화에 주파수 응답선도의 특성변화를 고찰하고 반복계산을 통한 파라미터들의 최적값을 찾아 기존의 동조질량감쇠기의 성능과 비교하고자 한다.

2. Zener동흡진기의 모델링 및 해석

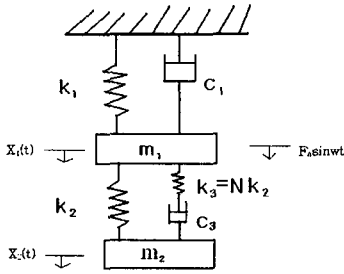


Fig. 2. Present Zener's dynamic vibration absorber.

스프링-댐퍼 그리고 질량 (m_1)으로 이루어진 일자유도계에 Zener모형을 연결한 수학적 모델은 Fig. 2와 같다. 여기서 Zener모형의 부가적으로 추가되는 강성인 k_3 는 k_2 의 상대적인 비로 표현하였다. 본체의 질량(m_1)에 $F_0 \sin \omega t$ 의 가진력으로 가진될 때의 전체 운동방정식을 정리하면 식 (1)과 같다.

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1+k_2+k_3 & -k_2 & -k_3 \\ -k_2 & k_2 & 0 \\ -k_3 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_0 \sin \omega t \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

여기서 식(2)와 같은 조화응답을 가정한다.

$$x(t) = X e^{i\omega t} = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} e^{i\omega t} \quad (2)$$

식(2)를 식(1)에 대입하고 조화함수를 제거하여 정리하면 식(3)과 같은 식을 얻을 수 있다.

$$[K - \omega^2 M + iC\omega]X = F_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3)$$

식(3)에서 각각의 시스템 행렬들은 식(4)와 같다.

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} c_1 & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} k_1+k_2+k_3 & -k_2 & -k_3 \\ -k_2 & k_2 & 0 \\ -k_3 & 0 & k_3 \end{bmatrix} \quad (4)$$

식(4)에서 양변을 m_1 으로 나누면 M, C, K 는 식 (5)과 같이 된다.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2\zeta_1 \omega_p & 0 & 0 \\ 0 & 2\zeta_3 \omega_p & -2\zeta_3 \omega_p \\ 0 & -2\zeta_3 \omega_p & 2\zeta_3 \omega_p \end{bmatrix}, \quad (5)$$

$$K = \begin{bmatrix} \omega_p^2 + (1+N)\mu\omega_a^2 - \mu\omega_a^2 - N\mu\omega_a^2 \\ -\mu\omega_a^2 & \mu\omega_a^2 & 0 \\ -N\mu\omega_a^2 & 0 & N\mu\omega_a^2 \end{bmatrix}$$

여기서 $\omega_p, \omega_a, \mu, \zeta_1, \zeta_3$ 은 각각 진동 감쇠의 대상이 되는 기본계의 고유 진동수, 흡진기의 고유 진동수, 질량비 (m_2/m_1), m_1 의 감쇠비($c_1/2m_1\omega_p$), 흡진기의 감쇠비 ($c_3/2m_2\omega_p$)를 의미한다. 식(5)에서 다시 ω_p^2 으로 운동방정식을 나누면 M, C, K 는 식(6)과 같다.

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 2\zeta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 2\zeta_3 & -2\zeta_3 \\ 0 & -2\zeta_3 & 2\zeta_3 \end{bmatrix},$$

$$K = \begin{bmatrix} 1 + (1+N)\mu\beta^2 & -\mu\beta^2 & -\mu N\beta^2 \\ -\mu\beta^2 & \mu\beta^2 & 0 \\ -\mu N\beta^2 & 0 & \mu N\beta^2 \end{bmatrix} \quad (6)$$

여기서 β 는 감쇠대상과 흡진기의 고유진동수 비(ω_a/ω_p)를 N 은 k_3/k_2 를 의미한다. 식(3)을 최종적으로 무차원 계수를 사용하여 표현하면 식(7)과 같이 표현될 수 있다.

$$[K - r^2 M + i r C]X = \frac{F_0}{k_1} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

이 운동 방정식의 좌변의 행렬을 역행렬을 취한 후 분모를 유리화하여 주파수 응답함수의 크기를 구하면 식(8)과 같은 무차원화된 식을 구할 수 있다.

$$\left| \frac{X_1 k_1}{F_0} \right| = \sqrt{\frac{(\mu N \beta^2 (r^2 - \beta^2))^2 + ((2r\zeta_3)(r^2 - (N+1)\beta^2))^2}{(\mu N \beta^2 (r^2 - \beta^2) - 4r^2 \zeta_3 \zeta_3 (r^2 - (N+1)\beta^2) - r^2 \mu N (r^2 - (\mu+1)\beta^2))^2 + ((2r\zeta_3)(r^2 - r^4 - (N+1)\beta^2 + (N+1)(\mu+1)r^2 \beta^2) + (2r\zeta_1)(\mu N \beta^2)(r^2 - \beta^2))^2}} \quad (8)$$

3. 최적화 과정

3.1 동조질량감쇠기를 갖는 동흡진기

일반적인 동조질량감쇠기를 갖는 2차계로부터 운동방정식을 얻고 무차원화된 주파수 응답함수의 크기를 구하여 표현하면 식 (9)와 같다^(6,7).

$$\left| \frac{X k_1}{F_0} \right| = \sqrt{\frac{(2\zeta_3 r)^2 + (r^2 - \beta^2)^2}{(2\zeta_3 r)^2 (r^2 - 1 + \mu r^2)^2 + [\mu r^2 \beta^2 - (r^2 - 1)(r^2 - \beta^2)]^2}} \quad (9)$$

위의 식 (9)를 이용하여 $\mu = 1/20, \beta = 1$ 일 때 감쇠비 ζ_3 를 각각 0.01, 0.1, 0.4에 대하여 주파수 응답함수를 그려 보면 Fig. 3과 같은 그래프를 얻을 수 있다.

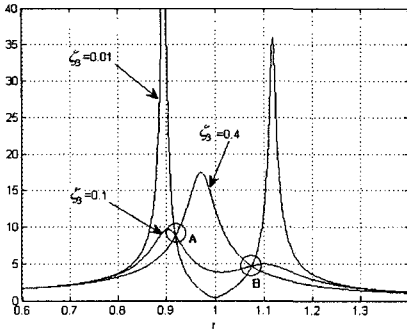


Fig. 3. FRF of vibration absorber system with TMD.

Fig. 3에 의하면 감쇠비에 상관없이 모든 곡선들이 A점과 B점에서 교차한다는 사실을 알 수 있다. 이에 착안하여 Den Hartog는 자신의 저서 'mechanical vibrations'⁽⁸⁾에서 가장 효과적인 최적화는 점 A와 B에서 주파수 응답함수의 값이 동일한 조건임을 증명하였다. 이들 교차점은 식 (9)에 $\zeta_3=0$ 과 $\zeta_3=\infty$ 의 극단적인 값을 대입하고 두 식을 등치시켜 찾아 낼 수 있다. 그 결과 얻어지는 식은 다음과 같다.

$$r^4 - 2r^2 \left(\frac{1+\beta^2+\mu\beta^2}{2+\mu} \right) + \frac{2\beta^2}{2+\mu} = 0 \quad (10)$$

식 (10)의 두 근은 점 A와 B에 해당하는 두 개의 진동수 비 $r_A = \omega_A/\omega$ 와 $r_B = \omega_B/\omega$ 의 값을 의미한다. 점 A와 B의 세로 좌표값은 각각 r_A 와 r_B 의 값을 식 (10)에 대입하여 구할 수 있다. 여기서 최적화된 튜닝 파라미터를 만족시키면 A점과 B점의 세로 좌표값이 같아져 최적화된 튜닝이 된다.

$$\beta = \frac{1}{1+\mu} \quad (11)$$

그 다음 단계는 최적의 감쇠비를 얻기 위해서 응답곡선이 점 A와 B에서 수평이 되게 하여 최적값을 찾는다. 먼저 식 (11)을 식 (9)에 대입하여 최적의 β 값을 적용한 다음 그 변형된 식을 r 에 대해 미분하여 점 A와 B에서 기울기가 0이 되도록 함으로서 다음을 얻을 수 있다.

$$\zeta_3^{2+} = \frac{\mu \left\{ 3 + \sqrt{\frac{\mu}{\mu+2}} \right\}}{8(1+\mu)^3}, \quad \zeta_3^{2-} = \frac{\mu \left\{ 3 - \sqrt{\frac{\mu}{\mu+2}} \right\}}{8(1+\mu)^3} \quad (12)$$

실제 설계 작업에서는 식 (12)의 평균을 취하여 아래와 같은 식을 사용할 수 있다.

$$\zeta_{3opt}^2 = \frac{3\mu}{8(1+\mu)^3} \quad (13)$$

위에 기술한 방법과는 다르게 흡진기의 운동방정식으로부터 최적화 점을 찾으려는 연구논문이 최근에 발표되고 있다^(9,10,11). 이와 같은 개념의 방법⁽¹²⁾ 중 한 가지를 간략히 기술

하자면 최적 r 값을 식(14)와 같이 구하였다.

$$r_{opt} = \frac{8[(4+3\mu)^{3/2} - \mu]}{64+80\mu+27\mu^2} \quad (14)$$

식 (14)와 같이 최적화를 한 후 최적 β 와 ζ_3 를 새로운 방법을 도입하여 식 (15)와 (16)과 같음을 제시하였다.

$$\beta_{opt} = \frac{\sqrt{r_{opt}(1+\sqrt{4+3\mu})}}{\sqrt{3(1+\mu)}} \quad (15)$$

$$\zeta_{3opt} = \sqrt{\frac{\beta_{opt}^2(1-r_{opt})[r_{opt} - (1+\mu)\beta_{opt}^2]}{2r_{opt}[(1+\mu)^2\beta_{opt}^2 - r_{opt}]}} \quad (16)$$

3.2 Zener모형을 갖는 동흡진기

Zener모형을 사용한 동흡진기는 일반적인 동흡진기와는 달리 r 값에 따른 무차원 변수 ζ_3 , β , μ 이외에도 새로운 스프링이 추가되어 N 이라는 무차원 변수가 존재한다. 결과적으로 Zener 모델은 4개의 변수에 따라 주파수 응답선도의 형상이 달라지기 때문에 기존의 방법을 써서는 최적화를 할 수 없다. 때문에 각 변수에 따른 주파수 응답선도를 분석하여 각 파라미터의 변화가 주파수의 응답에 어떤 영향을 미치는지 알아보았다. 그리고 임의의 변수를 설정한 후 r 과 ζ_3 에 관한 그래프에서 최적화하고 그 결과를 r 과 N 의 주파수 응답선도에 대입, 최적화한 후 다시 그 결과를 r 과 β 에 관한 그래프에 대입하여 최적화하는 과정을 반복함으로써 각 파라미터들의 최적값을 구하였다. 본문에 제시된 각 그래프는 직접 관련된 파라미터 이외의 파라미터들은 최적값을 대입하여 구하였으며 질량비 $\mu=1/20$ 인 문제를 다루었다.

(1) ζ_3 의 변화에 따른 주파수 응답특성

우선 ζ_3 의 변화에 따른 주파수 응답특성을 고찰하고자 한다. Fig. 4와 5는 ζ_3 의 변화에 따른 주파수 응답선도의 크기와 위상을 보여주고 있다. 그림에서 z 는 ζ_3 를 의미한다. $r=1$ 인 값 부근에서 공진이 발생하는 것을 확인할 수 있다. 여기서 ζ_3 가 증가함에 따라 첫 번째 공진점의 응답 크기는 점차 증가하고 이와는 반대로 두 번째 공진점의 응답 크기는 점차 감소한다는 것을 확인할 수 있다. 그리고 두 공진점의 응답 크기가 같아지는 최적의 조건은 $\zeta_3=0.01$ 부근이라는 것을 확인할 수 있다.

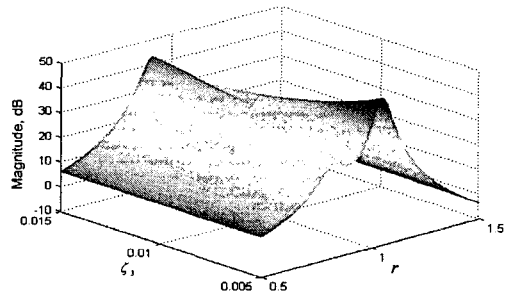


Fig. 4. Magnitude of FRF for ζ_3 ($\beta=0.8465$, $N=0.7$).

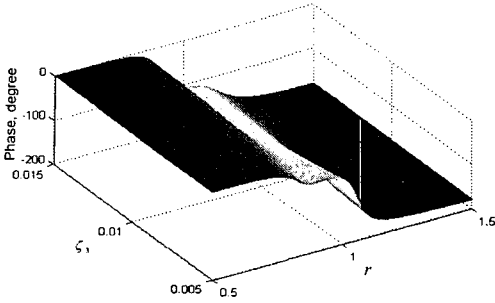


Fig. 5. Phase of FRF for ζ_3 ($\beta=0.8465$, $N=0.7$).

(2) N 의 변화에 따른 주파수 응답특성

다음으로 N 의 변화에 따른 주파수 응답특성을 고찰하고자 한다. Fig. 6과 7은 ζ_3 의 변화에 따른 주파수 응답선도의 크기와 위상을 보여주고 있다. N 이 증가 할수록 두 양의 공진점의 응답크기는 동시에 급격히 감소하다가 두 값이 비슷해진다. 그리고 두 양의 공진 사이에 존재하는 반 공진점은 급격히 감소하게 된다. 응답크기의 그래프가 전체적으로 완만해진 후에는 N 값이 증가함에 따라 응답크기도 서서히 증가하므로 두 공진점과 반공진점의 크기가 비슷해져서 전체적 그래프 형상이 완만해지는 부분에서 최적의 감쇠조건을 찾을 수 있다.

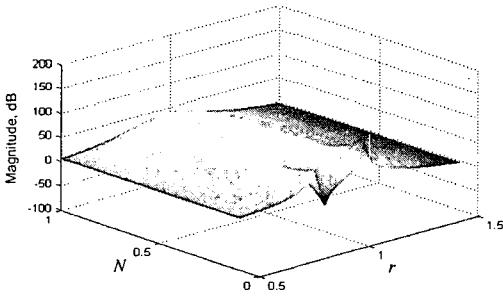


Fig. 6. Magnitude of FRF for N ($\beta=0.8465$, $\zeta_3=0.01$).

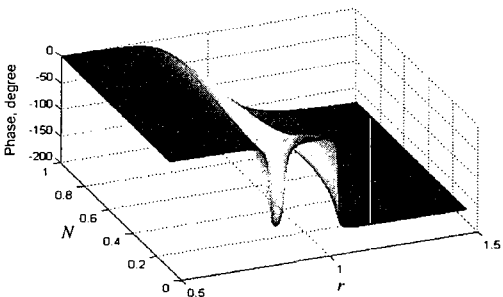


Fig. 7. Phase of FRF for N ($\beta=0.8465$, $\zeta_3=0.01$).

(3) β 의 변화에 따른 주파수 응답특성

그 다음으로 β 의 변화에 따른 주파수 응답특성을 고찰하고자 한다. Fig. 8과 9는 ζ_3 의 변화에 따른 주파수 응답선도의 크기와 위상을 보여주고 있다.

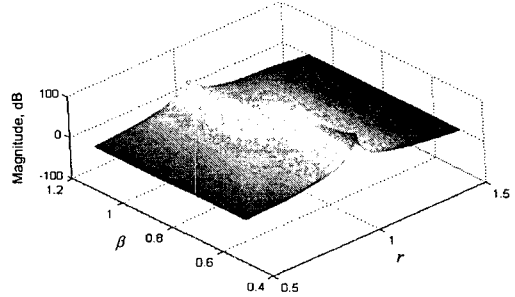


Fig. 8. Magnitude of FRF for β ($N=0.7$, $\zeta_3=0.01$)

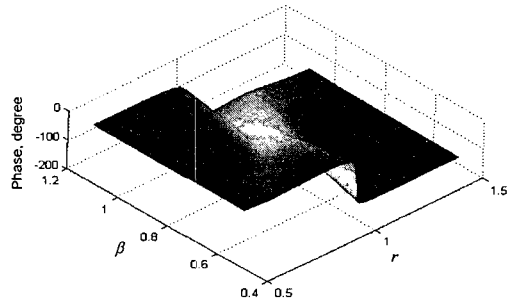


Fig. 9. Phase of FRF for β ($N=0.7$, $\zeta_3=0.01$)

β 값이 증가 할수록 공진점의 응답크기는 감소하다가 어느 부분에서부터(약 $\beta = 0.8$) 처음의 공진점보다 더 낮은 r 값에서 새로운 공진점이 생긴다. 초기의 공진점이 감소하는 것과는 반대로 β 값이 증가 할수록 두 번째의 공진점의 응답크기가 증가한다. 따라서 초기의 공진점과 두 번째의 공진점의 값이 같아지는 부근에서 최적값을 구할 수 있다.

4. 성능 비교

본 절에서는 3절에서 반복 수렴법으로 구한 Zener모델의 최적 파라미터 값들을 이용하여 기존의 동조질량감쇠기의 감쇠성능을 비교하였다. $\mu=0.05$ 와 $\mu=0.25$ 인 경우에 대한 최적화된 파라미터값을 Table. 1에 제시하였다. 두 문제에 대해 구한 최적 파라미터 값들을 사용하여 Fig. 10과 Fig. 11에 주파수 응답선도를 비교하였다. 각 그래프에서 두 동흡진기 간의 성능을 비교해 보면 일반 동흡진기의 최적화보다 Zener모델을 사용한 동흡진기의 최적화된 주파수 응답 특성이 최대 2dB 정도 감쇠가 되는 것을 확인할 수 있다.

Table 1 Comparison of optimal parameters between Zener's model and tuned mass damper.

	μ	ξ_2	β	N
일반 흡진기	0.05	0.127	0.9524	-
	0.25	0.051	0.8	-
zener 흡진기	0.05	0.0100	0.8465	0.7
	0.25	0.0512	0.775	5

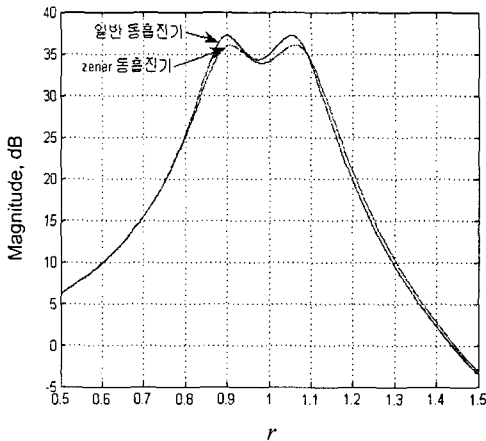


Fig. 10. Comparison of optimized FRF ($\mu=0.05$).

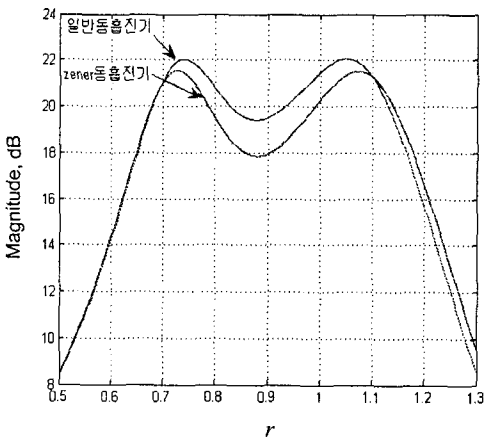


Fig. 11. Comparison of optimized FRF ($\mu=0.25$).

5. 결 론

본 연구에서는 Zener 모델이 적용된 동흡진기를 해석하고 무차원화를 통하여 주파수 응답함수식을 유도하였다. 일반 동흡진기의 최적화 방법론에 대하여 설명 하였고 삼차원 주파수 응답도식을 이용하여 4개의 파라미터 변화에 따른 주파수 응답함수 변화를 고찰하였으며 수치적인 최적값을 반복법을 적용하여 찾았다. 최적화된 제너 흡진기의 주파수 응답선도를 일반 흡진기와 비교하여 성능비교를 하였으며 일

반 동흡진기의 최적화보다 Zener 모델을 사용한 동흡진기의 최적화된 주파수 응답 특성이 최대 2dB 정도 감쇠가 되는 것을 확인 할 수 있었다. 앞으로는 제너 흡진기의 최적화 방법에 대하여 대수적으로 접근하거나 다른 응용방법에 대해서 연구되어야 할 것이다.

후 기

이 논문은 2005년도 교육인적자원부의 지방대학 혁신 역량 강화사업(NURI)에 의하여 지원되었음.

참 고 문 헌

- (1) 박철휘, 송석홍, 신현제, 홍성철, 1993, "비선형 동흡진기의 동적 거동에 관한 연구", 한국소음진동학회지, 제3권, 제2호, pp. 137~143.
- (2) 안찬우, 김동영, 최석창, 1997, "감쇠진동계에 부착된 복합동흡진기의 효과에 관한 연구" 한국소음진동공학 회 논문집, 제7권, 제6호, pp. 1039~1048.
- (3) Carrella, A., Waters, T.P., Brennan, M.J., 2005, "Free Vibration Characteristic of an Isolation System with a Spring-Relaxed Damper", Twelfth International Congress on Sound and Vibration, Lisbon Portugal.
- (4) Prolov., K. V., 1990, Vibration Isolation System, Hampshire Publishing Corporation
- (5) E.I. Rivin. 2001, Passive Vibration Isolation, Professional Engineering Publishing.
- (6) Singiresu S. Rao, 2004, Mechanical Vibrations 4th edition , Prentice Hall.
- (7) Daniel J. Inman, 2001, Engineering Vibraton 2nd edition, Prentice Hall.
- (8) Den Hartog, J. P. 1940, Mechanical Vibrations 2nd edition , MacGraw-Hill.
- (9) Ikeda, T. and Ioi, T., 1977, "On Dynamic Vibration Absorber for Damped Vibration Systems," Trans Jpn. Soc Mech Eng., 43(369), pp 1707-1715.
- (10) Soom, A. and Lee, M. S., 1983, "Optimal Design of Linear and Nonlinear Vibration Absorbers for Damped Systems," Journal of Vibration and Acoustics, 105(1), pp.112-1193.
- (11) Haddad, W. M. and Razavi, 1988, " H_2 Mixed H_2/H_∞ H_2/L_1 Optimally Tuned Passive Isolator and Absorbers," ASME J. Dyn. Syst. Meas. Control, 120(2), pp. 282-287.
- (12) Osamu N. and Toshihiko A., 2002, "Closed-Form Solutions to the Exact Optimizations of Dynamic Vibration Absorbers(Minimizations of the Maximum Amplitude Magnification Factors)," Journal of Vibration and Acoustics, Vol. 124, 576-582.