한국지하수토양환경학회 춘계학술발표회
2005년 4월 14~15일 공 주 대 학 교

# ELLAM(Eulerian Lagrangian Localized Adjoint Method)의 수치적 고찰

석희준
*한국수자원공사, 수자원연구소, 대전 유성구 전민동 462-1*
e-mail : sxh60@kowaco.or.kr

## 요 약 문

최근에 ELLAM 기법을 이용한 오염물 거동 문제를 많은 사람들이 다루어 오고 있다. ELLAM 기법은 기존의 Eulerian-Lagrangian 방식에서 일어나는 질량보존 문제점과 일반경계조건의 체계적인 적용 한계점을 극복하였다. 그러나 본 연구에서는 이 방식의 장단점을 네 개의 예제를 통하여 다른 모델들과 비교 검토하여 ELLAM의 수치적 고찰을 수행하고자 한다. 예제 수행 결과 Mesh Peclet Number가 무한대일때 ELLAM은 수치확산 및 수치진동과 같은 수치오차로 인해 음수의 농도 값을 갖거나 1 보다 큰 농도를 갖는 경향을 보인다. 그러나 Mesh Peclet Number 50 일때는 전체적으로 해석해와 잘 일치함을 볼 수 있다. 반면, LEZOOMPC(Lagrangian-Eulerian ZOOMing Peak and valley Capturing)는 항상 좋은 결과를 보여주고 있다. 따라서 위의 결과를 종합하여 볼 때 ELLAM의 단점은 LEZOOMPC의 성질을 이용하여 개선 및 보완될 수 있음을 간접적으로 시사해준다. 즉 LEZOOMPC에서 사용되는 선택적 국부 격자 세립화 과정을 이용하면 ELLAM에서 일어나는 다양한 수치오차를 줄일 수 있을 것이라고 판단된다.

**Key word** : ELLAM, LEZOOMPC, Eulerian-Lagrangian 방식

## 1. 서론

극심한 비선형적인 이송-확산-반응식들이 지하내에 다양한 오염물 거동 현상을 설명한다. 일반적으로 이러한 문제에 대한 해석해가 거의 존재하지 않기 때문에 오염물 거동 해석을 위한 수치모형을 사용하여 왔다. 그러나 많은 모델들이 대부분 수치에러를 잠정적으로 가지고 있기 때문에 이에 대한 주의와 적절한 조치가 필요하다. 특히 Eulerian 접근 방식과 관련된 수치에러는 spurious oscillation, numerical dispersion, grid orientation, phase error들이 포함된다.(1) 특히 이러한 방식의 수치모델은 Coutant number 와 Peclet number의 크기에 의해 제약을 받는다.(1) 따라서 Eulerian 방식보다는 한 단계 향상된Eulerian-Lagrangian 복합방식이 사용되었었다. 여기서 이송부분은 Lagrangian 접근을 사용하여 풀었고, 확산부분은 Eulerian 방식을 사용하여 풀었다. 이 방식은 기존의 Eulerian 방식보다 시간 절삭 오차에 대해서 덜 민감하여, 정확성의 손실 없이 커다란 시간간격을 사용하는 것을 가능토록 하였다.(2) 그러나 이 방법은 일반적으로 질량을 보존하지 못하고, 일반경계조건을 즉각적으로 처리하지 못하는 단점이 있다. 따라서 Celia et al.(3)와 Russell(4)은 ELLAM(Eulerian Lagrangian Localized Adjoint Method)을 개발하였다. 이것은 시간, 공간을 동시에 고려하는 시험 함수를 사용하여 질량을 전체적으로 보존되게 하는 동시에 모든 경계조건에 대해서 체계적이고 일관적인 적용을 가능케 만들었다. 또한 가장 커다란 장점은 시간 간격 길이에 대한 제약이 없기 때문에 시간 간격 횟수를 줄일 수 있어서 계산이 빠르면서 정확한 수치결과를 가질 수

있다는 것이다. 그러나 실제 행렬식을 만들 때 행렬성분들은 시험함수를 적분함으로써 얻어지고, 오른쪽 항은 표준 수치적분 기술에 의하여 구해진다. 이때 수치적분이 질량을 보존하고, 정확한 해를 얻어내기 위해서는 어떤 급격한 농도 변화구간을 충분히 반영하기 위한 충분한 적분점의 밀도가 설정 되야 한다. 만약 이러한 조건이 만족되지 않으면 위에서 언급한 다양한 수치에러 중의 한, 두 가지 요소가 정확한 해를 만드는 것을 방해할 수 있을 것이다. 따라서 현재 연구는 ELLAM 방식의 소개와 이에 대한 한계점을 다른 모델 또는 알고리즘과 비교 파악하고자 한다. 또한 ELLAM의 단점을 부각시키고, 이 모델의 개선 가능성을 검토하기 위하여 LEZOOMPC 방법과 상호 비교하고자 한다. 여기서 LEZOOMPC는 Cheng et al.[5] 이 개발한 알고리즘으로서 후향 입자 추적, 전향입자추적, 선택적 국부 확대, 최고저점의 결정 등 다양한 수치방식이 포함되어서 많은 장점을 가진 알고리즘이다. 또한 Mesh Peclet number 가 0에서부터 무한대 범위에서도 사용자가 정한 오차한계 내에서 오염물 거동 방정식을 풀 수 있을 뿐만 아니라 커다란 시간 간격 길이와 커다란 격자 크기에도 잘 풀릴 수 있다고 보고 되어 있다.

## 2. ELLAM의 수치적 평가를 위한 예제

ELLAM의 수치적 정확성 및 효율성을 평가하기 위하여 아래와 같이 두개의 벤치마크 문제를 만들었다. 첫 번째는 가우시안 농도분포를 갖는 오염물의 거동을 모사하는 문제이다. 여기서 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U\frac{\partial C}{\partial x} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2}, C(x,0) = exp\ \frac{-(x-x_o)^2}{2\sigma_o^2}\quad (-\infty \le x \le \infty),\ C(x,t)\to 0 \text{ as } x\to\infty \qquad (1)$$

두 번째 문제는 진행하는 오염물 앞면의 문제를 다룬다. 지배방정식은 다음과 같다.

$$\frac{\partial C}{\partial t} + U\frac{\partial C}{\partial x} = D\frac{\partial^2 C}{\partial x^2},\ C(x,0) = 0,\ (0 \le x \le \infty),\ C(0,t) = 1,\ C(x,t)\to 0 \text{ as } x\to\infty \qquad (2)$$

여기서 속도장 $U$ 와 확산계수 $D$에 따라 표 1에서와 같이 네 가지 예제로 나눌 수 있다. 여기서 첫 번째 예제에서 초기농도분포의 중심 $x_0$은 2,000 m이고 표준편차 $\sigma_0$는 264 m 이다. 수치모의를 의해서 격자간격 $\triangle x$는 200m로 일정하게 하였고, $\triangle t$는 96 day로 일정하게 설정하여 ELLAM, LEZOOMPC, Visual Modflow 3.1.0[6]의 Upstream Finite Difference 알고리즘을 이용하여 각각 계산하였다. 이에 대한 결과는 그림 1에 나타내었다. 그림 1(A)에서 보는 바와 같이 첫 번째 예제의 경우 Courant Number 가 0.24이고 mesh Peclet number 가 무한대인 경우 LEZOOMPC를 제외하고는 해석해와 일치하지 않고, 그 중에서 Finite Difference Method를 이용한 Visual Modflow의 경우 중앙부에서 수치 확산이 커다랗게 일어나서 좌우로 더 많은 오염물이 퍼져 나가는 모습을 보였다.

표 1. 속도장 U와 확산계수 D에 따른 네 가지 예제

| | | U(m/day) | D($m^2$/day) |
|---|---|---|---|
| 예제 1 | 첫번째 문제 ($x_0 = 2000$, $\sigma_0 = 264$) | 0.5 | 0 |
| 예제 2 | | 0.5 | 2 |
| 예제 3 | 두번째 문제 | 0.5 | 0 |
| 예제 4 | | 0.5 | 2 |

ELLAM의 경우 최고점에서 수치 확산으로 인해 해석해와 커다란 차이를 보이고 좌우측에서 수치진동이 각각 나타나는 것을 볼 수 있다. 그림 1(B)의 경우 Courant Number 가 0.24이고 mesh Peclet number 가 50인 경우 Finite Difference Method를 이용한 Visual Modflow를 제외하고는 전반적으로 해석해와 일치함을 볼 수 있다. 즉 mesh Peclet number가 50 이하에서 ELLAM이 정확한 수치해를 가짐을 알 수 있었다. 반면에 Visual Modflow의 결과는 여전히 수치 확산으로 인해 해석해와 커다란 차이를 보임을 알 수 있었다. 또한 그림 1(C)의 경우 그림 1(A)의 경우와 같이 LEZOOMPC를 제외하고는 해석해와 일치하지 않고, 그 중에서 Finite Difference Method를 이용한 Visual Modflow는 급격한 오염물 경사면 근처에서 수치 확산이 일어나서 해석해와 커다란 차이를 보인다. ELLAM의 경우도 오염물 경사면 근처에서 수치 진동이 일어나서 최대 농도 1 보다 크고 최소 농도 0 보다 작은 음수값을 보인다. 그림 1(D)의 경우 그림 1(B)의 경우처럼 Finite Difference Method를 이용한 Visual Modflow를 제외하고는 전반적으로 해석해와 잘 일치함을 볼 수 있다.

## 3. 결론

ELLAM의 수치적 정확성 및 효율성을 평가하기 위하여 총 4개의 예제를 갖고 LEZOOMPC, Visual Modflow를 이용하여 비교 평가하였다. 그림 1의 결과 Mesh Peclet number가 무한대인 경우(그림 1(A), (C)) ELLAM은 수치확산과 수치진동이 일어나서 해석해와 차이를 보이기 때문에 음수의 농도를 가짐을 알 수 있다. 그러나 Mesh Peclet number가 50인 경우 ELLAM은 수치확산과 수치진동 없이 대체적으로 해석해와 일치함을 볼 수 있다. 반면에 LEZOOMPC는 항상 좋은 결과를 나타냄을 알 수 있었다. 이는 ELLAM의 개선방향을 암시해 주는 결과라고 볼 수 있다. 즉 LEZOOMPC에서 사용되는 선택적 국부 격자 세립화 과정을 이용하면 ELLAM에서 일어나는 다양한 수치오차를 줄일 수 있을 것이라고 판단된다.

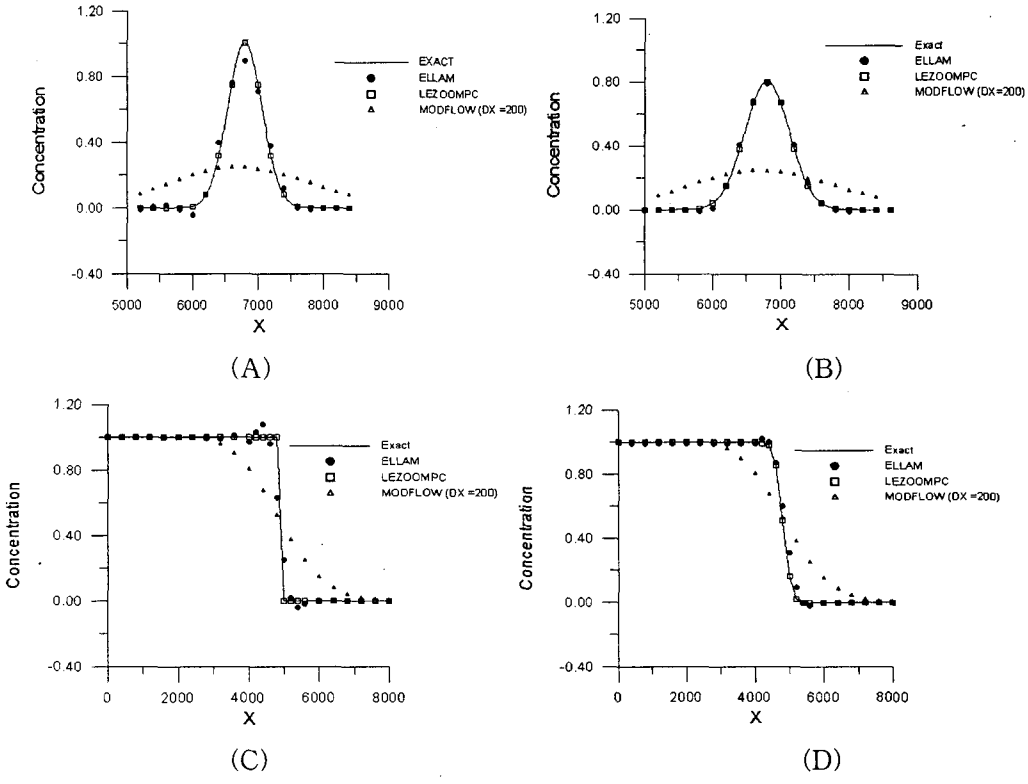


그림 1. 네 가지 예제들에 대한 ELLAM, LEZOOMPC, VISUAL MODFLOW의 수치 결과 비교. (A) 예제 1, (B) 예제 2, (C) 예제 3, (D) 예제 4

## 4. 사사

본 연구는 21세기 프론티어 연구개발사업인 수자원의 지속적 확보기술개발 사업단의 연구비 지원(과제번호: 3-4-2) 및 한국수자원공사 현물투자 지원에 의해 수행되었다. 연구비를 지원해 준 사업단 및 한국수자원공사 측에 감사드린다.

## 5. 참고문헌

(1) Yeh, G.T. and J.R. Chang, 1992, An exact peak capturing and oscillation-free scheme to solve advection-dispersion transport equations, *Water Resour. Res.*, 28(11), 2937-2951.

(2) Healy, R.W. and T.F. Russell, 1998, Solution of the advection-dispersion equation in two dimensions by a finite-volume Eulerian-Lagrangian localized adjoint method, *Adv. Water Resour.*, 21(1), 11-26.

(3) Celia, M.A., T.F. Russell, I. Herrera and R.E. Ewing, 1990, An Eulerian-Lagrangian localized adjoint method for the advection-diffusion equation, *Adv. Water Resour.*, 13, 187-206.

(4) Russell, T.F., 1990, Eulerian-Lagrangian localized adjoint methods for advection-dominated problems. In Numerical Analysis, 1989, Pitman Res. Notes Math, Series, Vol. 228, ed. D.F. Griffiths & G.A. Watson. Longman Scientific and Technical, Harlow, U.K., 206-228.

(5) Cheng, J.R., H.P. Cheng and G.T. Yeh, 1996, A Lagrangian-Eulerian method with adaptively local zooming and peak/valley capturing approach to solve two-dimensional advection-diffusion trasport equations, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 39, 987-1016.

(6) Waterloo hydrogeologic Inc., 2003. *Visual MODFLOW v.3.1 User's Manual,* For professional applications in three-dimensional groundwater flow and contaminant transport modeling, Waterloo, Ontario, Canada.