

## 비모수적 검정방법을 이용한 카오스 현상의 식별\*

박영선<sup>1</sup>·이용균<sup>2</sup>·차경준<sup>3</sup>·박문일<sup>4</sup>·오재웅<sup>5</sup>)

### 요약

본 연구에서는 잡음이 섞인 카오스 시스템으로부터 생성된 자료와 단순한 무질서를 갖는 불규칙한 자료를 구별할 수 있는 고전적인 비모수적 검정을 알아보고, 낮은 차원의 카오스 자료와 무질서한 자료를 구별할 수 있는 위상공간에서의 재구성(reconstruction) 기법을 로지스틱 및 지수 사상을 이용하여 살펴보았다.

**주요용어:** 카오스, 무질서, 비모수적 검정, 재구성.

### 1. 서론

카오스(chaos)는 '혼돈(混沌)'이라는 뜻으로 보통은 질서가 없는 무작위 상태를 뜻한다. 그러나 과학에서 말하는 카오스의 정의는 수학이나 물리학에 의해 원리적으로 확정되어 있음에도 불구하고 장래의 예측이 불가능한 현상을 의미하며, 자연 과학에서는 어떤 사물을 이해하는 데는 그것을 요소로 분해해 나가는 방법을 취한다. 그러나 카오스가 발생하면 그것이 불가능해짐으로서 그 같은 현상을 완전하게 재현하는 일도 거의 불가능하게 되며, 따라서 현대 과학기술의 기본인 '예측 가능성'이나 '제어 가능성'의 신념마저도 흔들리게 된다. 그러나 카오스의 연구가 진행되고 나서 예측 불가능한 현상은 단지 몇 가지 요인 때문에 일어나기도 한다는 것이 밝혀졌다.

실제로 몇몇 관심 있는 과학영역들 중에서 특히, 비선형 결정론적 동력학계로부터 생성된 자료는 무질서한 형태를 띠고 있다. 이러한 자료가 여러 학자들에 의해 카오스 현상을 보이는 것으로 입증되었다(Berliner, 1992; Chan & Tong, 1994).

본 연구에서는 카오스 현상은 동력학계(dynamic system)로부터 생성되어진 무질서한 것으로서 정의하며, 무작위한 측정 오차(error)와 결합된 카오틱한 무질서(random) 자료로부터 저차원 카오스를 식별하는 고전적인 비선형 검정기법에 대하여 논하고, 위상공간에서의 재구성(reconstruction) 방법인 변환기법을 포함한 모의실험을 실시하였다.

### 2. 잡음이 섞인 카오스 현상과 검정기법

\* This work was supported by a grant No. R01-2005-000-10866-0 from KOSEF.

1). 서울특별시 성동구 행당동 17번지 한양대학교 자연과학대학 수학과 강의전담교수  
E-mail : pppppys@hanyang.ac.kr.

2). 서울특별시 성동구 행당동 17번지 한양대학교 자연과학대학 수학과 박사과정

3). 서울특별시 성동구 행당동 17번지 한양대학교 자연과학대학 수학과 교수

4). 서울특별시 성동구 행당동 17번지 한양대학교 의과대학 산부인과 교수

5). 서울특별시 성동구 행당동 17번지 한양대학교 공과대학 기계공학과 교수

다음 형식을 갖는 동력학계를 고려하자.

$$x_{t+1} = f(X_t)$$

여기서,  $X_t = (x_t, x_{t-1}, \dots, x_{t-d+1})$ ,  $t = 1, 2, \dots$  은 시간 지수(index)이고  $d$ 는 동력학계의 'lag dimension'을 가리키는 정수이다. 여러 경우에서, 이러한 동력학계는 무질서한 것 같지만 사실은 카오스 현상을 포함하는 자료를 생성할 수 있다. 그러나 고전적인 수치적 검정은 무질서한 수열로부터 이들 자료를 구별할 수 없었다.

다음은 대부분 많은 연구자들이 공통적으로 다루는 로지스틱 사상(logistic map)이다 (Tong, 1990).

예제 1. 로지스틱 사상은 다음과 같이 정의되는 함수이다.

$$x_{t+1} = a * x_t (1 - x_t)$$

여기서,  $t = (0, 1, 2, \dots)$ 는 시간을 의미하며, 초기값  $x_0 \in [0, 1]$ , 계수는  $a \in [0, 4]$ 로 서

제한하자. 특히,  $a \geq 3.56994$ 에 대해  $x_t$ 는 외관상으로 무질서한 현상을 나타낸다.

실제로, 그림 1은  $a = 0.500$ 이고 초기값이  $x_0 = 0.013$ 일 때의 로지스틱 사상에 의한 시계열 자료와  $x_{n+1}$  대  $x_n$  그림으로서 리턴 맵을 이용한 로지스틱 방정식의 해의 거동을 보여 주고 있다. 이러한 자료에 비해  $a = 3.56994$ 이고 초기값이  $x_0 = 0.841$ 일 때의 로지스틱사상은 그림 2에서 보는 바와 같이 비 패턴적인 현상이 보이며 특히, 그림 4와 같이  $a = 4.000$  ( $x_0 = 0.382$ )일 때의 로지스틱 사상은 카오스 현상이 두드러진다.

본 연구에서의 모의실험(simulation)은  $a = 4.000$  그리고 초기값  $x_0$ 를 균일분포  $[0, 1]$ 로부터 생성된 카오스 자료를 이용하여 분석을 시행하였는데, 이것과 다른 단순한 동력학계들은 생물학, 전염병학 그리고 경제학 자료를 분석하는데 폭넓게 사용되고 있다 (May, 1987). 또 하나의 카오스현상을 다루는데 유용한 것으로서, 지수 사상(exponential map)이 있다.

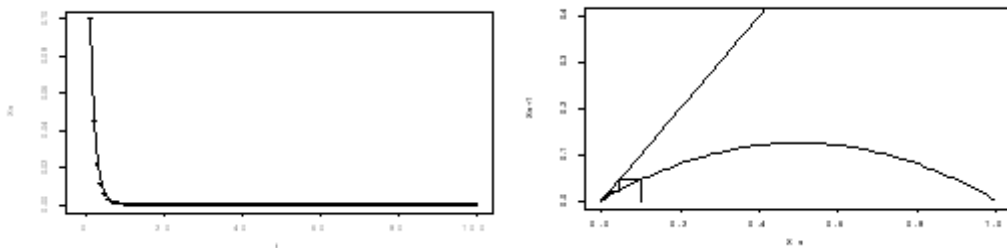


그림 1.  $a = 0.500$  ( $x_0 = 0.013$ )일 때의 로지스틱 사상에 의한 시계열 자료(Left)와 리턴 맵( $x_{n+1}$  vs.  $x_n$ )을 이용한 로지스틱 방정식의 해의 거동(Right)

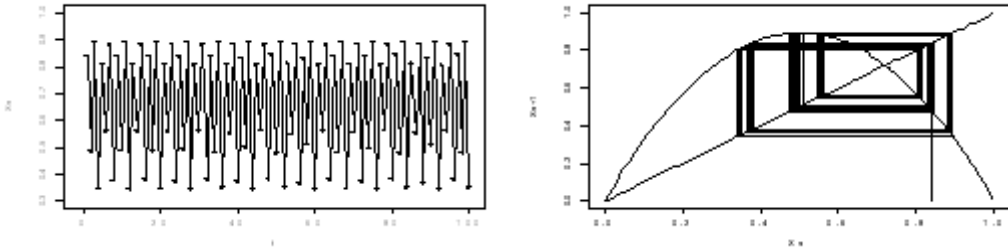


그림 2.  $a=3.56994$  ( $x_0=0.841$ ) 일 때의 로지스틱 사상에 의한 시계열 자료(Left)와 리턴 맵( $x_{n+1}$  vs.  $x_n$ )을 이용한 로지스틱 방정식의 해의 거동(Right)

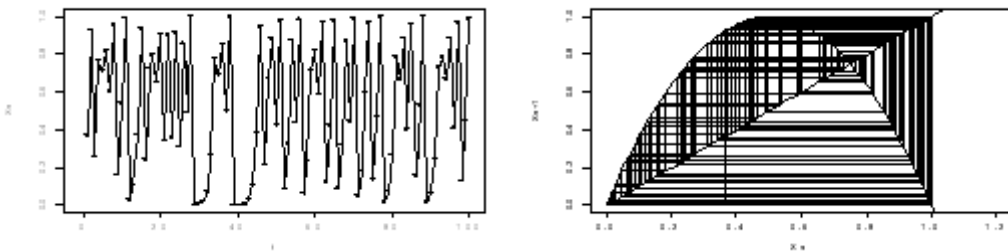


그림 3.  $a=4.000$  ( $x_0=0.382$ ) 일 때의 로지스틱 사상에 의한 시계열 자료(Left)와 리턴 맵( $x_{n+1}$  vs.  $x_n$ )을 이용한 로지스틱 방정식의 해의 거동(Right)

예제 2. 지수 사상(exponential map)은 다음과 같이 정의 된다.

$$x_{t+1} = x_t e^{r(1-x_t)}$$

여기서,  $t=0, 1, 2, \dots$ ,  $x_0 \in [0, \infty)$ ,  $r \in [0, 4]$  이고 특히,  $r > 2.6924$  일 때 관측되는 카오스 현상을 보이게 된다.

실제로 그림 4는  $r=0.500$  이고 초기값이  $x_0=0.7040118$  일 때의 지수 사상에 의한 시계열 자료와  $x_{n+1}$  대  $x_n$  그림으로서 리턴 맵을 이용한 지수 방정식의 해의 거동을 보여 주고 있다. 또한, 그림 5는  $r=2.231$  이고 초기값이  $x_0=1.187076$  일 때의 지수 사상을 도시한 것인데, 그림에서 보는 바와 같이 비 패턴적인 현상이 보이며, 특히, 그림 6 ( $r=3.011$ ,  $x_0=0.9095736$ ) 에서의 지수 사상은 카오스 현상이 본격화 된다.

모의실험에서  $r=3.731$  그리고  $x_0$  를 균일분포  $[0, 2]$  로부터 랜덤하게 선택되어졌다고 하자. 실제로, 계(system)로부터 일반적으로 관측되는 현상은 잡음이 포함된 두 종류의 수열 즉,  $\{y_t = x_t + \epsilon_t\}$  또는  $\{y_t = x_t \epsilon_t\}$  이 있는데, 여기서  $\epsilon_t$  는 측정 오차를 표시한다. 물론 다른 종류의 오차도 존재 할 수도 있으나, 본 연구에서는 단지 이 두 종류의 오차만을 고려하기로 한다.

무질서 또는 무작위(randomness) 식별에 관한문제는 오랜 역사를 갖고 있으며 무

질서를

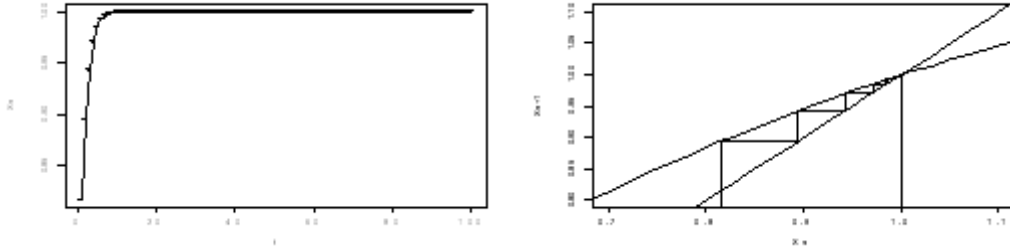


그림 4.  $r=0.500$  ( $x_0=0.7040118$ ) 일 때의 지수 사상에 의한 시계열 자료(Left)와 리턴 맵( $x_{n+1}$  vs.  $x_n$ )을 이용한 지수 방정식의 해의 거동(Right)

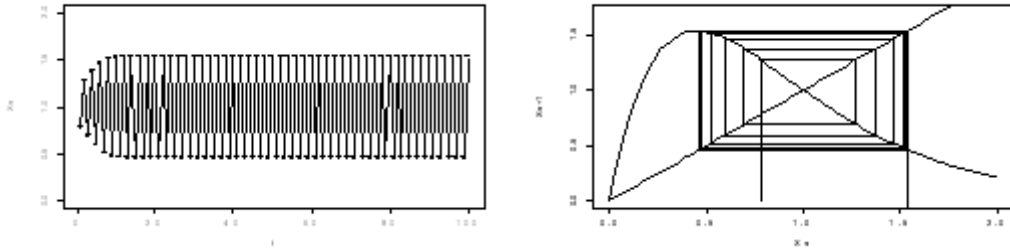


그림 5.  $r=2.231$  ( $x_0=1.187076$ ) 일 때의 지수 사상에 의한 시계열 자료(Left)와 리턴 맵( $x_{n+1}$  vs.  $x_n$ )을 이용한 지수 방정식의 해의 거동(Right)

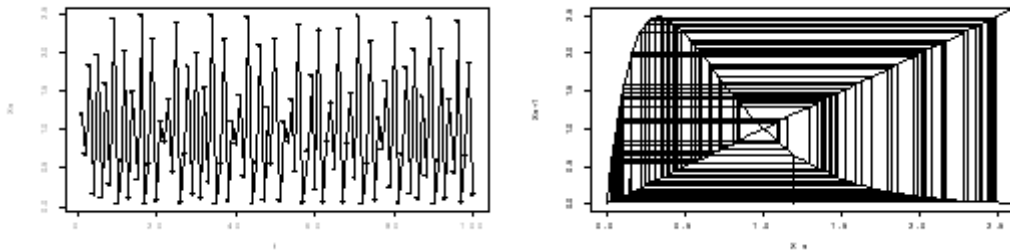


그림 6.  $r=3.011$  ( $x_0=0.9095736$ ) 일 때의 지수 사상에 의한 시계열 자료(Left)와 리턴 맵( $x_{n+1}$  vs.  $x_n$ )을 이용한 지수 방정식의 해의 거동(Right)

입증하기 위해 많은 수치적 기법들과 통계량들이 제안되어왔다. 그들 중 대표적인 방법은 sign test (Gibbons & Chakraborti, 1992), runs test (Keeping, 1966), turning point test (Clarke, 1973), Kolmogorov-Smirnov test (Conover, 1998), Anderson corre- logram test (Yevjevich, 1972) 그리고 Kendall's  $\tau$  (Kotz & Johnson, 1983) 등이 있다.

### 3. 무질서(randomness)와 카오스의 식별

위에서 제시된 sign test, runs test, turning point test, Kolmogorov-Smirnov test, Anderson correlogram test 그리고 Kendall의  $\tau$  test 등 6가지의 통계량 어떠한 것도 무질서 수열과 로지스틱 사상 또는 지수 사상으로 부터 생성된 카오스 수열을 구별하지 못한다. 이는 다음의 모의실험 결과로부터 확인해 볼 수 있다.

먼저, 그림 7은 본래의 로지스틱 사상( $a=4.000$ ,  $x_0=0.4691803$ )에 4가지 실험을 각각 시행하였는데, 첫째, 오차  $\varepsilon_t$ 에 대해 잡음을 주지 않은 순수한 자료: (a)  $zero$ , 그리고 잡음을 정규분포 (b)  $N(0, 0.01)$ 로 준 경우, 그리고 각각 (c)  $N(0, 0.1)$ , (d)  $N(0, 1)$ 를 따르는 시계열 자료를 각각 도식한 것이다. 첫 번째 그림에서 볼 수 있듯이 그리 복잡하지 않은, 즉 저차원의 카오스 현상을 확인 할 수 있다.

마찬가지로 그림 8은 지수사상 ( $r=3.731$ ,  $x_0=1.146091$ )에 오차  $\varepsilon_t$ 를 각각 잡음을 주지

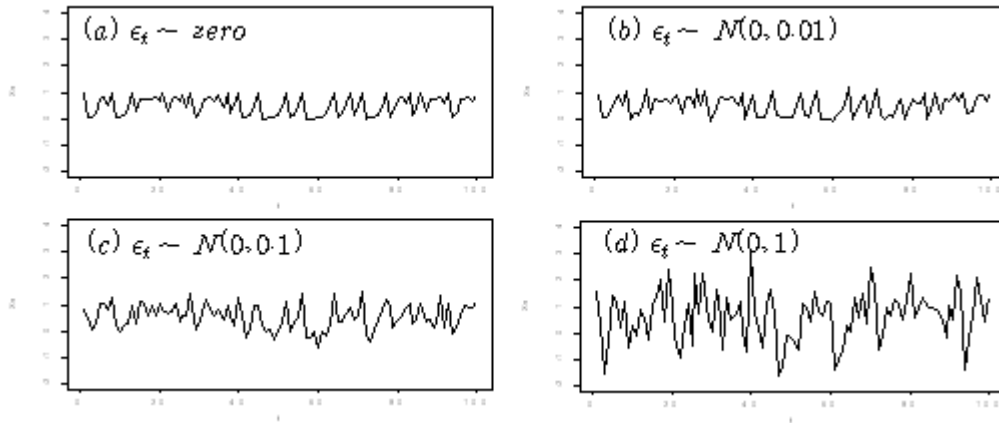


그림 7. 로지스틱 사상( $a=4.000$ ,  $x_0=0.4691803$ )에 오차  $\varepsilon_t$ 를 준 4 종류의 ((a)  $\varepsilon_t \sim zero$ , (b)  $N(0, 0.01)$ , (c)  $N(0, 0.1)$ , (d)  $N(0, 1)$ ) 시계열자료.

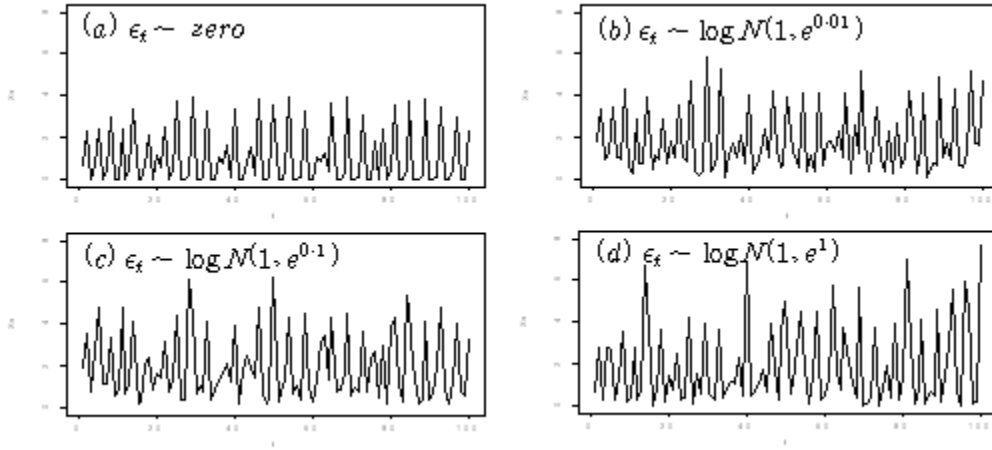


그림 8. 지수 사상( $r=3.731$ ,  $x_0=1.146091$ )에서 오차  $\epsilon_t$ 에 대해 log-normal 분포 (a) zero, (b)  $\log N(1, e^{0.01})$ , (c)  $\log N(1, e^{0.1})$ , (d)  $\log N(1, e^1)$ 의 시계열자료. 많은 자료: (a) zero (*multiplier* = 1), 그리고 잡음을 log-normal 분포 (b)  $\log N(0, e^{0.01})$ 로준 경우, 그리고 각각 (c)  $\log N(1, e^{0.01})$ , (d)  $\log N(1, e^1)$ 를 따르는 시계열 자료를 표현한 것이다.

본 연구에서는 이러한 과정을 500회 반복 모의실험을 통하여 최종 모의실험을 하였다. 즉, 로지스틱 및 지수 사상 각각에 대해서  $N=100$  개의 자료를 갖는 수열을 500회 반복하여 모의 수열을 생성하였다.

그 결과(Table 2 참조), 먼저 로지스틱 사상에 대해서, 관측된 sign의 92.6 %, run의 92.4 %, turning point의 90.2 %, Kolmogorov-Smirnov(K-S's  $t$ )의 91.0 %, Anderson correlogram(Anderson's  $\gamma$ )의 98.2 %, Kendall's  $\tau$ 의 95.6 % 각각이 표준화 된 signs, runs, turning points, K-S's  $t$ , Anderson's  $\gamma$  그리고 Kendall's  $\tau$ 의 95 % 신뢰구간(confidence interval; CI) 안에 존재 하였다(각각 95% CI= 90.3 ~ 94.9; 90.1 ~ 94.7; 87.6 ~ 92.8 ; 88.5 ~ 93.5; 97.0 ~ 99.4 ; 93.8 ~ 97.4 %).

또한, 로지스틱 사상의 경우에서처럼 지수사상에 대해서도 유사한 결과를 볼 수 있는데(Table 4), 각각의 수열에서 100개의 관측치를 갖는 500회 모의실험 자료에 대하여, 관측된 sign의 95.8 %, run의 96.2 %, turning point의 96.6 %, K-S's  $t$ 의 95.8 %, Anderson's  $\gamma$ 의 94.0 %, Kendall's  $\tau$ 의 95.4 % 각각이 표준화 된 signs, runs, turning points, K-S's  $t$ , Anderson's  $\gamma$  그리고 Kendall's  $\tau$ 의 95 % 신뢰구간(CI) 안에 존재 하였다 (각각 95% CI= 93.1 ~ 96.9; 93.1 ~ 96.9; 95.0 ~ 98.2 ; 94.0 ~ 97.6; 91.9 ~ 96.1 ; 93.1 ~ 96.9 %).

이 실험은 sign test, runs test, turning point test, Kolmogorov-Smirnov test, Anderson correlogram test 그리고 Kendall의  $\tau$  test 등의 기법이 무질서로부터 결정론적 카오스를 구별하는데 유용하지 못함을 의미한다. 왜냐하면, 순수한 500회 모의실험 카오스 자료(각각  $\epsilon_t \sim zero$ )에 대해서, 각각의 6개의 통계량들이 95% 신뢰구간에 포함됨으로서 유의수준  $\alpha=0.05$  에서 무질서(randomness)하다는 귀무가설을 기각하지 못하였기 때문이다. 또한, 순수한 500회 모의실험 카오스 자료에 잡음을 더한

(각각  $M(0, 0.01)$ ,  $M(0, 0.1)$ ,  $M(0, 1)$ )에 대해서도 각각의 6개의 통계량들에 대해 동일한 행태를 보이고 있으며 그 결과 또한 일관성이 없다. 따라서 6개의 검정기법 모두는 무질서한 현상과 카오스 현상을 전혀 식별할 수 없음을 보여주고 있는 것이다.

Chatterjee & Yilmaz(1992)는 이 통계량들을 유용하게 만들기 위해서 다음과 같이 관측된 수열 위에 단순한 위상공간에서의 재구성(reconstruction)을 함으로서 개선될 수 있음을 제안하였다.

$y_1, \dots, y_n$ 을 어떤 관측된 시계열로 표시하자. 수열이 무질서과정(random process)을 독립적으로 따른다는 귀무가설을 검정하고자 할 때, 한 배열로부터 lag를 1로 하여 다음과 같이 나열하자.

$$\begin{pmatrix} y_1, \dots, y_{n-1} \\ y_2, \dots, y_n \end{pmatrix} \tag{1}$$

첫 행에서 원소의 크기와 일치하여 식 (1)에서 열을 재배열하자.  $i$ 번째 가장 작은 관측치를 표시하기 위해  $y_{(i)}$ 를 사용하고 식 (1)의 두 번째 행에서  $j$ 번째 원소를  $i$ 번째 위치로 이동시킨 것을 가리키기 위해  $y_{ji}$ 을 사용해서 식 (2)를 얻는다. 식 (2)는 'lag=1' 위상공간에서의 재구성(reconstruction)을 표시한다.

$$\begin{pmatrix} y_{(1)}, \dots, y_{(n-1)} \\ y_{i_1}, \dots, y_{i_{n-1}} \end{pmatrix} \tag{2}$$

관측치  $y_1, y_2, \dots, y_n$ 이 독립적인(*i.i.d.*) 확률변수의 실측값이고  $n$ 이 클 때, 관측치  $y_{i_1}, \dots, y_{i_{n-1}}$  (식 (2)의 두 번째 행)이 근사적으로 독립적인 확률변수의 실측값으로 가정 할 수 있다. 이 가정은 실제로 Table 1에서 보는 바와 같이 동일한 확률변수를 갖는 수열로서 판단할 수 있음을 보여주었다. 따라서 수열의 무질서 가설을 검정하기 위해서, 식 (2)의 두 번째 행에 상기한 기법 즉, 위상공간에서 재구성을 하여 6개의 통계량에 각각 적용 하였다.

이 절차를 수행하기 위해서 먼저, 길이가 100인 각각 독립적으로 균일분포  $[0, 1]$ 를 따르는

Table 1. Simulation Results for *i.i.d.* Series

Test Statistics	Uniform	Reconstruct. Uniform	Normal	Reconstruct. Normal
Sign test	92.2	95.6	95.2	96.2
Runs test	94.8	95.4	94.2	96.2
Turning points test	93.8	96.0	93.4	98.8
Kolmogorov-Smirnov test	95.8	96.2	92.0	96.4
Anderson correlogram test	93.6	97.6	98.0	92.8
Kendall's $\tau$ test	94.6	96.4	97.8	93.2

Table 2. Simulation Results for logistic Map ( $a=4.000$ )

Test Statistics	$\epsilon_t \sim zero$	$N(0, 0.01)$	$N(0, 0.1)$	$N(0, 1)$
Sign test	92.6	91.4	93.0	95.4
Runs test	92.4	90.2	92.0	95.0
Turning points test	90.2	93.2	94.6	92.6
Kolmogorov-Smirnov test	91.0	94.4	94.0	96.4
Anderson correlogram test	98.2	96.6	97.4	98.4
Kendall's $\tau$ test	95.6	96.4	96.2	97.8

수열과 표준정규분포  $N(0, 1^2)$ 를 따르는 시계열자료를 각각 500개(회)를 생성하여, 각각 6개의 통계량에 대해서 본래의 수열과 또한 재구성된 수열에 적용하였다.

그 결과, Table 1은 독립적인 분포를 따르는(*i.i.d.*) 가설 하에 검정 통계량의 기대치의 95 % 신뢰구간 안에 있는 검정 통계량의 비율(%)을 나타낸 것이다. 그 결과를 살펴보면, 어떠한 검정 통계량도 독립적인 분포를 따르는(*i.i.d.*) 수열로부터 재구성 되어진 수열과 다르지 않으며 또한, 두 기법에 대해 구별할 수 없을 정도의 비율 값을 보였다. 따라서 각각의 검정기법의 적용은 본래의 수열을 이용하든 재구성된 수열을 대상으로 하든 동일한 정보를 갖기 때문에 동일한 조건 하에 검정을 수행한다고 볼 수 있다.

따라서 6가지의 비모수검정기법은 독립적으로  $N(0, \sigma^2)$ 의 분포를 따르는 다른 크기의 측정오차를 갖는 잡음자료에 대해서 각각 로지스틱 및 지수 사상에 대해 순수한 카오스 자료와 이를 위상공간에서 재구성하여 생성된 자료에 각각 적용하였다.

먼저, 본래의 로지스틱 수열과 위상공간에서 재구성된 로지스틱 수열에 대한 분석 결과는 Table 2와 Table 3과 같다. 6종류의 모의실험 자료는 각각 4종류의 대응하는 측정오차  $\epsilon_t$ 가 zero,  $N(0, 0.01)$ ,  $N(0, 0.1)$ ,  $N(0, 1)$ 일 때 적용된 것이다.

상술한 바와 같이 Table 2에서의 결과는 각각의 6가지 검정통계량이 직접적으로 카오스임을 입증할 수 없다는 것을 설명한다. 그러나 만약 위상공간에서 재구성되어진 자료에서 검정 통계량을 적용한다면(Table 3), 분명하게 관측된 수열이 독립적으로 동일한 분포가 아님을 뜻하고 있다. 왜냐하면 잡음(noise)이 없는 카오스자료에서는 signs, runs, turning



Table 3. Simulation Results for Reconstruction Logistic Map ( $a=4.000$ )

Test Statistics	$\epsilon_t \sim zero$	$N(0, 0.01)$	$N(0, 0.1)$	$N(0, 1)$
Sign test	0.0	2.8	30.8	95.6
Runs test	0.0	0.0	0.0	94.8
Turning points test	0.0	16.0	90.8	91.4
Kolmogorov-Smirnov test	0.0	20.2	91.2	95.0
Anderson correlogram test	63.8	80.2	91.4	95.4
Kendall's $\tau$ test	75.8	83.8	93.4	95.2

Table 82. Simulation Results for Exponential Map ( $r=3.731$ )

Test Statistics	$\epsilon_t \sim zero$	$\log N(1, e^{0.01})$	$\log N(1, e^{0.1})$	$\log N(1, e^1)$
Sign test	95.8	99.4	93.6	96.2
Runs test	96.2	99.0	92.0	96.8
Turning points test	96.6	99.8	98.6	95.2
Kolmogorov-Smirnov test	95.8	100.0	98.2	96.4
Anderson correlogram test	94.0	100.0	100.0	100.0
Kendall's $\tau$ test	95.4	100.0	100.0	100.0

Table 83. Simulation Results for Reconstruction Exponential Map ( $r=3.731$ )

Test Statistics	$\epsilon_t \sim zero$	$\log N(1, e^{0.01})$	$\log N(1, e^{0.1})$	$\log N(1, e^1)$
Sign test	0.0	3.4	49.4	82.6
Runs test	0.0	0.0	0.0	2.6
Turning points test	0.0	0.0	13.4	97.4
Kolmogorov-Smirnov test	0.0	7.4	36.6	97.8
Anderson correlogram test	54.8	62.6	92.4	100.0
Kendall's $\tau$ test	94.8	88.6	93.8	100.0

points, K-S's  $t$ 의 표준화된 개수가 95 % 신뢰구간에 어떠한 검정통계량 값도 포함하지 않기 때문이다. 또한, Anderson's  $\gamma$  그리고 Kendall's  $\tau$ 에서는 그 비율이 각각 63.8, 75.8 %로 다소 개선된 효과가 있어 보인다. 더욱이, 'run'의 표준화된 개수의 95 % 신뢰구간이 잡음(noise)이 충분히 크지 않은 경우( $N(0, 0.01)$ ,  $N(0, 0.1)$ )에는 어떤 검정 통계량 값도 포함하지 않기 때문에 무질서한 현상과 카오스 현상을 식별할 수 있음을 보여 주고 있다.

또한, sign test, turning points test 그리고 Kolmogorov-Smirnov test는 수열의 비 무질서(non-randomness)를 감지해 낼 수는 있으나, 매우 작은 잡음일지라도 잡음이 존재한다면 이 기법은 무의미 하다는 것을 보여주고 있다. 그리고 자료의 추세를

인지하는데 Anderson correlogram test 와 Kendall's  $\tau$ 가 일반적으로 많이 활용되지 만,

위 경우에는서는 무질서로부터 카오스를 구별하는 데에는 유용하지 못하다는 것을 나타내고 있다.

다음으로 지수사상에 대한 모의실험 결과는 Table 4와 Table 5에서 제시하였다. 로지스틱사상의 경우와 유사하게 Table 4와 Table 5에서의 4가지 모의실험 자료는 각각 오차  $\varepsilon_t$ 가  $\varepsilon_t \sim \text{zero}$  ( $\text{multiplier} = 1$ ) 그리고 log-normal 분포  $\log N(1, e^{0.01})$ ,  $\log N(1, e^{0.1})$ ,  $\log N(1, e^1)$ 를 따르는 시계열 자료를 대상으로 한 것이다.

그 결과는 로지스틱사상의 경우와 유사하게 나타났는데, 6가지 검정법 중에서 runs test, turning points test 등은 작은 잡음에 대해서도 식별가능성을 보여주었으나, 상대적으로 sign test, Kolmogorov-Smirnov test는 작은 잡음일지라도 무질서와 카오스현상을 식별하는 데에 문제가 생길 수 있다는 것을 나타내었다.

Table 3과 Table 5에서의 결과로부터, runs test는 6가지 검정 방법 중에서 보다 큰 분산이 있는 경우에 유용하다는 것을 알 수 있으며, 상관성에 기초한 Anderson correlogram test 와 Kendall's  $\tau$  test는 무질서와 카오스현상을 식별하는 데에는 한계가 있음을 볼 수 있겠다.

결론적으로 위상공간에서의 재구성(reconstruction) 기법은 낮은 차원의 카오스를 입증하기 위한 것이고 또한, 무질서한 수열을 생성하는 절차를 검정하는 데에도 활용될 수 있는 유용한 방법이라고 하겠다.

#### 4. 결 론

최근까지 카오스 현상 특히, 비선형 동력학시스템의 성질을 규명하는 데에 여러 수학기법들이 제안되고 있는데, 여러 제약조건 즉, 자료의 측정오차(error)와 내재된 잡음(noise) 등으로 인하여 실증적 적용에 있어서 신뢰할 만한 결론을 얻는데 어려움을 안고 있다.

이에 본 연구에서는 저차원의 카오스 현상을 식별하는데 새로운 수치적인 접근법으로서의 위상공간에서 재구성(reconstruction) 기법을 소개하였으며 이는 좀 더 확장된 기법으로서 발전 가능성을 시사한다고 하겠다.

#### 참고문헌

1. Berliner L.M. (1992). Statistics, probability and chaos, *Statistical Science*, 7, 69-90.
2. Chan K.S. and Tong H. (1994). A note on noisy chaos, *Journal of the Royal Statistical Society*, Ser. B. 56, 301-311.
3. Chatterjee S. and Yilmaz M. (1992). Use of estimated fractal dimension in model identification for time series, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, 41, 129-141.
4. Chatterjee S., and Yilmaz M. (1992). Chaos, fractals and statistics, *Statistical Sciences*, 7, 49-68.
5. Clarke, R.T. (1973). *Mathematical Models in Hydrology, Irrigation and Drainage Paper*, Vol. 19, Food and Agriculture Organization of the United Nations, Rome, Italy.
6. Conover, W.J. (1998). *Practical Nonparametric Statistics*. Wiley, 3rd edition.
7. Gibbons J.D. and Chakraborti S. (1992). *Nonparametric statistical inference*, New York: Marcel Dekker.
8. Keeping, E.S. (1966). *Distribution Free Methods in Statistics.*, in *Proceedings of Hydrology Symposium*, No. 5, McGill University, Canada.
9. Kotz S. and Johnson N.L. (1986). *Encyclopedia of Statistical Sciences*. Vol. 7, Wiley, New York, 555-562.
10. Lai D. and Chen G. (1995). Computing the distribution of the Lyapunov exponent from time series: the one-dimensional case study, *International Journal of Bifurcations and Chaos*, 5, 1721-1726.
11. Lele S. (1994). Estimating functions in chaotic systems, *Journal of the American Statistical Association*, 89, 512-516.

12. May R.M. (1987). Chaos and the dynamics of biological populations, *Proceedings of the Royal Society, London, A*, 413, 27-44.
13. Tong H. (1990). *Non-linear Time Series: A Dynamical System Approach*, Oxford University Press, New York.
14. Yevjevich, V. (1972). *Stochastic Processes in Hydrology*, Water Resources Pub., Fort Collins, Colorado.