비가산 셀룰라 오토마타의 상태에 관한 분석

최언숙* · 조성진** · 황윤희** · 표용수** · 김한두*** · 허성훈****
*영산대학교 · **부경대학교 · ***인제대학교 · ****김해대학

The Analysis of Nonadditive Cellular Automata States

Un-Sook Choi* · Sung-Jin Cho** · Yoon-Hee Hwang**
Yong-Soo Pyo** · Han-Doo Kim*** · Seong-Hun Heo****
* Youngsan Univ. · ** Pukyong National Univ. · *** Inje Univ. · **** Gimhae College
E-mail : choies@mail1.pknu.ac.kr

요 약

본 논문에서는 3-이웃 비가산 셀룰라 오토마타의 도달가능한 상태와 도달 불가능한 상태의 특성을 분석하고 도달 가능한 상태와 불가능한 상태를 검사하는 효과적인 방법을 제안한다.

ABSTRACT

In this paper we analyze the characterization of reachable states and nonreachable states of 3 -neighborhood nonadditive cellular automata. And we propose the effective scheme to identify reachable states and nonreachable states.

I. 서 론

셀룰라 오토마타(이후 CA)는 동역학계를 해석하는 한 방법으로 Neumann에 의해 최초로 연구되었다. 이후 CA는 물리체계의 모델링을 위해 주로 사용되었다. Wolfram은 각 CA 셀이 0과 1 두 상태를 가지고, 3-이웃 상호연결을 만족하는 간단한 구조를 제안하였다.

Wolfram[1]은 CA에서 상태의 도달 불가능 조건을 확인하기 위한 방법을 제안하였으며, Wuensche[2]는 도달 불가능 조건을 검증하기 위해서 확장될 수 있는 하나의 CA 상태의 직전자들을 구하는 방법을 제안하였으나, 이 접근의 복잡도는 고려하지 않았다.

본 논문에서는 3-이웃 hybrid CA의 도달 가능 상태와 도달불가능 상태의 특성을 조사하고, 선형시간에 도달가능 상태와 도달불가능 상태를 검증할 수 있는 트리를 구성하고 분석한다.

II. Cellular Automata

CA란 이산 시간의 동적 시스템으로 셀이라는 기본 단위의 배열로 이루어진다. 이 시스템에서 셀의 다음 상태는 어떤 규칙에 따라 정해진다. 즉, 각 셀들은 자기 자신과 이웃 셀의 함수 값에 의해 다음 상태가 결정되어 동시에 갱신된다.

3개의 이웃을 가지는 CA에 대한 다음 상태전이 함수(state transition function)는 다음과 같이 나타낸다.

$$s_i^{t+1} = f(s_{i-1}^t,\ s_i^t,\ s_{i+1}^t)$$

여기서, s_i^t는 시간 t에서 i번째 셀의 상태를 나타내고, f는 결합논리를 가지는 함수이다. f

* 본 연구는 한국과학재단 목적기초연구지원사업(R01-2003-000-10663-0)에 의해 수행되었습니다.

는 3개의 변수를 가지는 부울함수로서
$f: \{000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111\} \rightarrow \{0, 1\}$
이다. 그러므로 다음 상태 전이함수 f는 2^{2^3}, 즉 256개가 있으며 이것을 CA의 규칙(rule)이라고 한다. 예로서, 규칙 60, 150과 75는 표 1과 같은 전이함수로 정의된다.

현재 상태	111	110	101	100	011	010	001	000	규 칙
다음 상태	0	0	1	1	1	1	0	0	60
다음 상태	1	0	0	1	0	1	1	0	150
다음 상태	0	1	0	0	1	0	1	1	75

[표 1] 규칙 60, 150, 75에 대한 진리표

여기서 첫 행은 시간 t에서 인접한 세 개의 셀들의 가능한 8가지 상태의 배열이고 다음 행들은 시간 $t+1$에서 i번째의 셀의 갱신된 상태이다. 두 번째 행의 다음 상태 결과를 이진법의 수로 간주하여 이진법의 수 (00111100)를 십진법의 수로 변환하면 60이므로 이 함수를 규칙 60, 세 번째 행은 이진법의 수 (10010110)를 십진법의 수로 변환하면 150이므로 규칙 150이라 한다. XOR 논리란 두 개의 입력 중에서 하나의 입력이 1인 동시에 다른 하나의 입력이 0인 경우에만 출력의 논리 값이 1이 되는 논리연산 기능을 말한다. 규칙 60과 규칙 150에 대한 결합논리는 다음과 같이 XOR 논리인 $\oplus$의 식으로 나타낼 수 있으나, 규칙 75는 XOR 논리로 나타낼 수 없다.

규칙 60 : $s_i(t+1) = s_{i-1}(t) \oplus s_i(t)$
규칙 150 : $s_i(t+1) = s_{i-1}(t) \oplus s_i(t) \oplus s_{i+1}(t)$

표 1에서 다음 상태의 8-비트 이진표현에서 0과 1의 개수가 같은 규칙을 **균형이 잡힌 규칙**(balanced rule)이라 하고, 그렇지 않으면 **균형이 깨진 규칙**(unbalanced rule)이라 한다.[3] 예를 들어, 표 1의 규칙들은 균형이 잡힌 규칙이나, 규칙 171은 이진표현 (10101011)에서 1의 개수와 0의 개수가 다르므로 균형이 깨진 규칙이다. 표 1의 첫 번째 행의 각 열을 RMT(rule min term)이라 부른다. 주어진 진리표에서 열 010은 두 번째 RMT이며, 이 RMT에 대응하는 다음 상태는 규칙 60과 150에서는 1, 규칙 75에서는 0이다.

CA는 셀의 배열상태에 따라 1차원 CA, 2차원 CA, 3차원 CA로 분류한다. CA의 각 셀에 적용되는 규칙이 모두 동일하면 uniform CA라 하고 2개 이상이면 hybrid CA라 한다. 적용되는 규칙의 논리에 따라 가산 CA와 비가산 CA로 나뉜다. 가산 CA는 모든 셀의 규칙이 XOR논리로만 이루어진 경우 선형 CA라 하고, XOR과 XNOR논리의 조합으로 이루어진 경우 여원 CA라 한다. 비가산 CA는 셀들의 규칙이 AND-OR 논리로 이루어진 CA이다.

CA는 상태전이 그래프의 형태에 따라 그룹 CA와 비그룹 CA로 분류된다. 그룹 CA는 모든 셀의 상태가 몇 개의 사이클을 이루며 반복되는 CA이고, 비그룹 CA는 그룹 CA가 아닌 CA이다. 그룹 CA는 모든 셀의 상태가 몇 개의 사이클을 이루며 반복되는 CA로서 임의의 한 상태에 대한 이전상태가 유일하다. 이와 달리 비그룹 CA는 상태전이 그래프가 트리 구조를 이루고 있으며, 상태전이 함수에 의해 얻어질 수 있는 상태인 도달 가능한 상태와 상태전이 함수에 의해 나타날 수 없는 도달 불가능한 상태로 나누어진다. 비그룹 CA에는 임의의 한 상태에 대한 이전상태가 존재하지 않거나 두 개 이상이다.

III. 도달 가능/불가능 상태의 분석

주어진 CA에서 상태 x가 도달 가능한 상태인지 도달 불가능한 상태인지를 밝히기 위해서는 x의 직전자를 구하는 방법을 알아야 한다. 우선, 상태 x가 도달 가능한 상태임을 예측할 수 있는 조건을 구해보자.

<예 1> 전이규칙이 <105, 157, 71, 65>인 CA에서 상태 1100(12)을 생각하여, 이 상태가 도달 가능한 상태라고 가정하고, 표 2에서의 규칙들의 RMT로부터 12의 직전자를 구해보자. CA에서 첫 번째 셀은 왼쪽 이웃의 상태와 마지막 셀의 오른쪽 이웃의 셀은 0으로 간주하기 때문에 일부 RMT들이 다음 생태에 영향을 주지 않으므로 관심을 두지 않도록 「×」을 이용하여 표현한다.

현재 상태	111	110	101	100	011	010	001	000	규 칙
첫 번째 셀	×	×	×	×	1	0	0	1	105
두 번째 셀	1	0	0	1	1	1	0	0	157
세 번째 셀	0	1	0	0	0	1	1	1	71
네 번째 셀	×	1	×	0	×	0	×	1	65

[표 2] 규칙 105, 157, 71, 65에 대한 진리표

상태 1100의 첫 번째 비트 1을 얻기 위해서는 CA의 가장 왼쪽 셀인 규칙 105의 0번째와 3번째 RMT가 표 2에서 보는바와 같이 0으로 주어졌기 때문에, 0번째 또는 3번째 RMT에서 유도되어야 한다. 이러한 두 개의 RMT를 $x_1 = \{0, 3\}$이라 적는다.

다음으로, 규칙 157에서 두 번째 비트 1을 얻으

려면, 가능한 RMT의 집합 P_2는 앞서 구한 집합 x_1의 RMT 중 왼쪽 비트를 제거하고 오른쪽에 0또는 1을 붙여 만들 수 있는 RMT의 집합이다. 즉, P_2={ 000(0), 001(1), 110(6), 111(7)}이다. 또한 규칙 157에서 얻고자 하는 상태 1에 대응하는 RMT의 집합 R_2는 R_2={010(2), 011(3), 100(4), 111(7)}이다. 따라서 가능한 RMT의 집합 x_2는 $P_2 \cap R_2$ ={7}이다. 같은 방법으로 규칙 71에 대하여서도 가능한 RMT들의 집합은 P_3={6, 7}이고 R_3={3, 4, 5, 7}이다 따라서 $x_3 = \{7\}$ 이다. 마지막으로 규칙 65에 대하여서도 P_4={6, 7}이고, R_4={2, 4}이다. 따라서 $x_4 = \phi$이다. 상태 1100(2)의 직전자는 없으므로 도달 불가능한 상태이다. RMT들의 전이를 나타낸 다음의 표 2를 활용하여 P_j를 구할 수 있다. 표에 따르면 i 번째 셀 규칙에서 선택된 RMT가 k이면, $(i+1)$ 번째 셀은 다음의 RMT는 $2k \pmod 8$ 또는 $(2k+1) \pmod 8$로 바뀌게 됨을 알 수 있다. 이를 이용하여 CA 상태 x의 직전자의 존재성을 표 3의 알고리즘으로 확인할 수 있다.

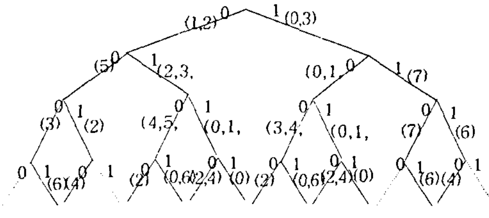
○ **입력**: 규칙 $[n]$ [8], 상태 $[n]$, n.
○ **출력** : 도달 불가능이면 1, 나머지는 0
Step1 :규칙 $[1][j]$ = 상태 $[1]$, $j = 1, 2, 3, 4$를 만족하는 x_1을 구한다. 만약 $x_1 = \emptyset$이면, 1
Step2 : $i = 2$에서 $n-1$까지 (a) $P_i = \{2k, 2k+1 \bmod 2 \mid k \in x_{i-1}\}$ (b) $R_i = \{j\}$, j는 다음을 만족한다. 규칙 $[i][j]$ = 상태 $[j]$, $j = 0, 1, \cdots, 7$ (c) $x_i = P_i \cap R_i$ (d) 만약 $x_i = \emptyset$이면, 1 로 답하라.
Step 3 : (a) $P_n = \{2k, 2k+1 \bmod 2 \mid k \in x_{n-1}\}$ (b) $R_n = \{j\}$, j는 다음을 만족한다. 규칙 $[i][j]$ = 상태 $[j]$, $j = 0, 2, 4, 6$ (c) $x_n = P_n \cap R_n$를 구한다. (d) 만약 $x_n = \emptyset$이면, 1로 답하라.
Step 4: 도달 가능 상태이다. 0으로 답하라.

[표 3] 도달 가능/불가능 상태 판정 알고리즘

IV. 도달 가능/불가능 트리구성

도달 가능 트리의 각 노드는 최대 2개의 모서리를 가질 수 있다. n 셀 CA에서의 레벨의 수는 $(n+1)$이다. 단 노드의 수는 도달 가능 상태의 개수를 나타낸다. n 비트 이진 문자열을 나타내는 근노드에서부터 단노드까지의 모서리들로 이루어진 수열은 도달 가능 상태를 나타낸다.

예 1에서 주어진 전이규칙이 <105, 157, 71, 65>인 CA의 도달 가능 트리를 만들면 그림 1과 같다.



[그림 1] 규칙 <105, 157, 71, 65>인 CA의 도달 가능 트리

표 2의 첫 번째 규칙 105에 대해서 RMT 1과 2는 0으로, RMT 0과 3은 1로 나타나므로, 그에 대응하는 RMT들은 각각 왼쪽 모서리, 오른쪽 모서리로 나타낸다. 유사하게, 다음 상태의 첫 번째 비트가 RMT 1 또는 2에 의해서 결정된다면, 다음 상태의 두 번째 비트는 규칙 157에서 RMT들 2, 3, 4 또는 5에 따라 결정된다(표 2 참조). 이 네 개의 RMT 값들은 규칙 157에 대해 5는 0으로, 2, 3, 4는 1로 나타나는데, 이 RMT들을 각각 두 번째 노드의 왼쪽 모서리 ( )와 오른쪽 모서리 ( )에 기재한다. 같은 방법으로 마지막 셀까지 하면 그림 1과 같은 전이규칙이 <105, 157, 71, 65>인 CA의 도달 가능 트리를 구성할 수 있다. 그림에서 0000, 0011, 1100, 1111은 도달 불가능한 상태임을 보여준다. 실제로 앞에서 살펴본 바와 같이 1100의 직전자는 존재하지 않음을 그림에서도 알 수 있다.

<정리 1> n-셀 CA C 의 도달 가능 트리를 $\mathbb{T}$라 할 때, C가 그룹 CA일 필요충분조건은 $\mathbb{T}$는 완전 이진트리이다.

이 정리로부터 다음의 따름정리를 얻는다.

<따름정리 2> CA의 도달 가능 트리 $\mathbb{T}$의 각 모서리가 정확히 두 개의 RMT를 따르면, $\mathbb{T}$는 완전 이진트리이다.

이론의 전개를 위해 다음과 같은 새로운 개념을 정의한다.

<정의> (1) CA의 도달 가능 트리 $\mathbb{T}$에 대하여 $\mathbb{T}$가 중앙을 지나는 수직선을 중심으로 좌측과 우측이 선대칭을 이루면, $\mathbb{T}$를 **대칭트리**(symmetric tree)이라고 한다.

(2) 하나의 CA C가 다음의 세 조건 중에서 적어도 하나를 만족할 때, C를 **균형이 깨진 규칙**을 갖는(having unbalanced rule) CA라고 정의한다 ;

① 첫 번째 셀의 RMT들 0, 1, 2과 3가 균형이 깨진 경우, 즉 그들의 다음 상태의 0과 1의 개수가 다르다.

② 마지막 셀의 RMT들 0, 2, 4와 6의 다음 상태의 0과 1의 개수가 다르다.

③ 첫 번째와 마지막을 제외한 셀 중에는 적어도 하나의 균형이 깨진 규칙이 있다.

이와는 반대로, 균형이 깨진 규칙을 갖지 않는 CA를 **균형이 잡힌 규칙을 갖는** CA라고 정의한다.

<예 2> 전이규칙이 각각 <177, 105, 90, 65>, <105, 177, 171, 65>, <105, 90, 150, 171>인 CA들은 균형이 깨진 규칙을 갖는 CA이다. 그러나 규칙이 <105, 195, 85, 13>인 CA는 균형이 잡힌 규칙을 갖는 CA이다. 실제로, 전이규칙이 <177, 105, 90, 65>인 CA의 진리표는 다음의 표 4와 같으므로, 이는 균형이 깨진 규칙을 갖는 CA이다.

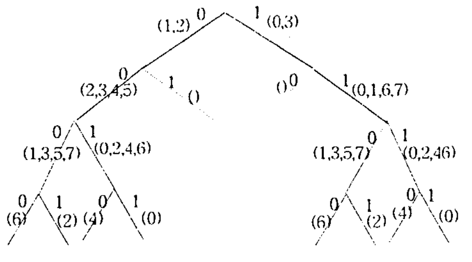
현재 상태	111	110	101	100	011	010	001	000	규 칙
첫 번째 셀	×	×	×	×	0	0	0	1	177
두 번째 셀	0	1	1	0	1	0	0	1	105
세 번째 셀	0	1	0	1	1	0	1	0	90
네 번째 셀	×	1	×	0	×	0	×	1	65

[표 4] 규칙<177, 105, 90, 65>인 CA의 진리표

전이규칙이 <105, 195, 85, 13>인 CA의 진리표는 표 5와 같다. 이는 균형이 잡힌 규칙을 갖는 CA이다. 이 CA의 도달 가능 트리를 그려보면 그림 2와 같다. 그림에 의하면 전이규칙이 <105, 195, 85, 13>인 CA는 균형이 잡힌 규칙을 갖는 CA로, 그 도달 가능 트리는 대칭이나 완전이진 트리는 아니다. 이 그림은 01과 10으로 시작하는 모든 상태는 직전자를 갖지 않음을 보여주고 있다.

현재상태	111	110	101	100	011	010	001	000	규 칙
첫 번째 셀	×	×	×	×	1	0	0	1	105
두 번째 셀	1	1	0	0	0	0	1	1	195
세 번째 셀	0	1	0	1	0	1	0	1	85
네 번째 셀	×	0	×	0	×	1	×	1	13

[표 5] 규칙 <105, 195, 85, 13>인 CA의 진리표



[그림 2] 규칙 <105, 195, 85, 13>인 CA의 도달 가능 트리

<정리 3> 균형이 깨진 규칙을 갖는 CA는 비그룹 CA이다.

정리 3의 역은 일반적으로 성립하지 않는다.

예 2에서의 전이규칙 〈105, 195, 85, 13〉을 갖는 CA는 비그룹 CA이나 균형이 잡힌 규칙을 갖는 CA이다.

<정리 4> 균형이 잡힌 규칙을 갖는 CA의 도달 가능 트리는 항상 대칭이다.

V. 결 론

본 논문에서는 256개의 모든 전이규칙이 가능한 비가산 hybrid CA에서 도달가능 또는 도달불가능 상태를 효과적으로 검증하는 방법을 제안하고, 도달 가능 트리를 구성하여 주어진 전이규칙에 대하여 도달 가능한 상태와 도달 불가능한 상태를 모두 찾을 수 있음을 보였다. 또한 도달 가능 트리의 형태에 따라 CA를 특성화 하였다.

참고문헌

[1] S. Wolfram, O. Martin and A.M. Odlyzko, *Algebraic properties of cellular automata,* Communications in Mathematical Physics, 93(1984), 219~258.

[2] A. Wuensche, *Attractor basins of discrete networks,* Cognitive Science Research Paper, The university of Sussex, 1997.

[3] S. Das, B.K. Sikdar and P.P. Chaudhuri, *Characterization of reachable/nonreachable cellular automata states,* ACRI 2004, LNCS 3305, Springer-Verlag, 2004, 813~822.