

타원체의 역방향 산란 해석

심 재륜

부산외국어대학교 디지털정보공학부

High-Frequency Analysis of Electromagnetic Backscattering from an Ellipsoid

Jaeruen Shim

Division of Digital Information Engineering, Pusan University of Foreign Studies

E-mail : jrshim@pufs.ac.kr

요 약

대표적인 이중곡면 산란체인 타원체를 표준 구조물로 설정하여 역방향(backscattering)에서의 고주파 전자파 산란 해석을 위한 creeping wave를 구하는 방법에 대해 알아보았다. 타원체는 비행기나 미사일 형태의 몸체를 모델링하는 기본 구조물이다. 시뮬레이션으로 타원체 표면에서의 geodesic path의 결과를 제시하였다.

ABSTRACT

In this study, an efficient algorithm for the numerical search of the geodesic path of the creeping wave on a doubly curved surface is developed. The ellipsoid as a doubly curved surface is studied because of its three dimensional nature in that it can be used to simulate the body of an aircraft, or a missile body. Numerical result of the geodesic path on an ellipsoid is given.

키워드

고주파 산란 해석, 타원체, creeping wave, geodesic path

1. 서 론

본 연구는 고주파 방법의 ray theory에 바탕을 둔 GTD/UTD (Geometrical Theory of Diffraction/Uniform GTD)의 해석에 있어서, 곡면에서의 회절파인 creeping wave의 진행경로에 대해 알아보고자 한다[1]. 이를 위해 대표적인 이중곡면을 갖는 타원체(ellipsoid)를 기본 산란체로 설정한다.

GTD는 1951년 Keller[2]에 의해 제안된 후 많은 발전을 거듭하여 GTD의 uniform한 형태인 UTD로 발전되었고, GTD와 MM(Moment Method)의 혼합 형태인 Hybrid 방법으로도 사용되고 있다. GTD는 산란 형상의 물리적인 의미를 쉽게 파악할 수 있고 산란체의 크기가 큰

복잡한 구조물의 산란 해석에 유리하다. 또한 회절 현상이 산란체의 국부적인 현상에 국한한다는 최대 장점으로 인해 복잡한 구조의 산란체에 몇몇 간단한 표준구조물의 조합으로 모델링하여 복잡한 구조의 산란값을 정확하게 계산할 수 있다.

본 연구의 주된 관심인 creeping wave는 smooth convex surface 구조에서의 회절파이다 [3]. Creeping wave는 그림 1에서 보듯이 source로부터 입사된 전자파가 shadow 영역으로 진행하면서 에너지를 방출한다[4].

II. 타원체의 기하학적 특징

이중곡면을 갖는 타원체에서 creeping wave의

진행경로인 geodesic path를 찾기 위해서는 타원체에 대한 기본적인 몇몇 미분기하학적 특성을 알아야 한다.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2)$$

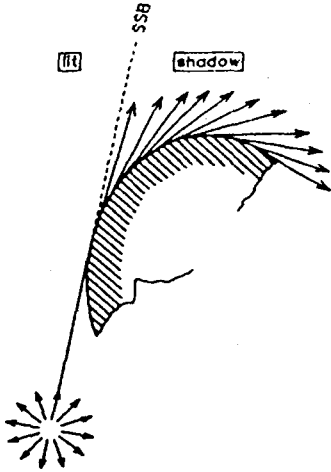


그림 1 Creeping wave의 개념

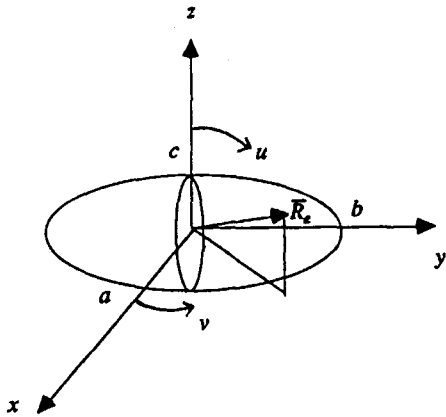


그림 2 타원체의 기하학적인 구조

그림 2는 타원체의 구조를 보여준다. 타원체의 일반 방정식은 다음과 같다[5].

$$\bar{R}_e(u, v) = \hat{x} a \cos v \sin u + \hat{y} b \sin v \sin u + \hat{z} c \cos u \quad (1)$$

식 (1)에서 u 와 v 는 parametric angle이다. 그리고, 직각 좌표계에 의한 타원체의 일반방정식은 다음과 같다.

식 (2)에서 $a=b=c$ 인 경우는 sphere를 나타내고, $a=b \neq c$ 인 경우는 spheroid를 나타내며 $a \neq b \neq c$ 인 경우가 ellipsoid를 나타낸다.

그림 3은 타원체상의 geodesic path를 따라 진행되는 creeping wave의 예로 입사파가 Q_1 에 도달하여 곡면 표면을 따라 진행되는 creeping wave를 만든 후, Q_2 에서 재 방사되는 경우를 보여준다.

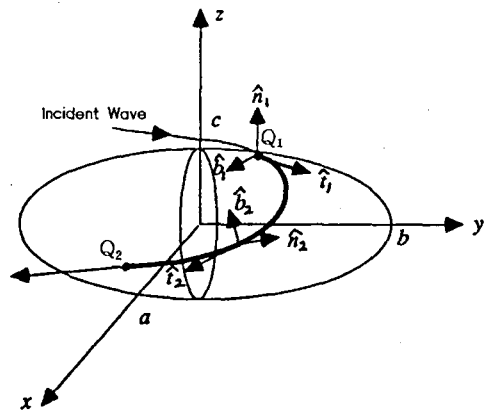


그림 3 Geodesic path를 따라 진행되는 creeping wave의 예

그림 3에서 보듯이 creeping wave는 3개의 기본 단위 벡터인 \hat{t} , \hat{n} , \hat{b} 로 나타낸다. \hat{t} 는 파의 진행을 나타내는 geodesic tangent 벡터이고, \hat{n} 는 outward unit normal 벡터이고, \hat{b} 는 binormal 벡터이다. 위의 3개의 기본 벡터는 다음의 관계를 가진다.

$$\hat{b} = \hat{t} \times \hat{n} \quad (3)$$

\hat{n} 는 산란체의 곡면 표면에 대한 특성으로 \bar{R}_e 에 대한 parametric angle u 와 v 의 편미분으로부터 구할 수 있다.

$$\hat{n} = \frac{\bar{R}_u \times \bar{R}_v}{|\bar{R}_u \times \bar{R}_v|} \quad (4)$$

여기서,

$$\bar{R}_u = \frac{\partial \bar{R}_e}{\partial u} = \hat{x} a \cos v \cos u + \hat{y} b \sin v \cos u - \hat{z} c \sin u \quad (5)$$

$$\bar{R}_v = \frac{\partial \bar{R}_e}{\partial v} = -\hat{x} a \sin v \sin u + \hat{y} b \cos v \sin u \quad (6)$$

임의의 곡면 표면에서 normal curvature κ_n 는 미분기하학의 평면에 대한 제 1차 기본식(first fundamental form)과 제 2차 기본식(second fundamental form)으로 주어진다.

$$\begin{aligned} \kappa_n &= \frac{\text{2nd fundamental form}}{\text{1st fundamental form}} \\ &= \frac{e du^2 + 2f du dv + g dv^2}{E du^2 + 2F du dv + G dv^2} \end{aligned} \quad (7)$$

여기서,

$$E = \bar{R}_u \cdot \bar{R}_u \quad (8)$$

$$F = \bar{R}_u \cdot \bar{R}_v \quad (9)$$

$$G = \bar{R}_v \cdot \bar{R}_v \quad (10)$$

$$e = \bar{R}_{uu} \cdot \hat{n} \quad (11)$$

$$f = \bar{R}_{uv} \cdot \hat{n} \quad (12)$$

$$g = \bar{R}_{vv} \cdot \hat{n} \quad (13)$$

위의 e, f, g 에서 \bar{R}_e 에 관한 u 와 v 의 이차 편미분치는 다음과 같다.

$$\bar{R}_{uu} = \frac{\partial^2 \bar{R}_e}{\partial u^2} = -\hat{x} a \cos v \sin u - \hat{y} b \sin v \sin u - \hat{z} c \cos u \quad (14)$$

$$\bar{R}_{uv} = \frac{\partial^2 \bar{R}_e}{\partial v \partial u} = -\hat{x} a \sin v \cos u + \hat{y} b \cos v \cos u \quad (15)$$

$$\bar{R}_{vv} = \frac{\partial^2 \bar{R}_e}{\partial v^2} = -\hat{x} a \cos v \sin u - \hat{y} b \sin v \sin u \quad (16)$$

κ_n 은 orthogonal direction을 갖는 두 개의 principal curvature κ_1 과 κ_2 로 나타낼 수 있다. 두 개의 principal curvature κ_1 과 κ_2 는 다

음의 이차 방정식의 근으로 나타난다.

$$\kappa^2 - 2\kappa_M \kappa + \kappa_G = 0 \quad (17)$$

$$\kappa_1 = \kappa_M + \sqrt{\kappa_M^2 - \kappa_G} \quad (18)$$

$$\kappa_2 = \kappa_M - \sqrt{\kappa_M^2 - \kappa_G} \quad (19)$$

위의 κ_M 과 κ_G 는 mean curvature와 Gaussian curvature로 제 1차 기본식과 제 2차 기본식의 계수의 함수로 다음과 같다.

$$\kappa_M = \frac{Eg - 2Ff + Ge}{2(EG - F^2)} \quad (20)$$

$$\kappa_G = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} \quad (21)$$

κ_M 은 κ_1 과 κ_2 의 합의 성질을 가지고, κ_G 는 κ_1 과 κ_2 의 곱의 성질을 가진다.

$$\kappa_M = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \quad (22)$$

$$\kappa_G = \kappa_1 \cdot \kappa_2 \quad (23)$$

III. Geodesic 방정식

일반적으로 geodesic 방정식은 다음의 두식을 만족해야 한다[5].

$$\frac{d^2 u}{ds^2} + \Gamma_{11}^1 \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2\Gamma_{12}^1 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 0 \quad (24)$$

$$\frac{d^2 v}{ds^2} + \Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{ds} \right)^2 + 2\Gamma_{12}^2 \frac{du}{ds} \frac{dv}{ds} + \Gamma_{22}^2 \left(\frac{dv}{ds} \right)^2 = 0 \quad (25)$$

여기서,

$$ds^2 = d\bar{R} \cdot d\bar{R} = Edu^2 + 2F du dv + Gdv^2 \quad (26)$$

$$E = a^2 \cos^2 v \cos^2 u + b^2 \sin^2 v \cos^2 u + c^2 \sin^2 u \quad (27)$$

$$F = (b^2 - a^2) \sin v \cos v \sin u \cos u \quad (28)$$

$$G = a^2 \sin^2 v \sin^2 u + b^2 \cos^2 v \sin^2 u \quad (29)$$

Christoffel symbol Γ_{jk}^i 는 평면의 제 1차 기본식의 계수 E, F, G 와 그것의 u 와 v 에 대한 일차 편미분의 함수이다. 위의 geodesic 방정식의 Christoffel symbol Γ_{jk}^i 는 다음과 같이 정의된

다[5].

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)} \quad (30)$$

$$\Gamma_{12}^1 = \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)} \quad (31)$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)} \quad (32)$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{2EF_u - EE_v + FE_u}{2(EG - F^2)} \quad (33)$$

$$\Gamma_{12}^2 = \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)} \quad (34)$$

$$\Gamma_{22}^2 = \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)} \quad (35)$$

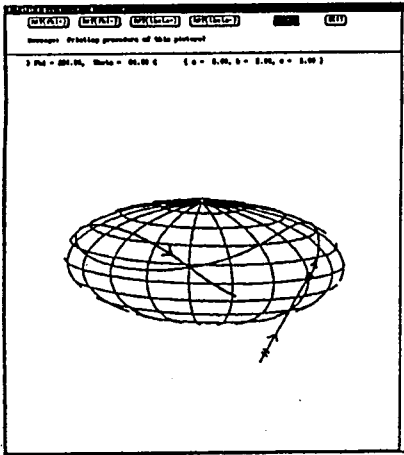


그림 4 Geodesic path의 계산 결과
 (Source direction $\theta_i = 135^\circ$, $\phi_i = 270^\circ$
 Viewing angle $\theta_v = 81^\circ$, $\phi_v = 324^\circ$
 $a = 3\lambda$, $b = 2\lambda$, $c = 1\lambda$)

몇몇 간단한 계산 과정을 거치면 새로운 형태의 geodesic 방정식을 다음과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{d^2u}{dv^2} = \Gamma_{11}^2 \left(\frac{du}{dv}\right)^3 + (2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^1) \left(\frac{du}{dv}\right)^2 + (\Gamma_{22}^2 - 2\Gamma_{12}^1) \left(\frac{du}{dv}\right) - \Gamma_{22}^1 \quad (36)$$

$$\frac{d^2v}{du^2} = \Gamma_{22}^1 \left(\frac{dv}{du}\right)^3 + (2\Gamma_{12}^1 - \Gamma_{22}^2) \left(\frac{dv}{du}\right)^2 + (\Gamma_{11}^1 - 2\Gamma_{12}^2) \left(\frac{dv}{du}\right) - \Gamma_{11}^2 \quad (37)$$

그림 4는 위의 알고리즘을 이용하여 구한 geodesic path의 결과이다.

IV. 결 론

복잡한 구조물은 개별 표준 구조물의 조합으로 모델링이 가능하므로 본 연구의 이중곡면은 일반적인 곡면의 조합에 응용 가능하다. 이중곡면의 대표적인 타원체를 기본 모델로 설정하여 타원체의 미분기하학적 특성을 살펴보고, 이의 연장선으로 geodesic 방정식에 대해 알아보았다. 이를 바탕으로 타원체의 creeping wave에 대한 geodesic path의 예를 보였다.

참고문헌

- [1] R. G. Kouyoumjian, "Asymptotic High-Frequency Methods," *Proc. IEEE*, Vol. 53, pp. 864-876, Aug. 1965
- [2] J. B. Keller, "Diffraction by a Convex Cylinder," *IEEE Trans. on Antenna and Propagations*, Vol. 24, pp. 312-321, 1951
- [3] P. H. Pathak, "Techniques for High-Frequency Problems," in *Antenna Handbook*, ed. by Y. T. Lo and S. W. Lee, Van Nostrand Reinhold Company, New York, 1988
- [4] D. A. McNamara, C. W. I. Pistorius, and J. A. G. Malherbe, "Introduction to the Uniform Geometrical Theory of Diffraction," Artech House, Boston, 1990
- [5] D. J. Struik, *Differential Geometry*, 2nd ed., Addison-Wesley Publishing Co., Massachusetts, 1957