시계열 데이터의 변곡점 검출을 위한 자연관측필터의 최적 설계

김태수* · 전중창**
*위덕대학교·**진주산업대학교

Optimum Design of Natural Observation Filter for Detection of Inflection Point of Time Series Data

Tae-Soo Kim* · Joong-Chang Chun**
*Uiduk University·**Jinju National University
E-mail : tskim@uu.ac.kr

요 약

전자계 신호의 시간 변동량을 추출하여 파형으로 나타내는 동작곡선 등은 그 형태가 매우 복잡하다. 이러한 신호의 관측파형에 대하여 특징을 나타내는 변곡점과 같은 신호의 특정 시간을 정확히 결정하는 것이 중요하다. 이러한 특징을 검출하는데 흔히 필터를 설계하여 사용하게 된다. 특히 잡음이 신호에 중첩될 때 자연관측필터를 적용하면 변곡점 추출이 가능하다. 본 논문에서는 잡음이 혼재될 경우에 변곡점의 양호한 추출을 위하여 최적의 차수의 자연관측필터 설계방법을 제안 한다.

ABSTRACT

The curve shape of the time fluctuation extracted from the electromagnetic signals is very complex. Thus it is important to decide exactly the signal property such as the inflection point for the observed signal. Usually filters elaborately designed are used to detect the signal characteristics. When the noise is added to the signal, the inflection point can be detected using the observation filter. In this paper we propose the design method for a natural observation filter with optimal filter order to extract a definite inflection point for the case of signals with the mixed noise.

키워드

자연관측변환, 변곡점추출, 자연관측필터, 최적설계

Ⅰ. 서 론

파형은 주로 시간의 함수로 기술되며, 이러한 파형의 해석을 행하는데 유력한 수단으로 이용된 푸리에 해석법에서는 파형을 주파수축상의 분포로 해서 등가적으로 표현하는 방식을 취하여 왔다. 그러나 이것을 엄밀하게 실행하려고 하면 과거부터 현재까지 파형의 양상을 주지해야 함은 물론 미래의 형태까지도 알고 있어야 만 된다. 종래, 현재를 특정시하지 않을 경우 푸리에 해석이 널리 이용되어 왔으나, 정보과학의 발달과 함께 인식문제 등을 다루는 신호처리 분야에서는 현재의 시점에서 갖는 문제의 의미가 대단히 중요하게 취급된다. 예를 들어, 현재의 입력 파형의 양상을 파악하는 당면 문제에서는 과거와 미래의 양상보다는 현재를 아는 것이 중요시된다. 이러한 측면에서 푸리에해석법의 비합리성이 지적된다. 그러므로 지금까지 이러한 문제를 해결하기 위하여 running spectrum 개념이 이용되어 왔다.[1] 또한, [1]에서는 파형 중에 포함된 스펙트럼과 이들

의 시간적 추이에 착안하여 푸리에해석법이 가지는 모순점을 보완한 자연관측법 이론을 제안하였다.[1]-[4] 자연관측필터는 파형의 순시적인 변화를 검출하는 경우에 매우 우수한 필터로 제시되고 있고, 이를 Okubo, Takeuchi 가 변곡점 추출에 이용하였다.[5] 또한 변곡점을 추출함에 있어서 자연관측필터가 일반적인 대역통과필터에 비하여 우수함을 입증하였다.[5] 그러나 Okubo, Takeuchi 가 제안한 방법은 중첩되는 잡음에 대하여 한계성을 보여 왔다. 즉, 잡음의 세기가 증가 할수록 필터의 위수인 M을 상대적으로 증가시켜야 된다. 본 논문은 Okubo, Takeuchi 가 제안했던 위수 M을 증가시키지 않고 차분작용소인 차수 만을 소량 증가시켜서 잡음에 영향을 받지 않고 변곡점을 추출할 수 있음을 보인다.

II. 자연관측변환

무한구간($-\infty < t < \infty$)에서 정의된 적분 가능한 실함수의 집합을 H 라하고, 임의의 파형 $x(t) \in H$ 의 푸리에변환을

$$F(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\Omega t} dt \tag{1}$$

라 하자. 그러면 이에 대한 역변환은

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \tag{2}$$

로 주어진다. 또한, H 는 선형공간을 이루며, 그 내적은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\begin{aligned}(f_1, f_2) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) f_2(t)\, dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_1(j\Omega) \overline{F_2(j\Omega)} d\Omega\end{aligned} \tag{3}$$

Norm ||f||를

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)^2 dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |F(j\Omega)|^2 d\Omega \tag{4}$$

로 정의하면, H는 그 위상에 있어서 Hilbert공간으로 된다.

여기서, 원시함수를 $p(\tau) = \frac{1}{s} e^{-\tau/s}$ 라고 하면, 이 $p(\tau)$를 이용한 원시작용소 Γ 및 수반 원시작용소 A 를 다음과 같이 정의한다.[1]

$$\begin{aligned}(\Gamma f)(t) &= \int_0^{\infty} p(\tau) f(t-\tau) d\tau \\ A &= I - \Gamma \quad (I\text{는 단위 작용소})\end{aligned} \tag{5}$$

그리고, Γ 및 A 의 작용소의 기능을 부여하는 필터에 대한 전달함수를 구하면 각각 다음과 같이 표현된다.

$$P(j\Omega) = \int_0^{\infty} p(\tau) e^{-j\Omega\tau} d\tau \tag{6}$$

$$Q(j\Omega) = 1 - P(j\Omega) \tag{7}$$

자연관측법 이론은 관측자가 시시각각 변하는 파형을 유동적으로 관측한다는 점에 착안하여 구성된 이론이다. 즉, 이것은 파형 관측, 패턴인식이란 점에서 고찰하면 파형은 시간의 경과에 따라 계속 존재하지만, 현재에서 일어나는 현상은 과거에 보내져 결국 망각되어져 버리고, 관측자는 현시각의 시점에서 주목하지만, 미래는 그 때가 도래할 때까지는 결코 인식될 수 없다는 측면에서 관측을 행한다. 이러한 파형 관측의 특징을 부여하는 것이 $p(\tau)$이고, 특히, 유한 차수(M차)의 자연관측법을 M위의 자연관측법이라 부르고, 기본관측작용소 $Z_m^{(M)}$은 다음과 같이 정의한다.

$$Z_m^{(M)} = A^m \Gamma^{M-m} \quad (m = 0, 1, \cdots, M) \tag{8}$$

이러한 기본관측작용소에 대한 기능을 부여하는 필터를 기본관측필터라 하고 다음과 같이 그 전달함수를 구할 수 있다.

$$Z_m^{(M)} = \frac{(j\Omega s)^m}{(1 + j\Omega s)^M} \quad (m = 0, 1, \cdots, M) \tag{9}$$

다음은 입력 $x(t) \in H$ 에 대한 기본관측필터의 출력을

$$n_m^{(M)}(t) = (Z_m^{(M)} f)(t) \quad (m = 0, 1, \cdots, M) \tag{10}$$

로 정의하고, 이를 기본관측치계열이라 칭한다. 그러면, 이 정의식에 대한 푸리에변환은

$$N_m^{(M)}(j\Omega) = Z_m^{(M)}(j\Omega) F(j\Omega) \quad (m = 0, 1, \cdots, M) \tag{11}$$

로 주어진다. 따라서, 임의의 파형 $f(t)$와 기본관측치계열에 대하여 다음의 두 등식이 성립한다.

$$\begin{aligned}f(t) &= \sum_{m=0}^{M} \binom{M}{m} n_m^{(M)}(t) \\ \|f(t)\|^2 &= \sum_{m=0}^{M} \binom{M}{m} \|n_m^{(M)}\|^2\end{aligned} \tag{12}$$

III. 변곡점추출을 위한 최적필터 설계

1. 자연관측필터

자연관측법이론에 의하면 입력 신호파형 $f(t)$에 대하여 그 출력 파형을 식(9)와 식(10)과 같이 정의한다.[2]

$$(\Gamma f)(t) = \int_0^{\infty} f(t-\tau) u(\tau) d\tau \tag{13}$$

$$(\Lambda f)(t)=\frac{d}{dt}\int_0^{\infty}f(t-\tau)v(\tau)d\tau \qquad (14)$$

여기서 Γ, Λ 는 다음과 같이 정의되는 함수 $u(t)$, $v(t)$에 대한 선형작용소이다.

$$\int_0^{\infty}u(\tau)d\tau=1,\quad u(\tau)\geq 0 \qquad (15)$$

$$v(\tau)=\int_{\tau}^{\infty}u(t)dt \qquad (16)$$

자연관측변환의 관측계열 $N_m^{(M)}(t)$는

$$N_m^{(M)}(t)=(\Lambda^m\Gamma^{(M-m)}f)(t) \qquad (17)$$

으로 정의되고 이 관측계열의 역변환은 다음 공식으로 구해진다.

$$f(t)=\sum_{m=0}^{M}\binom{M}{m}N_m^{(M)}(t) \qquad (18)$$

$$m=0,1,2,\cdots M$$

여기서 $\Lambda^m\Gamma^{M-m}$는 선형작용소이다. 그리고 $\binom{M}{m}$은 이항치(binomial)를 나타낸다.

식(11)에서 $u(\tau)=\frac{1}{a}e^{-\tau/a}$인 경우에 선형작용소 Λ과 Γ의 전달함수는 각각

$$U(s)=\frac{1}{1+as} \qquad (19)$$

$$V(s)=\frac{as}{1+as} \qquad (20)$$

이다. 또한 선형작용소 $\Lambda^m\Gamma^{M-m}$의 전달함수는

$$H_m^{(M)}(s)=\frac{(as)^m}{(1+as)^M} \qquad (21)$$

이 되고, 이 전달함수 $H_m^{(M)}(s)$에 대하여 디지털필터의 전달함수 $H_m^{(M)}(z)$를 쌍1차 z변환(Bilinear z-transform)에 의하여 구하면 다음과 같다.

$$H_m^{(M)}(z)=\frac{\left(\frac{2a}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^m}{\left(1+\frac{2a}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}\right)^M} \qquad (22)$$

$$H_m^{(M)}(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}=\frac{\left(\frac{2a}{T}\frac{1-e^{-j\omega}}{1+e^{-j\omega}}\right)^m}{\left(1+\frac{2a}{T}\frac{1-e^{-j\omega}}{1+e^{-j\omega}}\right)^M}=\frac{(jC\tan\omega/2)^m}{(1+jC\tan\omega/2)^M} \qquad (23)$$

여기서 $C=2a/T$이고, T는 샘플링시간이다. 따라서 자연관측필터는 유한개의 필터군으로 구성되며 필터의 구조를 다음 그림 1에 나타낸다.

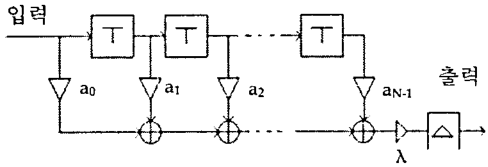

그림 1. 자연관측필터의 구조

그림 1에서 $a_0, a_1, \cdots a_{N-1}$는 이항분포를 나타내는 필터의 계수이고 $\lambda=(1/2)^M$이며 Δ는 차분작용소이다.

2. 최적필터 설계

시계열 관측파형을 식(10)으로부터 샘플링한 이산수열을 $x(n)$이라고 할 때 $n_n^M(n)$을 $x(n)$의 기본관측치로 본다. 여기서 M을 위수로 하여 m차 자연관측필터는 m계 차분치로부터 M계 차분치까지 합성에 의해서 정의되어 진다. 필터의 설계를 위해서 사용되는 신호와 잡음을 다음식에 나타낸다.

$$x(n)=\begin{cases}0 & n<250\\ 1-e^{-(n/50-5)^2} & n\geq 250\end{cases} \qquad (24)$$

$$y(n)=x(n)+r(n) \qquad (25)$$

$$r(n)=0.2\times rand(n)-0.1$$

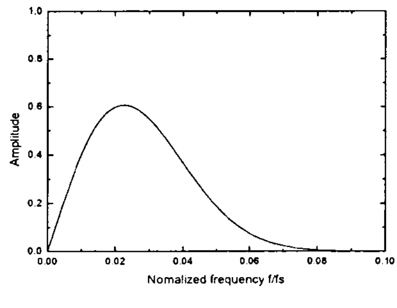

그림 2. 자연관측필터의 진폭특성(M=200, m=1)

그림 2는 식(23)에서 M=200, m=1의 경우의 자연관측필터의 진폭특성을 나타낸다. 잡음(noise : rand(n))이 혼재된 신호의 출력에서 변곡점을 찾기 위해서 M을 50에서 400까지 증가시키고 차분 m을 1에서 3까지 증가시키며 변곡점의 오차 0.1e-03 범위 내를 최적 계수로 하여 정한 결과 식(25)의 잡음지수의 경우 M=400이고 m=1차인 경우와 M=200이고 m=2인 경우 오차범위 내에 든다. 이러한 결과를 그림 3, 그림 4, 그림 5에 각각 나타낸다.

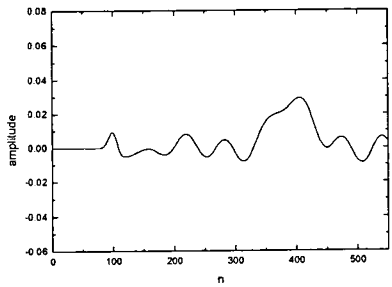

그림 3. 자연관측필터의 출력(N=200,m=1)

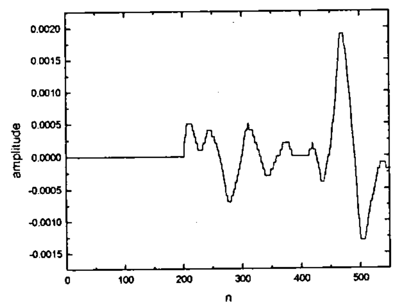

그림 4. 자연관측필터의 출력(N=200, m=2)

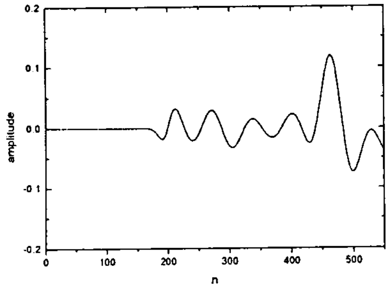

그림 5. 자연관측필터의 출력(N=400, m=1)

IV. 결론

자연관측필터를 적용하여 신호의 특징인 변곡점을 정확히 검출하는 기법으로 기존의 방법은 잡음이 중첩될 때 정확한 변곡점을 검출하기 위해서 필터의 위수 M값 만 증가시켰으나 필터의 위수 M을 낮추고 차분 수를 증가시켜서 같은 효과를 얻을 수 있는 방법을 고려하여 시뮬레이션을 행한 결과 제안한 방법이 기존의 방법에 비하여 차분 수는 2차 증가되나 위수를 400에서 200으로 감소시킬 수 있는 결과를 확인할 수 있었다.

참고문헌

[1] Taizo IIJIMA, "Theoretical Study on Reconstruction of Wave Forms by a Natural Observation Filter", Journal of ICICE (A), Vol. J74-A, no. 3, pp. 430-434, March. 1991

[2] Taizo IIJIMA, "Acception and Generation of Porynomial Wave Forms by a Natural Observation Filter", J74-A, no.3, pp442-447, March, 1991

[3] Taizo IIJIMA and Manoru IWAKI," Fundamental Theory of Natural Observation Method with Complete Reconstruction Property by Finite Sum -Natural Observation Theory of Normal type- ", Journal of ICICE (A), Vol. J79-A, no. 1, pp. 77-87, Jan. 1996

[4] Manoru IWAKI and Taizo IIJIMA, "Natural Observation Method Discrete-Time Waveforms", Journal of IEICE (A), Vol. J79-A, no. 3, pp. 728-735, March. 1996

[5] Kan OKUBO and Nobunao TAKEUCHI, "Detection of Inflection Point of Time Series Data by Natural Observation Filter", Journal of ICICE (A), Vol. J86-A, no. 11, pp. 1170-1178, November. 2003