

트랜섬 선미를 가지는 선형의 비선형 포텐셜 유동해석

최희종* · 이경우* · 신성철* · 윤순동* · 양준모**

*목포해양대학교 해양시스템공학부, **목포해양대학교 대학원

Nonlinear Potential Flow Analysis for the Hull with a Transom Stern

Hee-Jong Choi* · Gyoung-Woo Lee* · Sung-Chul Shin* · Sun-Dong Youn* · Jun-Mo Yang**

*Division of Ocean System Engineering, MMU, Chukky-dong, 571-2, Korea

**Graduate School, MMU, Chukky-dong, 571-2, Korea

요약 : 본 연구에서는 자유수면 위를 고속으로 항주하는 트랜섬 선미를 채택한 선박에 의하여 발생되는 선박주위 및 트랜섬 선미 끝단에서의 비선형 자유수면 경계조건을 만족하는 자유수면에서의 유동 및 파형을 해석하는 수치해석기법에 대하여 연구하고 포텐셜 유동 해석기법인 랜킨소오스 패널법을 사용하여 선체주위 유동해석 프로그램을 개발하였다. 개발된 수치해석 프로그램의 타당성을 검증하기 위하여 고속선인 Athena선형, KCS(KRISO container ship)선형에 대하여 수치해석을 수행하였으며, 그 결과를 모형시험에 의하여 계측된 실험결과와 서로 비교하였다.

핵심용어 : 포텐셜유동해석, 패널법, 비선형 자유수면 경계조건, 트랜섬 선미

ABSTRACT : In this paper, the flow phenomena and free surface wave pattern around the hull with a transom stern advancing on the free surface in steady state had been studied and the numerical analysis program had been developed using Rankine source panel method based on potential flow analysis in which the non-linearity of the free surface boundary conditions had been fully satisfied. To verify the validity of the developed program the numerical calculations for Athena hull and KCS(KRISO container ship) hull had been performed and the results of the numerical computation had been compared with the ones of the model test experiment.

KEY WORDS : potential flow analysis, panel method, nonlinear free surface boundary conditions, transom stern

1. 서 론

최근의 컴퓨터 데이터 처리속도의 급속한 발달로 인하여 실생활의 주변에서 발생하는 여러 가지 복잡한 유동현상을 전산유체역학(Computational Fluid Dynamics)의 도움을 얻어 수치해석 및 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 구현하고자 하는 연구가 활발히 진행되고 있으며, 특히 조선공학의 경우 자유수면 위를 항주하는 선박에 대하여 연구한다는 특수성으로 인하여 많은 조선공학자들이 전산유체역학에 관심을 가지고 있으며, 전산유체역학을 선박의 건조에 도입하여 우수한 성능을 가지는 선박을 개발하기 위하여 노력하고 있다.

선박주위의 유동해석을 위하여 널리 사용되고 있는 수치해석기법으로는 크게 비접성유동해석기법인 포텐셜 유동해석기법

과 Navier-Stokes방정식을 풀어서 선체주위의 접성유동을 해석하는 기법이 있는데 접성유동 해석을 통하여 선체의 성능을 평가하는 것은 최근의 컴퓨터 성능의 팔목할 만한 향상에도 불구하고, 과다한 계산시간과 수치해석결과의 신뢰성 등에 있어서 더 많은 연구가 필요하며, 실제 설계된 선형의 성능을 평가하는 경우에 있어서 아직까지는 모형시험과 더불어 포텐셜유동해석에 의존하고 있는 실정이다. 포텐셜유동해석을 통한 선박주위의 유동해석기술은 지난 몇 년간 크게 발전하였으며, 모형시험을 수행하기 이전의 선형의 성능검증의 도구로서 널리 사용되고 있다.

포텐셜유동해석기법 중 대표적인 해석기법으로 Hess and Smith(1962)는 패널법(panel method)을 개발하고 그 기법을 이용하여 무한 유체 속에 놓인 3차원 물체 주위의 유동을 해

석하는 방법을 체계적으로 서술하였다. 그 후 패널법은 무한 유체뿐 아니라, 자유수면을 고려하는 선체주위의 조파현상의 연구에도 이용되고 있다.

Dawson(1977)은 패널법을 사용하여 선체주위의 조파현상을 해석하는 경우에 자유수면경계조건에 포함된 포텐셜의 x -방향에 대한 2차 미분항을 상류의 4점을 사용하여 구함으로서 방사조건을 만족시킬 수 있다는 것을 보여주었고, Xia(1986)/Ni(1987)는 자유수면 경계조건의 비선형성을 만족시키기 위한 자유수면 경계조건의 선형화 및 그에 따른 수렴반복계산을 할 때 자유수면 상부의 일정거리에 소오스 패널을 분포시키는 기법인 상 방향 패널이동법을 사용하면 수치해석을 하는 경우에 있어서 편리함을 제공할 뿐 아니라, 비선형해를 만족시키기 위한 반복수렴계산 과정 중에 해가 안정적으로 수렴한다는 것을 보여주었다. Raven(1996)/Jansen(1997)은 고속선에 대한 비선형 자유수면조건을 고려한 선체주위의 유동해석을 할 경우에 4점 상류차분법만으로 방사조건을 효과적으로 만족시킬 수가 없으며, 자유수면 패널의 만족점을 상류방향으로 이동시킴으로서 연속적인 소오스의 분포를 나타내어 방사조건을 보다 더 효과적으로 만족시킬 수 있으며, 비선형해를 구하는 반복계산과정에서 해가 발산하는 것을 방지하기 위하여 소오스의 세기 또는 파고의 변화량에 대하여 반복계산단계간의 적절한 가중치가 필요함을 보여주었다.

Cheng(1989)/최희종 등(2001)은 트랜섬 선미를 가진 선박이 고속으로 항해할 때 트랜섬 선미끝단의 유체는 트랜섬 선미를 부드럽게 떨어져 나가야 한다는 조건을 트랜섬 선미 이후의 패널에 적용하여 수치해석을 수행하고 그 결과를 발표하였다. 본 연구에서는 자유수면상을 항주하는 트랜섬 선미를 가진 선박에 의하여 생성되는 자유수면에서의 과형을 수치해석을 통하여 예측하기 위하여 자유수면경계조건의 비선형성을 고려한 선체주위 유동해석 프로그램을 개발하고, 개발된 프로그램의 타당성을 검증하기 위하여 비교적 고속선인 Athena선형과 KRISO(Korea Research Institute of Ships & Ocean Engineering)에서 개발한 선형인 KCS(KRISO Container Ship)선박에 대하여 수치해석을 수행하고 그 수치해석결과를 모형시험을 통하여 계측한 실험값과 비교하였다.

2. 문제의 정식화

2.1. 지배방정식 및 경계조건

선박에 고정된 좌표계에 대하여 유체의 유동을 비점성, 비압축성, 비회전성으로 가정하면 지배방정식인 라플라스방정식(Laplace equation)과 경계조건을 만족하는 속도포텐셜(ϕ)은 다음과 같이 정의된다.

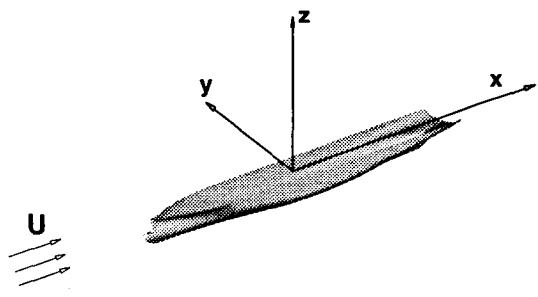


Fig. 1 Coordinates System

지배방정식인 라플라스 방정식은 다음과 같다.

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \text{in fluid domain} \quad (1)$$

선체표면에서의 경계조건은 선체표면에서는 유동이 선체에 접해야 한다는 비침투조건이고 아래의 식으로 표현된다.

$$\phi_n = 0 \quad \text{on the hull} \quad (2)$$

위의 식에서 n 는 선체표면에서 유동장으로 향하는 법선벡터의 방향을 나타내고, 하첨자는 해당방향으로의 미분을 나타낸다.

자유수면에서 만족하여야 할 경계조건은 다음의 두 식으로 표현된다.

운동학적 자유수면 조건식

$$\phi_x h_x + \phi_y h_y - \phi_z = 0 \quad \text{on the free surface} \quad (3)$$

동역학적 자유수면 조건식

$$gh + \frac{1}{2} (\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2 - U^2) = 0 \quad \text{on the free surface} \quad (4)$$

위의 식에서 h 는 파고, U 는 유입유동속도를 나타낸다. 선체가 진행하는 방향의 상류에서는 파가 존재하여서는 안된다는 조건인 선박에 의하여 유기된 파에 대한 방사조건은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\nabla \phi = (U, 0, 0) \text{ at } x = -\infty \quad (5)$$

2.2. 비선형 자유수면경계조건식의 처리

비선형자유수면 경계조건식에 대한 수치해석은 비선형자유수면 경계조건식의 선형화와 반복수렴계산에 의하여 수행되어진다.

문제의 해로서 구하여야 하는 속도포텐셜(ϕ)을 모유동속도포텐셜(Φ)과 교란속도포텐셜(ϕ')로 분리하고, 파고(h)를 모

파고(H)와 교란파고(h')로 분리하여 정식화하면 다음과 같다.

$$\phi = \Phi + \phi' \quad (6)$$

$$h = H + h' \quad (7)$$

식(6)~(7)을 실제 자유수면에 대한 경계조건식인 식(3)~(4)에 대입한 후 교란속도포텐셜과 교란파고가 모유동속도포텐셜과 모파고에 비하여 작다는 가정 하에 미소항의 고차항과 비선형항을 소거하면 선형화된 자유수면 경계조건식을 얻을 수 있다.

선형화된 운동학적 자유수면 조건식

$$\phi_x H_x + \phi_y H_y - \phi_z + \Phi_x h'_x + \Phi_y h'_y = 0 \quad \text{on } H \quad (8)$$

선형화된 동역학적 자유수면조건식

$$h' = \frac{1}{2} F n^2 \left(1 + \Phi_x^2 + \Phi_y^2 + \Phi_z^2 - 2\Phi_x \phi_x - 2\Phi_y \phi_y - 2\Phi_z \phi_z \right) H \quad \text{on } H \quad (9)$$

비선형 반복계산을 위한 초기값을 얻기 위하여 Kelvin형 자유수면조건식을 사용하였으며, 다음의 식으로 주어진다.

$$Fn^2 \phi_{xx} + \phi_z = 0 \quad \text{on } z=0 \quad (10)$$

Kelvin형 자유수면경계조건을 풀어서 구하여진 초기해를 모유동속도포텐셜 및 모파고라 가정하여 식(6)~(7)과 같이 두고 다시 식(8)~(9)를 풀어서 속도포텐셜과 파고를 구한 후 구하여진 해가 아래의 수렴조건식을 만족하는지를 조사한다.

$$\epsilon_k < 0.002 U \quad (11)$$

$$\epsilon_d < 0.0025 Fn^2 \quad (12)$$

여기서,

$$\epsilon_k = \Phi_z - \Phi_x H_x - \Phi_y H_y$$

$$\epsilon_d = \frac{1}{2} F n^2 \left(1 - \Phi_x^2 - \Phi_y^2 - \Phi_z^2 \right) - H$$

구하여진 해가 수렴조건식을 만족하지 않으면 구하여진 해를 모유동속도포텐셜과 모파고로 가정하고 선형화된 자유수면경계조건식에 대입하여 해를 구한다. 이와 같은 반복계산을 통하여 구하여진 해가 수렴조건식을 만족하면 그 해를 비선형자유수면경계조건식을 만족하는 해로 가정하였다.

방사조건을 만족시키기 위하여 Dawson(1977)이 제안한 기법인 4점 상류차분법을 사용하였다. 자유수면의 상류 첫 번째 열의 소오스의 세기는 0으로 두었으며, 4점 상류차분법을 사용하기에 정보가 부족한 상류에서 두 번째 열과 세 번째 열의

패널에서는 각각 2점 상류차분법과 3점 상류차분법을 사용하였다. 비선형자유수면경계조건을 만족시키기 위한 반복계산을 수행하는 과정 중에 해의 안정성을 기하기 위하여 상방향패널 이동법과 상류방향으로 자유수면경계조건의 만족점을 이동시키는 기법을 널리 사용한다.

소오스패널의 상 방향 이동거리는 자유수면에 분포한 패널의 x -방향의 길이에 대하여 약 0.5~2.0배정도 이동시키는 것이 적당한 것으로 알려져 있으며, 본 연구에서는 패널의 길이 만큼 상 방향으로 이동시켰으며, 패널의 만족점의 상류 방향에 대한 이동은 자유수면에 분포한 패널의 x -방향의 길이에 대하여 20 %를 이동시켜 수치해석을 수행하였다.

2.3. 트랜섬 선미 조건식의 처리

일반 크루즈선박에 대한 유동해석기법과 달리 트랜섬 선미를 채택한 선박의 경우 트랜섬 선미 끝단 이후에 특별한 자유수면 영역을 포함하여 이에 대하여 특별한 처리가 필요하다.

일반 크루즈선박에 대한 포텐셜 유동해석을 하는 경우에 선체의 전방 원거리에서는 파가 존재하여서는 안된다는 방사조건을 만족시키기 위하여 자유수면을 구성하는 유동방향 첫 번째에 위치한 패널의 강도를 0으로 두어서 수치적으로 방사조건을 만족시킨다. 그러나 트랜섬 선미를 가지는 선박의 경우 트랜섬 선미 끝단에서 출발하는 자유수면에서의 파는 트랜섬 선미의 깊이에 비례하여 존재할 것이며, 트랜섬 선미가 물에 젖지 않은 상태(dry)라는 가정을 부과한다면 트랜섬 선미에서 출발하는 파는 트랜섬 선미끝단에서 출발하여야 한다. 이와 같은 가정을 트랜섬 선미 끝단에서의 자유수면 경계조건에 부과하려고 한다면 운동학적 자유수면 경계조건에 포함된 항인 h_x 항에 대한 특별한 처리가 필요하다.

Raven(1996)은 트랜섬 선미 끝단에서의 선체의 기울기를 이용하고, 트랜섬 선미 끝단과 Fig. 2에서 ②의 위치에서의 파고에 대하여 상호 Taylor전개를 수행하여 다음과 같은 트랜섬 선미 조건식을 제안하였다.

$$h_x = 2(h - h_{tr})/\Delta x - \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{hull} \quad (13)$$

본 연구에서는 h_x 를 구하기 위하여 트랜섬 선미에 인접한 선체 내부에서의 선저의 기울기를 이용하였으며, h_{tr} 을 Fig. 2의 ①지점과 ②지점에 대하여 Taylor전개하면 다음과 같다.

$$h_{tr} = h_{hull} + \Delta x' \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{hull} \quad (14)$$

$$h_{tr} = h - \Delta x h_x \quad (15)$$

식(14)과 식(15)를 서로 더하고, h_x 에 대하여 정리하면 다음과

같이 된다.

$$h_x = \frac{1}{\Delta x} \left[h + h_{hull} - 2h_{tr} + \Delta x' \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_{hull} \right] \quad (16)$$

식(13)에 비하여 식(16)은 트랜섬 근처의 선박의 선저 기울기 및 선저의 깊이를 직접적으로 사용함으로서 유동이 더욱 부드럽게 트랜섬 선미에서 떨어져 나갈 수 있도록 하였다.

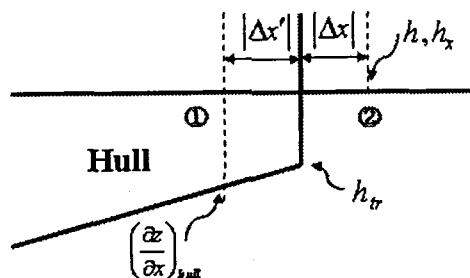


Fig. 2 Transom stern modelling

2.4. 트림과 침하의 고려

정지 상태에서 출발하여 주어진 일정한 속도에 선체가 도달할 때까지 선체는 트림(trim)과 침하(sinkage)를 경험하게 된다. 특히 고속으로 운항하는 선박의 경우 트림과 침하가 심한 경우가 대부분이며 이와 같은 선체주위의 유동해석을 할 경우에는 이에 대한 처리를 해주어야 한다.

선체에 미치는 트림과 침하를 계산하기 위하여 수선면(waterplane)의 면적을 아래의 식과 같이 정의한다.

$$A_0^w = \int_{water plane} ds \quad (17)$$

수선면에 대한 도심(centroid of waterplane)의 x 좌표는 다음과 같다.

$$x_F = \frac{\int_{water plane} x_c ds}{A_0^w} \quad (18)$$

위의 식에서 x_c 는 수선면의 미소영역인 ds 에 대한 도심의 x 좌표를 나타낸다.

수선면의 도심에 대한 수선면의 이차관성모우멘트(2nd moment of inertia)는 다음과 같다.

$$A_2^w = \int_{water plane} (x_c - x_F)^2 ds \quad (19)$$

트림각의 변화량은 다음과 같이 정의된다.

$$\theta = \frac{M}{\rho g A_2^w} = \frac{1}{2} F n^2 \frac{\int_{hull} \vec{r} \times C_p \vec{ds}}{A_2^w} - (x_F - x_{LCB}) \frac{\Delta}{A_2^w} \quad (20)$$

여기서,

M : 트림모우멘트(trim moment)

Δ : 배수량(displacement)

x_{LCB} : 배수량 체적중심의 x 좌표

침하량의 변화량은 다음과 같이 정의된다.

$$z_s = \frac{H}{\rho g A_0^w} = \frac{1}{2} F n^2 \frac{\int_{hull} C_p n_z ds}{A_0^w} - \frac{\Delta}{A_0^w} \quad (21)$$

여기서,

H : heave force

비선형 자유수면 경계조건을 만족시키기 위하여 반복수렴계산을 할 경우에 각 반복계산단계에서 얻어진 결과를 이용하여 θ 와 z_s 를 계산하고 선체를 이동시켜서 이동시킨 선체에 대한 새로운 계산격자계를 생성하고 그에 대한 선체주위 유동해석을 수행하였으며, 트림과 침하량의 변화량이 10^{-5} 보다 작은 경우에 선체가 주어진 속도에 대하여 정상상태에 도달한 것으로 가정하였다.

3. 수치해석결과

앞 절에서 언급한 자유수면을 일정한 속도로 항주하는 트랜섬 선미를 가지는 선박 주위의 유동해석을 위한 수치해석기법을 사용하여 수치해석 프로그램을 개발하였으며, 개발된 수치해석 프로그램의 타당성을 검증하기 위하여 고속선인 Athena 선형과 KCS선형에 대하여 수치해석을 수행하고 그 결과값을 모형시험을 통하여 구하여진 실험값과 비교하였다.

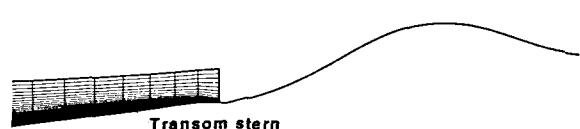


Fig. 3 Wave profile after transom stern(Athena hull, Fn=0.48)

Fig. 3은 수치해석을 통하여 구한 $y/L=0$ 에서 트랜섬 선미에서 떨어져 나가는 파고를 선체와 함께 나타낸 것이다. Fig. 3

에서 유체가 트랜섬 선미에서 부드럽게 떨어져 나가는 것에서 알 수 있는 바와 같이 본 연구에서 채택한 dry 트랜섬 선미에 대한 수치모델링이 타당하다는 것을 알 수 있다.

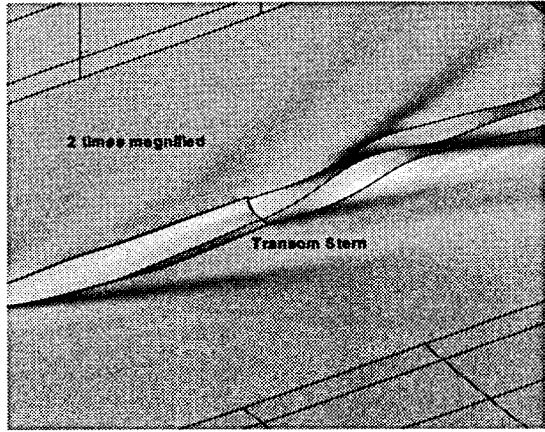


Fig. 4 Flow system after transom stern(Athena hull, Fn=0.48)

Fig. 4는 트랜섬 선미 근방에서 트랜섬 선미 유동을 선체 위에서 바라본 것이다. 여기서도 트랜섬 선미 끝단에서 유동이 비교적 부드럽게 트랜섬 선미를 떨어져 나가는 것을 볼 수 있으며, 떨어져 나간 유체는 트랜섬 선미 이후에서 삼각파를 생성시키고 있음을 목격할 수 있다.

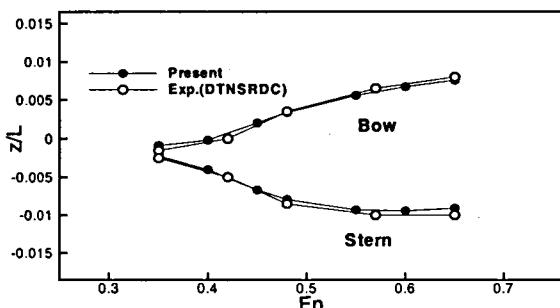


Fig. 5 Comparison of sinkage at bow and stern (Athena hull)

Fig. 5는 선수와 선미에서의 침하량에 대하여 수치해석을 통하여 구한 값과 모형시험에 의하여 계측한 값을 서로 비교한 것이다. 넓은 범위에 걸쳐 수치해석을 통하여 구한 선수와 선미에서의 침하량의 예측값이 모형시험을 통하여 구한 실험값과 서로 잘 일치하는 것을 볼 수 있다.

Fig. 6은 Fn=0.26의 속도로 자유수면 위를 일정속도로 항주하는 KCS선형에 대하여 수치해석을 수행하여 구한 자유수면에 따른 파형과 모형시험을 수행하여 구한 파형을 서로 비교한 것이다. 수치해석에 의한 파형과 모형시험에 의한 파형은 서로 유사한 과정을 형성하는 것을 볼 수 있으며 특히 선미이후

의 파형의 비교에서도 수치해석에 의한 파형이 모형시험에 의한 파형을 비교적 잘 예측하고 있다는 것을 알 수 있다.

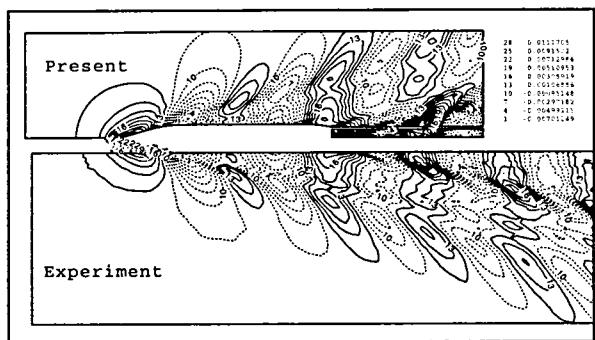


Fig. 6 Comparison of Wave Contour of KCS (Fn=0.26)

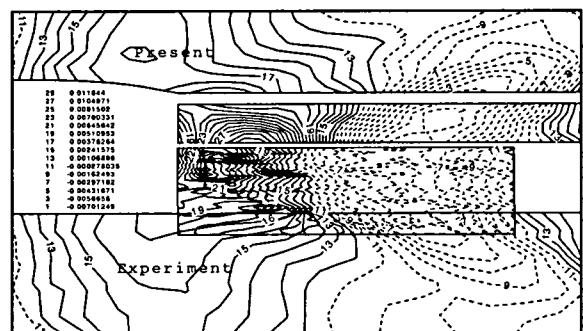


Fig. 7 Comparison of Wave Contour after Transom stern of KCS(Fn=0.26)

Fig. 7은 Fn=0.26에 대하여 트랜섬 선미 이후의 파형을 서로 비교한 것이다. 삼각파의 생성과 삼각파 이후의 파형 그리고 트랜섬에서 다소 떨어진 곳에서의 파형의 비교에서는 수치해석을 수행하여 구한 파형이 모형시험을 수행하여 구한 파형을 비교적 유사하게 예측하는 것을 알 수 있으나, 트랜섬 선미 끝단에 인접한 파형의 비교에서 수치해석에 의한 파형과 비교하여 모형시험에 의한 파형은 다소 복잡한 유동을 보여주고 있다는 것을 알 수 있는데, 트랜섬 선미에 유입되는 유동의 점성영향과 선속인 Fn=0.26에서 트랜섬 선미가 트랜섬 선미 모델링을 위하여 본 연구에서 가정한 완전한 dry상태에 도달하지 않았기 때문에 생기는 현상으로 생각된다.

Fig. 8은 선측에서 폭 방향으로 일정거리만큼 떨어진 곳 ($y/L = 0.08, 0.15, 0.20$)에 대하여 수치해석을 수행하여 구한 파고와 모형시험을 수행하여 구한 파고를 서로 비교한 것이다. 모형시험에 의하여 계측한 파고와 비교하여 수치해석에 의하여 예측된 파고는 비점성 유동으로 가정이 가능한 선수부에서는 비교적 잘 모형시험에 의한 파고를 예측한다는 것을 알 수

있으나, 선미부에서는 선축근방으로 갈수록 수치해석에 의한 파고가 모형시험에 의한 파고와 비교하여 다소 크다는 것을 알 수 있는데 이는 포텐셜유동의 비점성유동이라는 가정에 의한 점성영향의 무시로 인하여 선미부에서는 선축을 따라오면서 발달된 점성유동을 고려하지 못한 사실에 기인한 것으로 생각된다.

내는 것을 볼 수 있었으나, 본 연구에서 가정한 선체주위유동의 비점성으로 인하여 선미 근처에서 파를 다소 크게 예측하는 것을 알 수 있었다.

트랜섬 선미 유동해석을 위하여 본 연구에서 채택한 트랜섬 선미 모델링인 dry 트랜섬 선미 모델링은 수치해석을 통하여 트랜섬 선미 끝단에서 유동이 선미 끝단을 부드럽게 빠져나가는 것을 볼 수 있었다.

참 고 문 헌

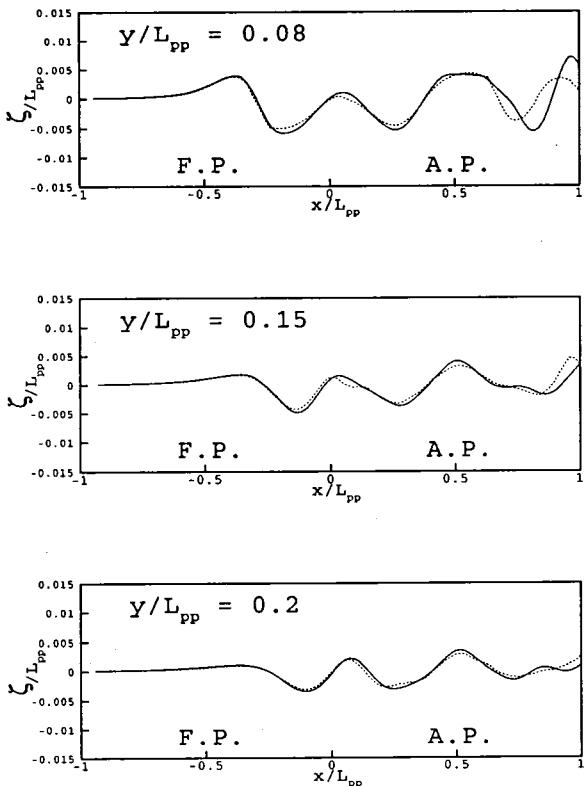


Fig. 8 Comparison of Wave Cuts of KCS ($F_n=0.26$)
(Solid:Present, Dashed:Experiment)

4. 결 론

본 연구에서는 자유수면 위를 고속으로 항주하는 트랜섬 선미를 채택한 선박에 의하여 발생되는 선박주위 및 트랜섬 선미 끝단에서의 비선형 자유수면 경계조건을 만족하는 자유수면에서의 유동 및 파형을 해석하는 수치해석기법에 대하여 연구하고 포텐셜 유동해석기법인 랜킨소오스 패널법을 사용하여 선체주위 유동해석 프로그램을 개발하였으며, 개발된 수치해석 프로그램의 타당성을 검증하기 위하여 고속선인 Athena선형, KCS선형에 대하여 수치해석을 수행하였고 그 결과를 모형시험에 의하여 계측된 실험결과와 서로 비교하였다.

모형시험에 의하여 계측된 실험결과와 수치해석을 수행하여 구한 해석결과와의 선수와 선미에서의 침하량의 비교 및 자유수면에서의 파형과 파고의 비교에서 서로 유사한 결과를 나타

- [1] 최희종, 전호환(2001):트랜섬 선미를 가지는 선형의 포텐셜 유동해석, 한국해양공학회지, 제15권, 제1호, pp 1-6.
- [2] Cheng, B.H.(1989):Computations of 3D Transom Stern Flows, Proceedings of the Fifth International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics, National Academy Press, Washington, DC, pp 581-592.
- [3] Dawson, C.W.(1977):A Practical Computer Method for Solving Ship Wave Problems, Proceedings of the Second International Conference on Numerical Ship Hydrodynamics, pp 30-38, University of California, Berkeley, USA.
- [4] Hess, J.L. and Smith, A.M.O.(1962):Calculation of Non-Lifting Potential Flow about Arbitrary Three-Dimensional Bodies, Douglas Report No. ES 40622.
- [5] Janson, C.E.(1997):Potential Flow Panel Methods for the Calculation of Free Surface Flows with Lift, Ph.D. Thesis, Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden.
- [6] Ni, S.Y.(1987):Higher Order Panel Methods for Potential Flows with Linear or Non-Linear Free Surface Boundary Conditions, Ph.D. Thesis, Chalmers University, Gothenburg, Sweden.
- [7] Raven, H.C.(1996):A Solution Method for the Non-Linear Ship Wave Resistance Problem, Ph.D. Thesis, Delft University of Technology, Netherlands.
- [8] Xia, F.(1986):Numerical Calculation of Ship Flows with Special Emphasis on the Free Surface Potential Flow, Doctoral Thesis, Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden.