

## 보이론을 적용한 선형적 두께변화를 갖는 원형평판의 처짐에 관한 연구

한동섭\*(동아대 대학원 기계공학과), 한근조(동아대 기계공학과), 김태형(경남정보대학 기계자동차 산업학부), 심재준(동아대 대학원 기계공학과), 이성욱(동아대 대학원 기계공학과)

### A Study on the Deflection of the Circular Plate with a Linear Change of Thickness using the Elastic Beam Theory

D. S. Han(Dept. of Mech. Eng., Graduate School, DAU), G. J. Han(Dept. of Mech. Eng., DAU), T. H. Kim(Subdivision of M&AI, KIT), J. J. Shim, and S. W. Lee(Dept. of Mech. Eng., Graduate School, DAU)

#### ABSTRACT

In this paper we investigate characteristics of deflection for circular plate with the non-symmetric boundary condition that is the boundary condition partly supported along the width direction of plate according to the length change of supporting end. For two boundary conditions such as simple supported and completely clamped boundary conditions, this study derives the maximum deflection formula of the circular plate using differential equation of elastic curve, assuming that a circular plate is a beam with the change of width and thickness along the longitudinal direction. The deflection formula of circular plate is verified by carrying out finite element analysis with regard to the ratio of length of supporting end to radius of circular plate.

**Key Words :** Circular plate (원형평판), Deflection formula (처짐식), Elastic beam theory (탄성보이론), Differential equation of elastic curve (탄성곡선의 미분방정식), Finite element analysis (유한요소해석)

#### 기호설명

$R_L$  : Length ratio of supporting end  
 $w$  : Deflection of circular plate  
 $w_x$  : Deflection along x-axis  
 $w_y$  : Deflection along y-axis  
 $w_{max}$  : Maximum deflection of circular plate  
 $w_{x,max}$  : Maximum deflection along x-axis  
 $w_{y,max}$  : Maximum deflection along y-axis

#### 1. 서론

원형평판은 잠수함의 창, 유압실린더의 피스톤, 관에서 사용되는 밸브, 인공심장에 사용되는 판막 등 산업전반에 걸쳐 다양하게 사용되고 있다.<sup>1,2</sup> 잠수함의 원형 창과 같이 경계조건이 외곽을 따라 균일하게 적용되는 축대칭형 경계의 원형평판 처짐식

은 오래 전부터 계산되어 사용되고 있다. 그러나 일반적으로 선박용 엔진에 사용되는 초크밸브, 인공심장에 사용되는 판막, 관에서 사용되는 버터플라이밸브와 같이 평판 외곽의 경계조건이 일부분만 지지되는 비축대칭형 경계를 갖는 원형평판의 처짐에 관한 이론적 접근은 아직 미흡한 실정이다.

이러한 비축대칭형 원형평판은 기존의 판 이론을 적용하여 해결하기 어려우므로 원형평판을 길이에 따라 폭과 두께가 변하는 보로 가정하고 탄성보 이론을 이용하여 처짐식을 유도하고자 한다. 공식의 일반화를 위해 변수는 원판의 반지름에 대한 지지단 길이의 비로서 무차원화 시킨 지지단 길이비( $R_L$ )를 사용하였다. 또한 보 이론을 사용하여 유도한 처짐식의 검증을 위해 지지단 길이비를 0.1에서 0.5까지 0.1씩 변화시킨 5가지 모델에 대해 유한요소해석을 수행하고 결과를 비교하였다.

해석을 위해 사용된 재료는 연강으로써 기계적

성질은 Table 1 과 같다. 보 이론을 적용하여 유도된 최대 처짐식의 결과와 비교하기 위하여 각 부분의 치수를 Table 2 와 같이 설정하였고, 하중은 재료의 허용응력범위 내에서 변위를 가시화하기 위해 0.1 MPa의 면압을 원형평판의 상부에 작용시켰다.<sup>3,4</sup>

Table 1 Mechanical properties of mild steel

Items	E	$\nu$	$\sigma_y$	$\sigma_t$
Value	210GPa	0.29	206MPa	519MPa

Table 2 Dimensions of circular plate for analysis

Items	Symbols	Values
Radius of circular plate	R	100mm
Length of supporting end	a	0.1R~0.5R

## 2. 원형평판의 길이방향에 따른 처짐 공식

### 2.1 탄성곡선의 미분방정식

Fig. 1 과 같이 두께가 선형적으로 변하는 원형 평판의 x축에 따른 최대처짐  $w_{x,max}$ 는 식(1)에 나타낸 탄성곡선의 미분방정식을 사용함으로써 얻을 수 있다.<sup>5</sup>

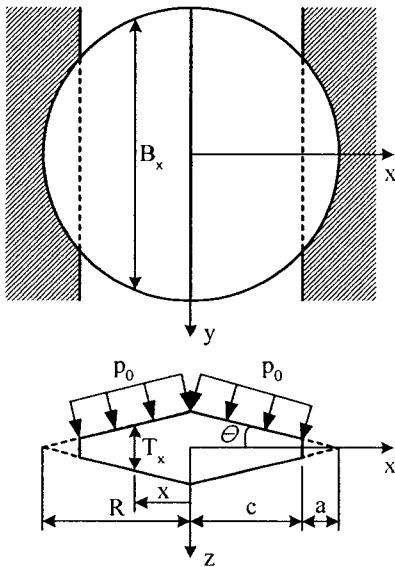


Fig. 1 Dimensions of the circular plate under the distributed load

$$E \frac{d^2 w}{dx^2} = -\frac{M_x}{I_x} \quad (1)$$

임의의 점 x 에서 평판의 폭  $B_x = 2\sqrt{R^2 - x^2}$ , 평판의 두께  $t_x = 2(R - X)\tan\theta$  이고 압력  $p_0$  는 면에 수직하게 작용하므로 그 지점의 분포하중은 압력의

수직방향성분과 폭의 곱으로써  $\omega_x = p_0 B_x \cos\theta$  가 되고, 단면 2 차모멘트  $I_x = B_x t_x^3 / 12$  가 된다.

### 2.2 경계조건에 따른 처짐 공식

본 연구에서는 보의 지지조건 중 대표적인 2 가지 경계조건 - 단순지지경계조건과 양단고정경계조건 - 에 대하여 지지단 길이비에 따른 원형평판의 최대 처짐식을 구하였다. Fig. 2 는 원형평판의 2 가지 경계조건을 나타낸다.

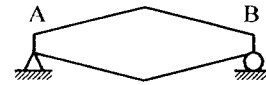


Fig. 1(a) Simply supported boundary condition

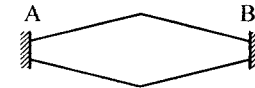


Fig. 1(b) Completely clamped boundary condition

#### 2.2.1 단순지지 경계조건

단순지지 경계조건에서 선형적 두께변화를 갖는 원형평판에 압력  $p_0$  가 작용할 때 임의의 지점 x 에서의 모멘트  $M_x$  는

$$M_x = R_A(x + c) - P_x(x - x_0) \quad (2)$$

이다. 여기서

$$R_A = \int_c^0 \omega_x dx : A \text{ 점 반력}$$

$$P_x = \int_c^x \omega_x dx : x \text{ 에서의 분포하중의 합}$$

$$x_0 = \frac{\int_c^x x \times \omega_x dx}{P_x} : x \text{ 에서의 분포하중 중심}$$

이고,  $c = R - a$  로서 중심에서 지지단까지의 길이이다.

단면이 변하는 보로 가정된 비대칭경계조건을 갖는 원형평판의 길이방향 x 에 따른 처짐식을 유도하기 위하여 식(1)에 모멘트  $M_x$  와 단면 2 차모멘트  $I_x$  를 대입하여 두번 적분하고, 단순지지 경계조건에서 처짐과 기울기의 경계조건

$$x = \pm c \text{ 일 때, } w_x = 0 \quad (3)$$

을 이용하여 적분상수를 구하면 단순지지 경계조건에서 원형평판의 처짐식과 처짐각식을 얻을 수 있다.

대칭경계조건이므로 길이방향  $x$  에 따른 최대처짐은 원형평판의 중심( $x=0$ )에서 발생한다. 따라서 원형평판의 처짐식에  $x$  대신  $0$  을 대입하고 지지단 길이비( $R_L$ )를 사용하여 정리하면, 단순지지 경계조건에서 원형평판의 최대처짐  $w_{x,max}$  는

$$w_{x,max} = \frac{P_0 R^4}{6Et^3} \left[ 24 - 51R_L'^2 - 13R_L'^4 - (24 + 12R_L'^2) \sqrt{1 - R_L'^2} - 6R_L' \left\{ 6 - (13 + 2R_L'^2) \sqrt{1 - R_L'^2} \right\} \right. \\ \left. \tan^{-1} \left( \frac{R_L'}{\sqrt{1 - R_L'^2}} \right) + 9(1 + 4R_L'^2) \tan^{-1} \left( \frac{R_L'}{\sqrt{1 - R_L'^2}} \right)^2 \right] \quad (4)$$

이 된다. 여기서  $R_L' = 1 - R_L$  이다.

### 2.2.2 완전고정 경계조건

완전고정 경계조건에서 선형적 두께변화를 갖는 원형평판에 압력  $p_0$  가 작용할 때 임의의 지점  $x$  에서의 모멘트  $M_x$  는

$$M_x = -M_A + R_A(x+c) - P_x(x-x_0) \quad (5)$$

이다. 부정정보의 형태이므로 A 점에서의 반력모멘트  $M_A$  와 반력  $R_A$  는 미분방정식을 계산하여 얻을 수 있다.

단면이 변하는 보로 가정된 비대칭경계조건을 갖는 원형평판의 길이방향  $x$  에 따른 처짐식을 유도하기 위하여 2.2.1 항에서와 같이 식(1)에 모멘트  $M_x$  와 단면 2 차모멘트  $I_x$  를 대입하여 두번 적분하고, 단순지지경계조건에서 처짐과 기울기의 경계조건

$$x = \pm c \text{ 일 때, } \frac{dw_x}{dx} = 0, w_x = 0 \quad (6)$$

을 이용하여 적분상수와 반력 및 반력모멘트를 구하면 완전고정 경계조건에서 원형평판의 처짐식과 처짐각식을 얻을 수 있다.

대칭경계조건이므로 길이방향  $x$  에 따른 최대처짐은 원형평판의 중심( $x=0$ )에서 발생한다. 따라서 원형평판의 처짐식에  $x$  대신  $0$  을 대입하고 지지단 길이비( $R_L$ )를 사용하여 정리하면, 완전고정 경계조건에서 원형평판의 최대처짐  $w_{x,max}$  는

$$w_{x,max} = \frac{P_0 R^4}{6Et^3} \left[ 4R_L'^2(15 - R_L'^2) \left\{ R_L'^2 - 1 + \sqrt{1 - R_L'^2} \right\} - R_L' \left\{ 96 - 32R_L'^2 - (96 - 53R_L'^2 - 3R_L'^4) \sqrt{1 - R_L'^2} \right\} \right]$$

$$\tan^{-1} \left( \frac{R_L'}{\sqrt{1 - R_L'^2}} \right) - (36 - 75R_L'^2 + 15R_L'^4 - 36 \sqrt{1 - R_L'^2}) \tan^{-1} \left( \frac{R_L'}{\sqrt{1 - R_L'^2}} \right)^2 - 27 \sqrt{1 - R_L'^2} \\ \tan^{-1} \left( \frac{R_L'}{\sqrt{1 - R_L'^2}} \right)^3 + 9 \tan^{-1} \left( \frac{R_L'}{\sqrt{1 - R_L'^2}} \right)^4 \\ + \left[ -R_L' \sqrt{1 - R_L'^2} \tan^{-1} \left( \frac{R_L'}{\sqrt{1 - R_L'^2}} \right) \right] \\ \tan^{-1} \left( \frac{R_L'}{\sqrt{1 - R_L'^2}} \right) \quad (7)$$

이 된다.

## 3. 해석결과 및 고찰

보 이론을 적용한 원형평판의 처짐식과 유한요소해석을 수행한 결과와의 상관관계를 상관계수 (correlation coefficient)를 이용하여 평가하였다. 상관계수  $R_c$  는

$$R_c = \frac{\sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum (x_i - \bar{x})^2 \sum (y_i - \bar{y})^2}} \quad (8)$$

와 같으며, 일반적으로 상관계수의 제곱  $R_c^2$  이 0.65 이상이면 상관관계가 있다고 말할 수 있다.

### 3.1 단순지지 경계조건

단순지지 경계조건을 갖는 원형평판의 보이론을 적용하여 유도한 최대처짐값과 유한요소해석을 수행하여 얻은 최대처짐값을 비교하여 Table 3 에 나타내었다.

Table 3 Correlation of the maximum deflections from beam theory and FEA with respect to  $R_L$  in the simply supported boundary condition

$R_L$	Maximum deflection ( $w_{x,max}$ )	
	Beam theory	FEA
0.1	0.0759	0.0784
0.2	0.0477	0.0464
0.3	0.0281	0.0266
0.4	0.0152	0.0143
0.5	0.0074	0.0070

Table 3 을 이용하여 보이론을 적용한 값과 유한 요소해석 결과의 상관관계를 계산하면, 상관계수  $R^2 = 0.999$  로서 매우 높은 상관관계를 보였다. 즉 보이론을 적용하여 유도한 최대처짐값이 신뢰성이 있음을 알 수 있다.

### 3.2 완전고정 경계조건

완전고정 경계조건을 갖는 원형평판의 보이론을 적용하여 유도한 최대처짐값과 유한요소해석을 수행하여 얻은 최대처짐값을 비교하여 Table 4 에 나타내었다.

Table 4 Correlation of the maximum deflections from beam theory and FEA with respect to  $R_L$  in the completely clamped boundary condition

$R_L$	Maximum deflection ( $w_{x,max}$ )	
	Beam theory	FEA
0.1	0.0201	0.0197
0.2	0.0115	0.0101
0.3	0.0064	0.0055
0.4	0.0033	0.0030
0.5	0.0016	0.0015

Table 4 를 이용하여 보이론을 적용한 값과 유한 요소해석 결과의 상관관계를 계산하면, 상관계수  $R^2 = 0.997$  로서 매우 높은 상관관계를 보였다. 즉 보이론을 적용하여 유도한 최대처짐값이 신뢰성이 있음을 알 수 있다.

## 4. 결론

탄성보이론을 이용하여 선형적 두께변화를 갖는 원형평판을 길이에 따라두께와 폭이 변하는 보로 가정하고 처짐특성을 분석한 결과 다음과 같은 결론을 얻었다.

1. 단순지지 경계조건에서 비대칭 구속조건을 갖는 원형평판의 최대처짐값( $w_{x,max}$ )을 지지단길이비 ( $R_L$ )를 변수로하여 이용하여 유도하였으며, 유한요소해석을 통하여 식을 검증한 결과 상관계수가 0.999 로 매우 높게 나타남을 알 수 있었다.
2. 완전고정 경계조건에서 비대칭 구속조건을 갖는 원형평판의 최대처짐값( $w_{x,max}$ )을 지지단길이비 ( $R_L$ )를 변수로하여 이용하여 유도하였으며, 유한요소해석을 통하여 식을 검증한 결과 상관계수가 0.997 로 매우 높게 나타남을 알 수 있었다.
3. 본 연구에서 제안된 평판의 최대처짐값은 비대칭 경계조건을 갖는 압력밸브, 인공관막, 판에서

사용되는 버터플라이밸브 등의 변형을 구하는데 사용될 뿐만 아니라 길이에 따라 단면이 변하는 보를 갖는 다양한 구조물에 응용될 수 있다.

## 후 기

본 연구는 산업자원부의 지역혁신 인력양성사업의 연구결과로 수행되었음.

## 참고문헌

1. Han, G. J., Oh, S. W., Kim, K. Y., Ahn, S. C, and Jeon, Y. H, "Nonlinear analysis of Strength and Displacement of Jig Body in Index Machine," J. of the KSPE, Vol. 15, No. 3, pp. 24 - 30, 1998.
2. Han, G. J., Ahn, S. C., Shim, J. J., and Kim, S. Y., "Nonlinear Analysis of the Monoleaflet Polymer Valve according to Shape of Supporting Members," J. of the KSPE, Vol. 20, No. 3, pp. 120 - 124, 2003.
3. Timoshenko, S. P, and Gere, J. M., "Theory of Elastic Stability," 2<sup>nd</sup> Ed., McGraw-Hill, pp. 1 - 45, 1998.
4. Hoffman, J., "Numerical Methods for Engineers," McGraw-Hill, 1992.
5. Ugural, A. C., "Stresses in Plate and Shells," McGraw-Hill, pp. 106 - 139, 1981.