

Hertz 접촉이론을 이용한 사이클로이드 감속기의 비틀림 강성해석

이상엽*, 박제승(서울대 대학원 기계항공공학부), 안형준, 한동철(서울대 기계항공공학부)

Torsional Stiffness Analysis of a Cycloid Reducer using Hertz Contact Theory

S. Y. Lee, J. S. Park, H. J. Ahn, and D. C. Han (School of MAE, SNU)

ABSTRACT

The cycloid reducer has very high efficiency, high ratios, high stiffness and small size, in comparison with a conventional gear mechanism, which makes it an attractive candidate for limited space and precision application such as industrial robot. There are several publications on analysis and design of the cycloid reducer, however, it was assumed that the contact stiffness of pin rollers and cycloid disk is constant regardless of their contact geometry. Moreover, the torsional stiffness of the cycloid reducer couldn't be calculated due to the assumption. In this paper, we present a new procedure of calculating torsional stiffness of the cycloid reducer using Hertz contact theory. First, conventional force analysis of the cycloid reducer is briefly reviewed. Then, iterative numerical calculation procedure of the contact stiffness is proposed based on the Hertz contact theory where the contact stiffness depends on the contact force. In addition, total torsional stiffness of the cycloid reducer is estimated considering its rolling element bearing stiffness. The torsional stiffness of the cycloid reducer is dominated by the rolling element bearing stiffness since the contact stiffness of the cycloid disk is too large.

Key Words : Cycloid reducer (사이클로이드 감속기), Torsional Stiffness (비틀림 강성), Hertz contact theory (Hertz 접촉이론)

1. 서론

일반적으로 높은 감속비를 얻기 위해 다단의 치차를 배열하여 감속기를 구성하는 경우 부피가 커지고, 누적된 오차로 정밀도가 떨어진다. 이에 비해 사이클로이드 감속기는 사이클로이드 치와 핀 롤러가 동시에 접촉하는 부분이 많아 비틀림 강성이 높고 내충격성이 좋으며, 구름 접촉으로 인해 마모량이 적어 높은 효율을 가지며, 소형이면서 높은 감속기의 구현이 가능하기 때문에 고강성 및 고정밀이 필요한 로봇 구동축에 많이 사용된다.

사이클로이드 감속기는 사이클로이드 형태의 치형을 갖는 디스크와 편심 축, 핀 롤러 등으로 구성된다. 편심축의 회전에 의해 사이클로이드 디스크의 치(齒)가 순서대로 핀 롤러에 맞물리면서 편심축의 1회전에 따라 치의 개수와 롤러 핀 롤러의 개수의 차이만큼 디스크가 반대방향으로 회전하며 감속된다. 기하학적으로 사이클로이드 디스크의 치는 모든 핀 롤러와 동시에 접촉하고 있으나, 실제 회전에서는 회전 방향에 부합하는 반원에서만 접촉력이 발생

한다. 사이클로이드 디스크의 편심 회전으로 인한 불균형 힘은 180°의 위상차를 가진 사이클로이드 디스크 2개를 사용하여 해결한다.

본 연구에서 다루는 2단 사이클로이드 감속기는 Fig. 1과 같이 입력 축에 일반 평치차 감속단을 더하여 작은 부피에서 더욱 높은 감속비를 실현한다. 때문에 일반 사이클로이드 감속기보다 큰 감속비를 얻을 수 있지만 2단을 사용하는 특유의 구조로 인하여 강성이 떨어질 수 있다. 따라서 고 부하 운전 조건에서도 높은 강성과 정밀도를 유지하기 위해 감속기 강성 예측을 통한 설계가 매우 중요하다.

기존의 하중 해석에서는 부정정계인 사이클로이드 디스크에 대해 접촉점 곡률이나 하중과 상관없이 치와 핀 롤러 사이의 접촉 강성이 일정하다고 가정하여 핀 롤러의 하중을 계산하였다 [1-3]. 하지만 Hertz 접촉 이론에 따르면 접촉면에서의 강성은 접촉면의 형상과 접촉 하중에 따라 변하는데 사이클로이드 디스크의 곡률이 크게 변하기 때문에 강성 변화가 클 것으로 예상된다. 또한 기존의 방법으로는 디스크의 비틀림 변형량이나 강성도 계산할 수 없다.

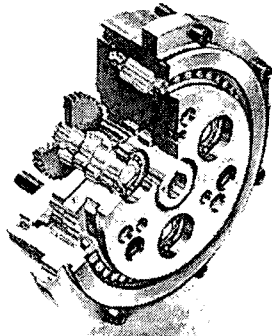


Fig. 1 Cycloid reducer RV-40E (TS-Corp.)[4]

본 논문에서는 Hertz 접촉 이론을 이용하여 사이클로이드 감속기의 비틀림 강성을 해석하였다. 우선 Hertz 접촉 이론을 이용하여 접촉점에 따른 강성을 각각 계산하고, 반복 계산을 통해 사이클로이드 디스크의 접촉 하중 분포와 디스크의 비틀림 강성을 계산했다. 그리고 편심축이 회전 하는 동안 사이클로이드 디스크 하중 분포의 변화와 비틀림 강성의 변화를 계산했다. 또한 편심축의 베어링 강성이 전체 비틀림 강성에 영향을 주기 때문에 이를 고려하여 2단 사이클로이드 감속기의 전체 비틀림 강성을 구했다. 사이클로이드 디스크의 강성이 매우 커서 전체 시스템의 비틀림 강성은 베어링의 강성에 의해서 결정됨을 확인하였다.

2. 기존의 하중해석[1-3]

기하학적으로는 사이클로이드 디스크의 모든 치가 각각의 핀 롤러에 접촉하지만 실제로 회전 방향에 부합하는 반쪽에만 접촉력이 발생한다. Fig. 2에서 디스크의 오목한 끝 부분에 들어간 핀 롤러(0번)를 기준으로 편심 축 회전의 반대방향 180 이내의 치(1~9번)들이 디스크를 반시계 방향으로 회전시키는 하중을 전달한다. 마찰력을 무시하면 접촉면의 법선, 즉 하중 작용 방향들은 디스크의 순간중심점에서 만난다.

각 핀 롤러에서 작용하는 하중을 P_i 라고 하고, 모멘트 암의 길이를 L_i 라고 하면 식 (1)과 같은 관계가 성립한다. 감속기에는 2개의 사이클로이드 디스크가 사용되기 때문에 디스크의 회전 모멘트 M 은 전체 출력 토크 T 의 절반이 된다.

$$M = \frac{T}{2} = \sum_{i=1}^{z/2} p_i L_i \quad (1)$$

기하학적 조건에 의해 각 접촉점에서의 모멘트 암 길이 L_i 는 식 (2)과 같다.

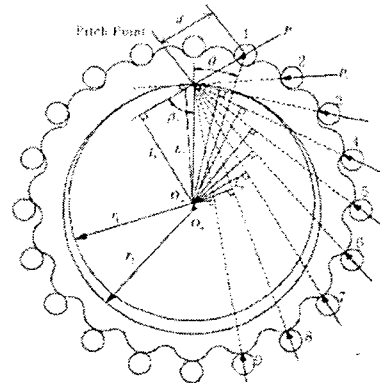


Fig. 2 Contact forces between cycloid disk and pin rollers

$$L_i = r_1 \sin \beta_i = \frac{r_1 r_h}{d_i} \sin \theta_i \quad (2)$$

Here, $d_i^2 = r_h^2 + r_2^2 - 2r_h r_2 \cos \theta_i$, $\sin \beta_i = r_h \sin \theta_i / d_i$, r_1 and r_2 are radius of inner and outer pitch circle, respectively.

핀 롤러와 디스크의 접촉 강성 K 가 일정하다고 가정하면 핀 롤러와 디스크 사이의 하중 P_i 와 접촉점의 미소 변위 δ_i 사이의 관계는 식 (3)과 같다.

$$P_i = K \delta_i \quad (K = \text{constant}) \quad (3)$$

또한, 디스크가 미소 회전각 $\delta\theta$ 만큼 회전하면, 접촉점의 변위는 식 (4)와 같이 표현 된다.

$$\delta_i = L_i \delta\theta \quad (4)$$

식 (4)을 식 (3)에 대입하고, 이를 식 (1)에 대입하여 $\delta\theta$ 에 대해 정리하면 아래 식들과 같다.

$$P_i = K L_i \delta\theta \quad (5)$$

$$\delta\theta = \frac{M}{K \sum L_i^2} \quad (6)$$

식 (5)와 식 (6)에서 각 핀 롤러에 걸리는 하중 P_i 는 식 (7)과 같이 정리할 수 있다.

$$P_i = \frac{M L_i}{\sum L_i^2} \quad (7)$$

본 논문에서는 TS-corporation의 사이클로이드 감속기 RV-40E를 대상으로 하중 및 강성 해석을 수행하고 그 결과를 비교한다. Table 1에 RV-40E의 주요 설계 사양을 나타냈다 [4].

Table 1 Specification of RV-40E.

Parameter	Value
Radius of housing (r_h)	64 mm
No. of pin roller (Z_p)	40
No. of teeth (Z_w)	39
Eccentricity (e)	1.3 mm
Radius of pin roller (r_p)	3.0 mm

접촉 강성 K 가 일정하다고 가정하면, 각 핀 롤러에 걸리는 하중은 주어진 모멘트에 대해 기하학적인 형상에 의하여 계산된다. 하지만 접촉면의 형상, 접촉 하중 등 다양한 조건에 따라 접촉 강성이 달라기 때문에 다양한 접촉 조건에 따른 정확한 하중을 구할 수 없을 뿐만 아니라 디스크의 비틀림 각도나 비틀림 강성을 구할 수 없다.

3. 접촉 강성을 고려한 디스크 강성해석

3.1 Hertz 접촉 이론[5]

Hertz 접촉 이론에 의하면 두 실린더 탄성체 사이에서는 Fig. 3에서와 같이 선 접촉이 발생한다. 두 실린더의 반경 R_1 과 R_2 는 볼록할 때를 양의 값(+)으로 하고, L 은 접촉 길이를 나타낸다.

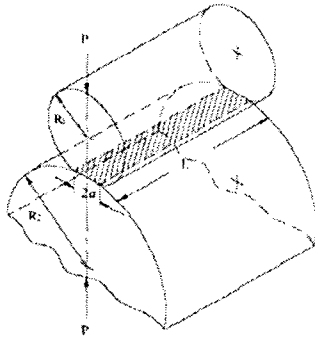


Fig. 3 Line contact between two cylinders

Table 2에 정의된 두 개의 실린더가 접촉할 때의 등가 반경 R , 등가 탄성계수 E , 접촉 폭 a 는 다음과 같이 계산된다.

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} \pm \frac{1}{R_2} \quad (8)$$

Here, + is convex and - is concave

$$\frac{1}{E} = \frac{1-\nu_1^2}{E_1} + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \quad (9)$$

$$a = 2\left(\frac{PR}{\pi EL}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (10)$$

Table 2 variables of contact cylinder

	Cylinder 1	Cylinder 2
Radius	R_1	R_2
Young's modulus	E_1	E_2
Poisson's ratio	ν_1	ν_2

최대 접촉응력 p_{max} 와 접촉 깊이 δ 는 각각 식(11)과 (12)같이 표현된다.

$$p_{max} = \left(\frac{PE}{\pi RL}\right)^{\frac{1}{2}} \quad (11)$$

$$\delta = \frac{2P}{\pi L} \left[\frac{1-\nu_1^2}{E_1} \left(\ln \frac{4R_1}{a} - \frac{1}{2} \right) + \frac{1-\nu_2^2}{E_2} \left(\ln \frac{4R_2}{a} - \frac{1}{2} \right) \right] \quad (12)$$

접촉점에서의 접촉 강성 K 는 식 (13)과 같이 접촉 하중 P 를 변형거리 δ 로 나눈 값으로 근사할 수 있다.

$$K = \frac{P}{\delta} = \frac{2\pi Ea}{\ln\left(\frac{4R_1}{a}\right) + \ln\left(\frac{4R_2}{a}\right) - 1} \quad (13)$$

3.2 접촉 강성을 고려한 디스크 강성해석

사이클로이드 디스크의 각 접촉점에서의 서로 다른 접촉 강성을 고려하면 핀 롤러에서의 하중은 식 (7)과는 달리 각 접촉점에서의 접촉 강성 K_i 를 포함한 식 (14)와 같이 나타낼 수 있다.

$$P_i = \frac{K_i M L_i}{\sum K_i L_i^2} \quad (14)$$

Hertz 이론에 의하면 각 접촉점에서의 접촉 강성 K_i 는 접촉면의 형상 및 접촉 하중에 의해 변한다. 특히 사이클로이드 디스크의 곡률은 Fig. 4에서처럼 접촉점의 곡률에 따라서 음의 값에서 양의 값으로 크게 변한다. (곡률 곡선 위의 수자는 Fig. 2 위치에서 그 수자의 핀 롤러가 접촉하는 사이클로이드 디스크의 곡률이다.) 따라서 접촉 강성 K_i 가 변하면 식 (14)에 의해 각 접촉점에서 접촉 하중 P_i 도 변하며, 변화된 접촉 하중 P_i 에 의해 식 (13)에서 접촉 강성 K_i 를 다시 계산하여야 한다.

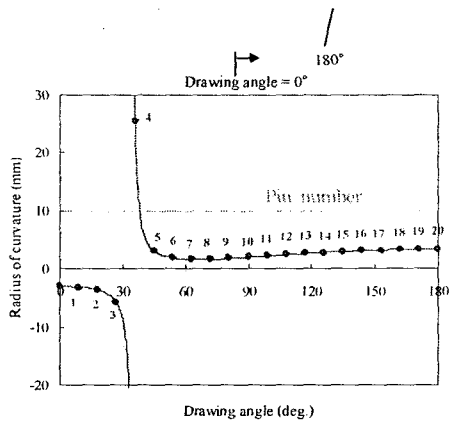


Fig. 4 Radius of curvature of cycloid disk tooth

접촉 강성을 고려한 정확한 접촉 하중을 구하기 위해서는 적절한 초기 값으로 반복 계산해야 하며 그 해석 과정을 Fig. 5에 도시했다. 초기 접촉 하중 P_i 값은 일정한 접촉 강성을 가정하는 기존의 해석 방법을 사용하고 접촉 하중 변화가 없고 미소 변형의 적합성을 만족할 때까지 반복 계산 한다.

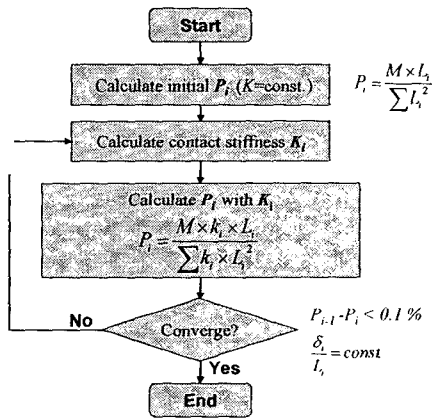


Fig. 5 Flow chart of calculation procedure

미소 변형 적합성을 만족시키려면 5번 이상의 반복 계산이 필요했고 수렴 후 계산된 접촉 하중을 기존의 해석 결과와 비교하여 Fig. 6에 나타냈다. 계산된 접촉 하중은 사이클로이드 디스크 곡률의 부호가 바뀌는 4번과 5번 핀 롤러를 경계로 서로 다른 경향을 보이며 이에 따라 최대 하중은 20% 증가했고 최대 하중 핀 롤러 위치도 4번에서 2번으로 바뀌었다. 그리고 각 접촉점에서의 변형에 의한 접촉 깊이를 Fig. 7에 나타냈다. 수렴 전에는 불연속점이 존재하지만 수렴 후에는 미소 변형의 적합성을 만족하여 변형량이 중심부터의 거리에 비례한 값을 가진다.

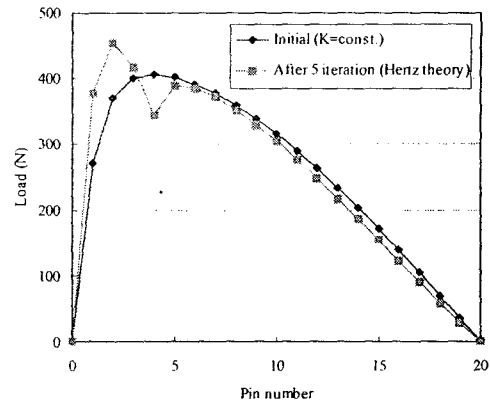


Fig. 6 Loads of pin rollers

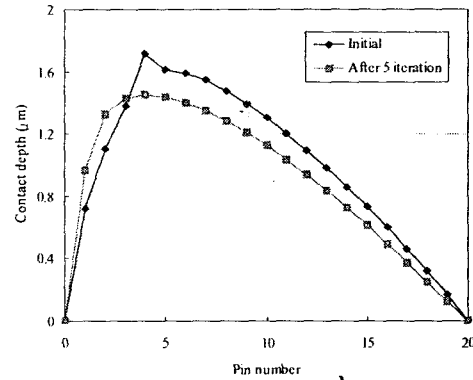


Fig. 7 Contact depth of pin rollers

접촉 강성도 Fig. 8과 같이 곡률의 변화에 따라 두 부분으로 나뉘어 다른 경향을 보인다. 하지만 접촉 강성은 초기 값과 수렴 후의 값이 큰 차이를 보이지 않는다. 각 핀 롤러에서의 Hertz 접촉 응력을 Fig. 9에 도시하였다. 강성과 마찬가지로 접촉 응력은 수렴 전후에 따라 큰 차이를 보이지 않는다.

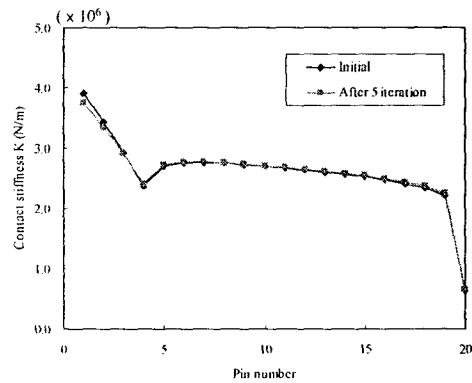


Fig. 8 Contact stiffness of pin rollers

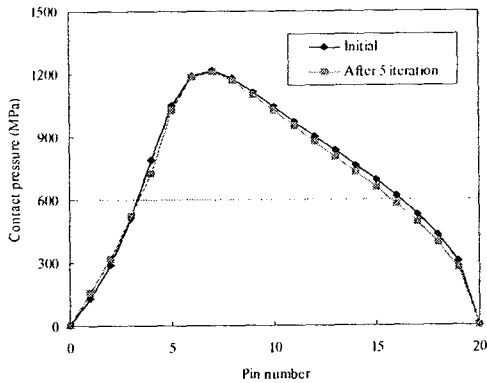


Fig. 9 Contact pressures of pin rollers

3.3 편심 축 회전에 따른 강성 해석

편심축이 회전하여 다음 핀의 위치 방향으로 편심방향을 바꾸면, 360 핀 롤러의 개수로 나눈 피치 (pitch) 92만큼 사이클로이드 디스크가 회전하며 Fig. 2의 사이클로이드 디스크 골 중심과 접촉하는 핀 롤러가 0번 핀에서 1번 핀으로 옮겨진다. 이에 따른 편심축의 사이클로이드 접촉점의 곡률 변화를 Fig. 10에 나타냈다. 4번 핀 롤러의 접촉 곡률이 크게 변화하면서 92만큼 회전 후 값이 다음 핀으로 옮겨진다

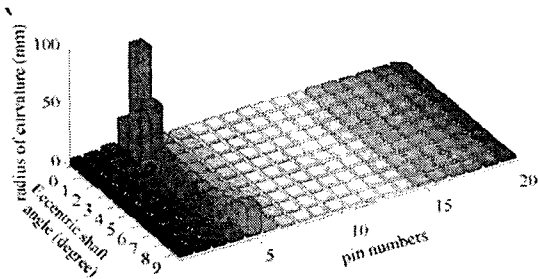


Fig. 10 Radius of curvature with eccentric shaft rotation

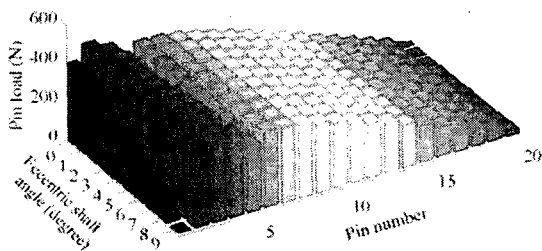


Fig. 11 Loads of pin roller with eccentric shaft rotation

접촉 하중의 변화를 Fig. 11에 나타내었으며 최대 하중은 편심이 22만큼 회전했을 때 발생한다 편심축이 회전하면 하중을 받는 핀 롤러만 하나씩 밀리고 동일한 하중 분포를 가진다. 편심 축 회전에 따른 접촉점 변화로 인한 접촉 강성의 변화를 Fig. 12에 나타냈다. 접촉 강성과 하중은 곡률반경의 크기가 거의 비슷한 5번 핀 롤러 이후 값들은 큰 변화가 없으나, 오목한 1번부터 4번 핀 롤러 사이 값에서는 많은 변화를 보인다.

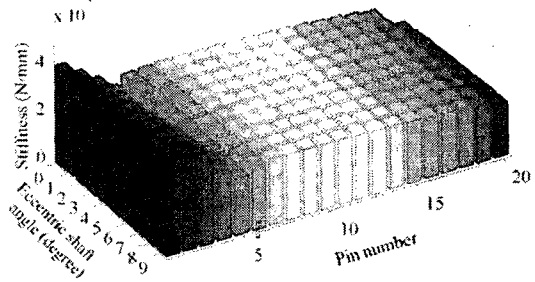


Fig. 12 Contact stiffness with eccentric shaft rotation

각 접촉점의 변화가 전체 사이클로이드 감속부의 비틀림 강성 변화에 영향을 줄 수 있다. 각 접촉점에서의 접촉 강성으로부터 사이클로이드 디스크의 비틀림 강성 K_c 를 식 (15)와 같이 구할 수 있다.

$$K_c = \frac{M}{\theta} = \sum K_i L_i^2 \quad (15)$$

편심 축 회전에 따른 비틀림 강성 변화를 Fig. 13에 나타냈다. 사이클로이드 디스크의 평균 비틀림 강성은 $7.2e+6$ Nm/rad 이며 편심축의 회전에 따라 접촉점이 바뀌면서 2.5% 이내로 값이 변한다. 강성이 가장 낮아지는 지점은 2 만큼 회전했을 때이며 이는 Fig. 10에 보는 것처럼 곡률반경이 가장 크게 변하는 지점이다.

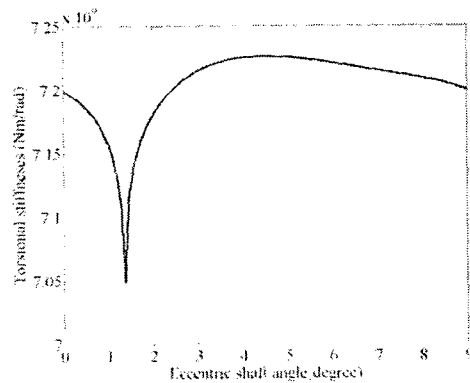


Fig. 13 Torsional stiffness with eccentric shaft rotation

4. 2단 사이클로이드 감속기 조합 강성 해석

2단 사이클로이드 감속기의 경우 사이클로이드 디스크의 강성 뿐 아니라 편심 축을 지지하는 베어링의 강성이 전체 감속기의 비틀림 강성에 영향을 주기 때문에 베어링 강성을 고려한 전체 시스템 강성해석을 수행한다.

4.1 편심 축을 지지하는 베어링 강성

베어링의 강성 해석을 위해 베어링 계도를 직경비를 전동체 직경의 1.05로 가정하고 틈새는 없어진다고 가정했다. 베어링 예압은 정위치 예압으로 한정하고, 테이퍼 롤러 베어링의 경우에는 반경방향 강성만을 계산했다. 또한 전동체의 개수를 일반적인 기준으로 전동체가 피치원 직경상의 85%를 점유한다고 가정했다. 기타 저속 운전 속도(100rpm) 및 초기 경하중(100N) 상태로 가정하고 원심력 효과나 자이로에 의한 강성저하는 무시하였다.

Table 3 Torsional stiffness of bearings

Clearance=0.01 mm	Stiffness K (N/m)
Needle bearing (K_{Needle})	1.39e+8
Taper roller bearing (K_{Taper})	2.41e+8

4.2 감속기 전체의 조합 강성

입력 축에서 출력축까지 2단 사이클로이드 감속기 시스템 전체의 비틀림 강성은 입력 축 비틀림 강성, 1단 감속단 평기어 강성, 편심 축 비틀림 강성, 2단 감속단 사이클로이드 디스크 강성, 니들베어링 강성, 테이퍼 롤러 베어링 강성, 출력축 비틀림 강성으로 구성된다. 이 중에서 사이클로이드 디스크를 제외한 입력축이나 출력축 등의 구조체들의 강성이 충분히 높다고 가정하면, Fig. 14에서와 같이 감속기의 강성은 사이클로이드 디스크와 편심 축에 사용되는 베어링들 강성의 조합으로 나타낼 수 있다.

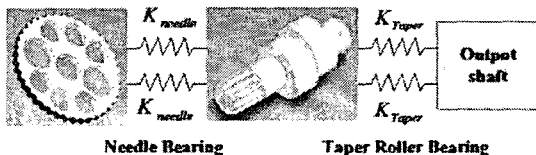


Fig. 14 Schematic of reducer torsional stiffness

전체 시스템 강성은 사이클로이드 강성과 조합 베어링 강성의 직렬연결로 결정된다. 니들 베어링과

테이퍼 롤러 베어링이 사용된 RV-40E의 경우 조합 베어링의 강성은 식 (16)과 같이 표현되며, 여기서 r 은 디스크 중심과 편심 축 사이의 거리를 나타낸다.

$$K_{Bearing} = r^2 \cdot 2 \frac{K_{Taper} \cdot K_{Needle}}{K_{Taper} + K_{Needle}} \quad (16)$$

Table 3과 감속기의 기하학적 정보를 이용하여 계산된 조합 베어링 강성은 2.28e+5 Nm/rad이다. Fig. 13에 나타난 사이클로이드 디스크 강성 (7.2e+6 Nm/rad)에 비하면 매우 작다. 즉, 2단 사이클로이드 감속기의 경우 전체 시스템의 비틀림 강성은 강성이 상대적으로 낮은 베어링에 의하여 결정되는 것을 알 수 있다. 이는 RV-40E의 전체 시스템 강성인 3.7e+5 Nm/rad인 점을 참고하면 하중에 의한 강성 증가로 볼 수 있고 해석 과정의 타당함을 알 수 있다 [4].

5. 결론

본 논문에서는 Hertz 접촉 이론을 이용하여 사이클로이드 감속기의 비틀림 강성을 해석하였다. 우선 Hertz 접촉 이론을 이용하여 접촉점에 따른 강성을 각각 계산하고, 반복 계산을 통해 사이클로이드 디스크의 접촉 하중 분포와 디스크의 비틀림 강성을 계산한다. 그리고 편심축이 회전 하는 동안 하중 분포와 사이클로이드 디스크 비틀림 강성의 변화를 계산했다. 또한 편심축의 베어링이 전체 비틀림 강성에 영향을 주기 때문에 이를 고려하여 2단 사이클로이드 감속기의 전체 비틀림 강성을 구했다. 사이클로이드 디스크의 강성이 매우 커서 전체 감속기 시스템의 비틀림 강성은 베어링의 강성에 의해서 지배됨을 확인하였다.

참고문헌

1. S.K. Malhotra, M.A. Parameswaran, "Analysis of a cycloid speed reducer", *Mechanism and machine theory*, 1983
2. 이성철, 오박균, 권오관, 로봇용 내접 유성식 감속기의 설계에 대한 연구? 윤활학회지, pp. 72-83, 1987
3. 한국과학기술원, Multi-functional Manipulator용 Torque Driver의 개발에 관한 연구 (1차년도), 과학기술처, pp.62-66, 1987.
4. 정밀제어용 고성능감속기 RV series 기술자료집, 한국FA산업, TS-corp. Nabtesco
5. K.L. Johnson, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, pp. 84-106, 2001.