

영역별 절점 재분포를 통한 사면체 격자 재구성 방법 및 유한요소해석에의 적용

홍진태*(KAIST 기계공학과), 이석렬(KAIST 기계공학과), 양동열(KAIST 기계공학과)

A New Remeshing Technique of Tetrahedral Elements by Redistribution of Nodes in Subdomains and its Application to the Finite Element Analysis

J. T. Hong(Mechanical Eng. Dept. KAIST), S. R. Lee(Mechanical Eng. Dept., KAIST),
D. Y. Yang(Mechanical Eng. Dept., KAIST)

ABSTRACT

A remeshing algorithm using tetrahedral elements has been developed, which is adapted to the mesh density map constructed by a posteriori error estimation. In the finite element analyses of metal forging processes, numerical error increases as deformation proceeds due to severe distortion of elements. In order to reduce the numerical error, the desired mesh sizes in each region of the workpiece are calculated by a posteriori error estimation and the density map is constructed. Piecewise density functions are then constructed with the radial basis function in order to interpolate the discrete data of the density map. The sample mesh is constructed based on the point insertion technique which is adapted to the density function and the mesh size is controlled by moving and deleting nodes to obtain optimal distribution according to the mesh density function and the quality optimization function as well. After finishing the redistribution process of nodes, a tetrahedral mesh is constructed with the redistributed nodes, which is adapted to the density map and resulting in good mesh quality. A goodness and adaptability of the constructed mesh is verified with a testing measure. The proposed remeshing technique is applied to the finite element analyses of forging processes.

Key Words : Remeshing(격자 재구성), tetrahedral element(사면체 요소), error estimation(오차 예측), density function(격자밀도함수), finite element analysis(유한요소해석), metal forming process(금속성형공정)

1. 서론

일반적으로 유한요소해석에서는 유한요소 자체의 이산적 특징에 의해 분석적 해와 오차가 발생한다. 특히, 소재의 대변형을 수반하는 소성가공공정의 경우, 응력이나 변형률이 집중되는 영역에서는 요소의 급격한 퇴화로 인해 해석 오차가 급증하므로, 이러한 영역을 효율적으로 고려할 수 있는 격자를 구성해야 한다. 소성가공 공정은 소재의 대변형으로 인해 자유곡면이 많이 존재하므로 표면 격자는 AFT 방법으로 구성이 가능하나, 일반적으로 내부 격자구성 시, 격자구성이 어려우므로 가장 안정적인 Delaunay 방법을 이용한다. 그러나, Delaunay 방법은 표면 격자의 크기에 따라 내부 격자가 구성

되므로, 내부 격자의 크기 조절은 어려운 단점이 있다. 본 연구에서는, Zienkiewicz 가 제안한 에너지 오차법⁽¹⁻²⁾을 이용하여 목표 격자 크기를 구한 후, 밀도 함수를 구성하고, 표면격자 및 내부격자를 재구성 하였다. 격자구성 알고리즘은 일반적으로 강건하고, 구현이 쉬운 것으로 알려진 Constrained Delaunay 격자구성방법⁽³⁻⁴⁾을 이용하였으며, 최적화를 통해 목표 격자밀도함수로의 적응성 및 요소품질의 향상을 동시에 고려하였다. 이를 다시, 영역별 부피적분을 통해 절점들을 재분포하고, 내부격자를 재구성함으로써 격자밀도 적응성을 향상시켰다.

2. 제안된 격자재구성 방법

2.1 격자재구성 알고리즘

본 연구에서 제안하는 격자재구성 과정은 Fig.1과 같다. 즉, 격자 재구성이 판별되었을 때, 다음과 같은 순서로 격자를 재구성한다.

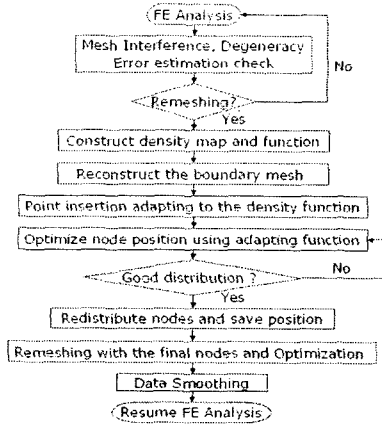


Fig. 1 The flowchart of a new remeshing procedure

- step1. 현 상태에서 에너지 오차 계산
- step2. 에너지오차법을 이용한 목표 격자밀도함수 구성
- step3. 격자밀도함수를 이용한 표면격자 재구성
- step4. 절점 추가법을 이용한 내부격자 구성 및 최적화
- step5. 영역별 밀도함수 적분을 통한 절점 재배치
- step6. 재배치된 절점을 이용한 내부 격자 재구성

2.2 오차예측 및 목표격자밀도 함수 구성

이 과정은 홍진태⁽²⁾의 과정을 사용하며 요약한 내용은 다음과 같다.

강소성 유한요소해석에 이용되는 변분방정식⁽⁶⁾ (식(1))로부터 이전 단계의 요소들에서 계산된 유효 변형률 값 및 유효 응력을 구한 후, 각 요소의 소성변형에너지(식(2)) 및 소성변형에너지 오차(식(3))를 정의할 수 있다. 식(2),(3)로부터 최대허용 에너지 오차는 식(4)와 같이 정의된다.

$$\sum_{\Omega} \left[\int_{\Omega} (\bar{\sigma} + \alpha \Delta \bar{\epsilon} H') \delta \bar{\epsilon} dV + K' \int_{\Omega} \bar{\epsilon} \delta \bar{\epsilon} dV - \int_{S^*} (f_i + \alpha \Delta f_i) \delta v_i dS \right] = 0 \quad (1)$$

$$\|E\|^2 = \sum_{m=1}^M \|E\|_{e,cr}^2 = \sum_{m=1}^M \int_{\Omega_m} (\bar{\sigma}' \hat{\epsilon}_{ij} - p \hat{\epsilon}_{kk}) d\Omega \quad (2)$$

$$\|e\|_{e,cr}^2 = \int_{\Omega} (\bar{\sigma}' - \hat{\sigma}') : \left(\hat{\epsilon} - \frac{\hat{\epsilon}}{M} \right) d\Omega \quad (3)$$

$$\bar{\epsilon}_{max} = \bar{\eta} \frac{\|E\|}{\sqrt{M}} \quad \text{where} \quad \eta = \frac{\|e\|_{e,cr}}{\|E\|_{e,cr}} \leq \bar{\eta} \quad (4)$$

여기서, $\bar{\sigma}'$, $\hat{\epsilon}$ 은 해석을 통해 구한 $\bar{\sigma}$, $\hat{\epsilon}$ 을 superconvergent patch recovery 방법을 통해 보간하여 구한 유연화된 값이며, $\bar{\eta}$ 는 최대 허용 상대오차율이고, M 은 전체 요소의 개수이다. 식(4)로부터 새

로운 요소의 크기는 다음과 같이 결정한다.

$$h^{new} = \frac{h_{elem}}{\xi_{elem}^{1/p}} \quad \text{where} \quad \xi_{elem} = \frac{\|e\|_{elem}}{\bar{\epsilon}_{max}} \quad (5)$$

여기서, h_{elem} 은 현재 요소의 크기이다.

위에서 구한 h^{new} 는 요소의 크기로 길이를 의미하므로 2 차원에서는 면적을, 3 차원에서는 부피를 의미할 수 있도록 다음과 같이 격자의 밀도를 구한다.

$$D_i = \frac{\alpha_n}{(h_i^{new})^n} \quad (6)$$

여기서, n 은 차원 수를 의미하고, α_n 은 n 차원에서 구성되는 요소의 부피를 구하는 상수이다.

식(6)을 통해 각요소에서 구해진 목표 밀도값은 전체 소재영역을 정육면체의 셀로 분할한 단위영역에 저장하고, 각 셀 별로 주변셀의 밀도값들을 이용하여 격자밀도함수 ($f_{den}(x_i)$)를 근사한다. 기저함수로는 보간에 가장 용이한 방법 중 하나로 알려진 방사기저함수(radial basis function)를 이용한다.

2.3 예비격자 구성 및 절점최적화

소성가공은 대부분의 변형이 표면에서 유도되므로, 표면격자의 퇴화가 심하기 때문에 표면격자를 재구성해주어야 한다.

표면격자의 재구성은 현 격자에서 표면 패치를 구성한 후, 형상의 복잡성에 따라 분할 패치를 만들고, 전 질에서 구성된 격자밀도함수를 이용하여 AFT 방법⁽⁴⁾으로 각 패치별 표면격자를 구성하여 원래 형상에 사상함으로써 얻을 수 있다.

다음으로, 내부격자 재구성을 위해서는, 우선 convex hull 을 구성하여 초기 삼각망을 구성한 후, 각 요소의 부피와 목표 격자밀도를 비교하여 절점 추가가 결정되었을 때, 그 요소의 각 절점들에서 계산되는 격자밀도를 이용하여 식(7)과 같이 밀도가중 내적법(weighted inner-product)으로 추가할 절점의 좌표를 구한다.

$$x_p^{new} = \frac{\sum_{i=1}^4 x_i f_{den}(x_i)}{\sum_{i=1}^4 f_{den}(x_i)} \quad (7)$$

위의 과정을 수차례 반복하여 모든 요소의 크기가 제시된 밀도를 만족할 경우, 절점 추가를 통한 격자 구성을 마친다. 여기서 구성된 격자는 요소의 품질이 좋지 않고 밀도함수에 이상적으로 적용된 상태가 아니므로, Brackbill 등⁽⁷⁾이 제안한 매끄러움(smoothness) 유연화 식 (F_{smooth})과 밀도함수에 적용하도록 각 요소의 부피($V(x)$)와 그 위치에서의 밀도함수값으로부터 구한 목표 요소 부피($V_{des}(x)$)의 편차가 최소가 되는 식(8)을 일차결합하여 최적화 시킴으로써 (식(9)), 요소품질과 목표밀도 적응성을 동시에 고려한다.

$$\min F_{adapt} = \min \left\{ \sum_{i=1}^{num_neighbor} \left(\frac{V(\hat{x}_p, \hat{x}_i) - V_{des}(\hat{x}_i)}{V_{des}(\hat{x}_i)} \right)^2 \right\} \quad (8)$$

$$\min F_{Combined} = \min (\omega_1 F_{adapt} + \omega_2 F_{smooth}) \quad (9)$$

$$\sum \omega_i = 1.0$$

2.4 영역별 절점 재구성

전질의 과정을 통해 구해진 예비격자는 구조적 문제로 인하여 얇은 요소가 많이 존재하고 목표격자 밀도를 초과하는 영역이 다소 발생한다. 따라서, 본 연구에서는 Fig. 2 와 같이 소재의 전 영역을 정육면체의 셀로 분할하고, 격자밀도함수를 각 셀에 대해 부과분을 수행하여 식(10)과 같이 각 셀에서 필요로 하는 절점의 개수를 계산한다. 그리고, 각 셀에서 계산된 격자의 수보다 많은 수의 절점이 있는 경우, 초과된 개수만큼의 절점을 밀도가 가장 높은 위치에 있는 절점부터 제거함으로써 격자 밀도를 재조정한다. 최종적으로 결정된 절점들을 이용하여 내부격자를 재구성하면 격자 밀도 적응성과 요소 품질이 향상된 격자를 구성할 수 있다.

$$desired_num_node_{\omega_i} = \frac{\int_{\omega_i} f_{den} dV}{\int_{\omega_i} dV} \quad (10)$$

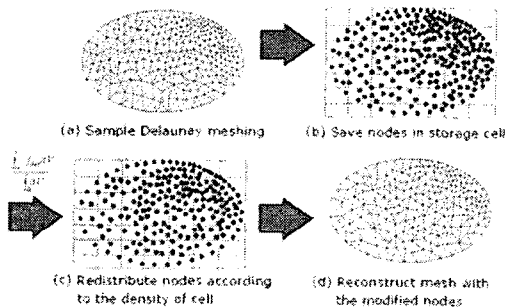


Fig. 2 Redistribution of the pre-constructed nodes

3. 격자재구성 결과

제안된 방법을 이용하여 소성가공해석의 2 차원 및 3 차원 격자재구성에 적용하여 보았다.

3.1 2 차원 격자재구성 및 결과

응력집중이 생기는 현상의 관측을 위하여 Fig. 3(a)와 같은 헤딩단조공정을 모델링하여 강소성 유한요소해석을 수행하였다. 격자재구성이 판별되었을 때, 격자밀도 지도를 구성하고 제안된 방법을 통해 재구성된 격자는 Fig. 3(b)-(g)와 같으며, 격자 밀도함수를 적용하지 않고 재구성된 격자, 적응 절점추가법을 통해 구성된 예비격자와 제안된 방법을 통해 구성된 격자는 Fig. 4 와 Fig. 5 에 비교하였다. Fig. 4 에서 보듯이, 제안된 방법으로 재구성된 격자가 목표격자밀도에 가장 잘 적응함을 알 수 있으며, Fig. 5 에서 보듯이, 제안된 방법으로 구성된 격자가

가장 좋은 요소품질 분포 및 격자밀도 적응성을 갖도록 구성되었음을 확인하였다.

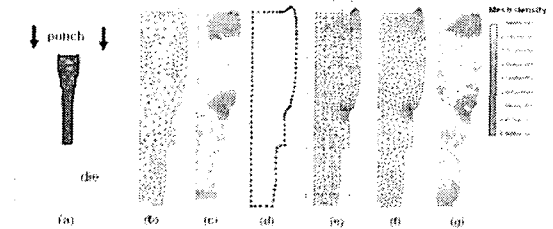


Fig. 3 Adaptive remeshing procedure in 2D (a) Modeling of the heading process (b) Current mesh (c) Contour of desired density (d) Surface reconstruction (e) Sample meshing and redistribute nodes in each cell (f) Final reconstructed mesh (g) Contour of reconstructed mesh density

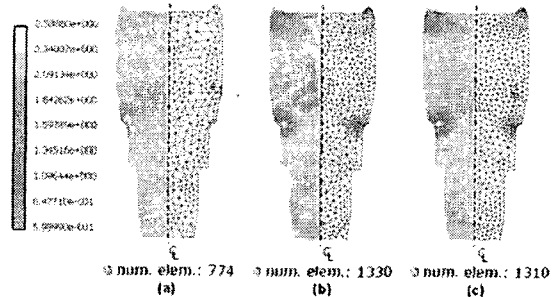


Fig. 4 Comparison of generated mesh with and without density control (a) mesh without density control (b) sample mesh with density control (c) reconstructed mesh with the redistributed nodes

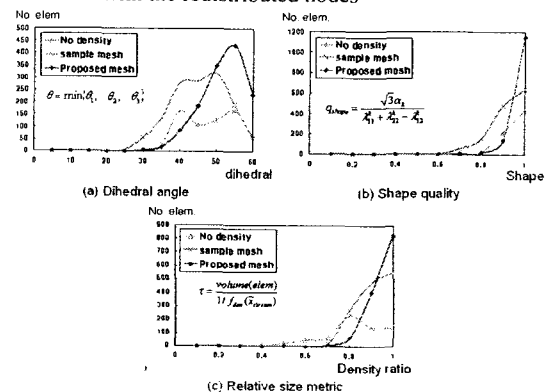


Fig. 5 Distribution of mesh according to density control

3.2 3 차원 격자재구성 및 결과

전단밴드의 형성을 관측하기 위하여 Fig. 6 과 같은 상하부 복합성형을 설계하여 강소성 유한요소 해석을 수행하였다. 격자재구성이 판별되었을 때, 유효변형률 속도와 유효응력은 Fig. 6(c)-(d)와 같다. 이로부터 격자밀도 함수를 구성하고, 격자 재구성을 수행한 것은 Fig. 7 과 같고, Fig. 8 에서 각 방법

으로 구성된 격자의 요소품질 및 밀도 적응성을 비교하였다. Fig. 7 에서 보듯이 제안된 방법으로 재구성된 격자가 전단밴드 거동을 잘 묘사함을 알 수 있으며, Fig. 8 에서 보듯이 요소 품질 및 격자밀도 적응성이 가장 좋은 분포를 갖는 격자가 구성되었음을 알 수 있다. 그러나, 이면각 분포가 절대적으로 낮은 값을 보이므로 요소의 품질이 다소 낮게 구성되었음을 알 수 있으며, 이는 요소들간의 기하학적 구속 때문으로 판단된다.

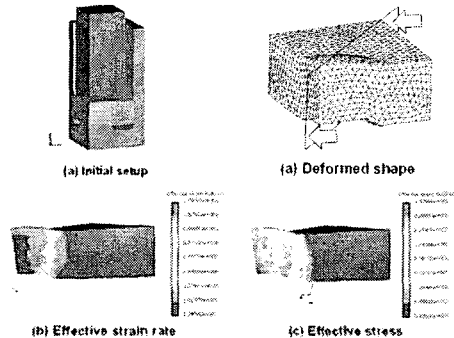


Fig. 6 3D Modeling of the complex forming and FE analysis data at the stopped state

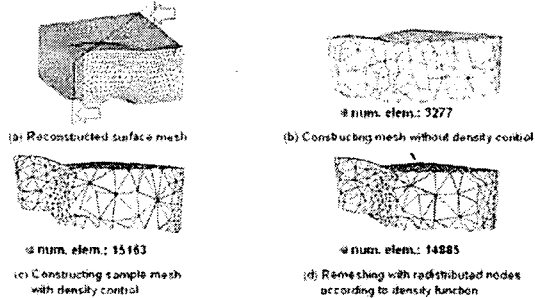


Fig. 7 Comparison of generated mesh with and without density control

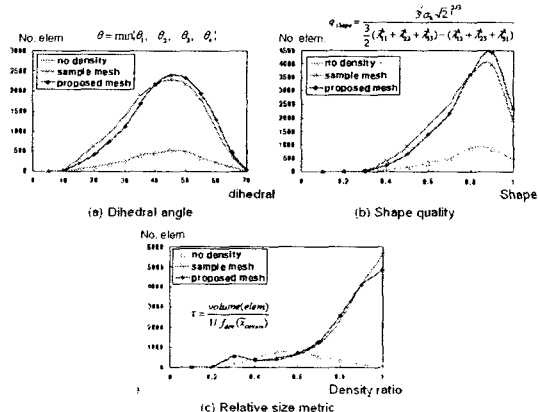


Fig. 8 Distribution of mesh according to density control

4. 결론

본 연구에서는 Delaunay 방법을 이용한 격자재구성 시, 해석의 정확도와 효율성을 향상시키기 위해 에너지 오차방법을 이용하여 적절한 격자크기를 구하고, 그로부터 구성된 격자밀도함수를 이용하여 적응격자를 재구성하는 방법을 제안하였다. 제안된 격자재구성 방법은 2 차원 삼각형요소와 3 차원 사면체요소의 격자재구성에 적용하였으며, 높은 밀도 적응성과 요소 품질을 얻을 수 있음을 확인하였다. 사면체 격자재구성의 경우, 요소들 간의 기하학적 구속으로 인해 사면체 요소의 품질이 비교적 낮게 구성되었으며, 추가적인 요소향상 작업이 필요하다. 앞으로 다양한 예제에 적용하여보고, 제안된 방법의 효용성을 검증할 필요가 있다.

참고문헌

1. Zienkiewicz O. C. and Zhu J. Z., "A simple error estimate and adaptive procedure for practical engineering analysis," *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol.24, pp. 337-357, 1987.
2. 홍진태, 이석렬, 박철현, 양동열, 오차 예측과 격자밀도 지도를 이용한 적응 Delaunay 격자생성방법, *한국소성가공학회지*, Vol. 13, No. 4, pp.334-341, 2004.
3. Chew P., "Constrained Delaunay triangulation," ACM, New York, 1987.
4. Baker T. J., "Automatic mesh generation for complex three-dimensional regions using the constrained Delaunay triangulation," *Eng. Comput.* Vol. 5, pp.161-175, 1989.
5. 홍진태, 이석렬, 양동열, 격자압축을 이용하여 구성된 격자의 효과적인 격자유연화 방법, *한국소성가공학회지*, Vol. 12, No. 4, pp. 340-347, 2003
6. Yoon J.H. and Yang D.Y., "Adaptive zoning for singular problems in two dimensions," *J. Comput. Phys.*, Vol. 46, pp. 342-368, 1982.