

타원형 띠기초의 자유진동 해석

Free Vibration Analysis of Elliptic Strip Foundation

이 태 은* · 강 희 종** · 김 권 식** · 이 병 구***

Tae Eun Lee, Hee Jong Kang, Gwon Sik Kim and Byoung Koo Lee

ABSTRACT

Since soil-structure interactions are one of the most important subjects in the structural/foundation engineering, much study concerning the soil-structure interactions had been carried out. One of typical structures related to the soil-structure interactions is the strip foundation which is basically defined as the beam or strip rested on or supported by the soils.

At the present time, lack of studies on dynamic problems related to the strip foundations is still found in the literature. From these viewpoint, this paper aims to theoretically investigate dynamics of the elliptic strip foundations and also to present the practical engineering data for the design purpose.

Differential equations governing the free, out-of-plane vibrations of such strip foundations are derived, in which effects of the rotatory and torsional inertias and also shear deformation are included although the warping of the cross-section is excluded. Governing differential equations subjected to the boundary conditions of free-free end constraints are numerically solved for obtaining the natural frequencies and mode shapes by using the numerical integration technique and the numerical method of non-linear equation.

1. 서 론

지반 위에 놓인 구조물의 거동특성 규명은 구조공학, 기초공학 및 진동 제어분야에서 중요한 연구대상으로 취급되어 이와 관련한 많은 연구⁽¹⁻⁶⁾가 수행되고 있다. 지반-구조물 상호작용과 관련한 많은 문제들은 탄성지반 위에 놓인 구조로 모형화할 수 있으며, 이에 대한 가장 실제적인 예로서는 철도궤도, 파이프 라인 및 띠기초(strip foundation) 등을 들 수 있다.

Laura 등⁽⁷⁾이 고찰한 바와 같이 지반으로 지지된 곡선부재의 동적 연구는 매우 부족하여 지금도 이러한 연구들은 매우 드문 실정이다. 이러한 관점에서 지반으로 지지된 곡선부재의 자유진동에 관한 연구는 기초공학 분야에서 기본적 연구 중에 하나이다. 특히 띠기초가 지지하는 상부구조의 동하중이 띠기초와 공진현상이 발생하지 않도록 설계하는 것은 매우 중요하며, 이 경우에 띠기초의 자유진동 특성을 규명하는 것은 무엇보다도 중요한 연구과제이다.

본 연구에서는 지반 위에 놓인 곡선보 즉 띠기초의 면의 자유진동에 대한 수학적 모형을 구축하고, 해석

* 정희원 · 원광대학교 토목환경공학과 강의교수

** 원광대학교 대학원 토목환경공학과 박사과정

*** 정희원 · 원광대학교 토목환경공학과 교수

모형으로부터 정확한 고유진동수를 산출할 수 있는 알고리즘을 개발하는데 연구 목적이 있다. 띠기초는 지간 길이와 수평높이에 따라 곡률이 변화하게 되며, 이러한 변화곡률 띠기초의 경우 원호형 띠기초에 비하여 그 해석과정이 매우 복잡하다. 본 연구에서는 띠기초의 선형으로 타원형을 채택하였으며, 실제공학문제에서 주로 이용되어지는 자유-자유 의 지점조건을 고려하였다. 타원형 띠기초의 자유진동을 지배하는 미분방정식을 유도하고, 이를 수치해석하여 띠기초의 변수변화에 따른 고유진동수의 변화를 고찰하였다.

2. 수학적 모형

2.1 자유진동 변수

그림 1은 지반 위에 놓인 변화곡률 띠기초의 기하적 형상을 나타낸 것이다. 띠기초의 지간길이는 l 이고, h 는 띠기초의 뼈대구조인 곡선보의 수평 높이를 나타낸다. (x, y) 는 띠기초의 좌단을 원점으로 하는 직교좌표계이며 ρ 는 띠기초의 곡률반경, θ 는 x 축과 곡률중심 방향이 이루는 각도이다.

이 그림에서 v , β , ψ 및 ϕ 는 수직변위, 전단에 의한 단면 회전각, 휨에 의한 단면 회전각 및 비틀림각을 나타내며, 이들은 시간에 따라서 변화하는 동적 변위들이다. 띠기초의 단면에는 변위에 의하여 전단력, 휨모멘트 및 비틀림 모멘트가 발생하며 각각 Q , M 및 T 로 나타내었다.

띠기초의 뼈대구조인 곡선보를 지지해주는 지반의 지반계수는 K 이며, 단위면적의 지반에 단위수직처짐을 야기시키는 데 필요한 힘의 크기로 정의된다. 탄성체인 지반에 변위가 발생하면 지반과 띠기초 단면의 접촉면에는 수직 반력과 비틀림 반력이 발생되며 그림 1에 R_V 와 R_T 로 표현되어 있다.

2.2 지반 반력

그림 2(a)는 띠기초의 수직변위 v 와 비틀림각 ϕ 를 나타낸 것이다. B 는 지반과 접하는 띠기초의 단면폭, r 은 단면의 도심 o' 을 원점으로 하는 단면폭을 따라 변화하는 곡률중심 방향의 좌표이다. $z(r, \theta)$ 는 부재축상 θ 위치에서 비틀림각 ϕ 로 인한 곡률중심 방향의 좌표 r 에서 수직변위이다.

그림 2(a)에서 지반과 단면이 접하는 접촉면에서 발생하는 압력변화 $p(r, \theta)$ 는 다음 식 (2.1)과 같이 구할 수 있다.⁽⁶⁾

$$p(r, \theta) = K(v - r\phi) \quad (2.1)$$

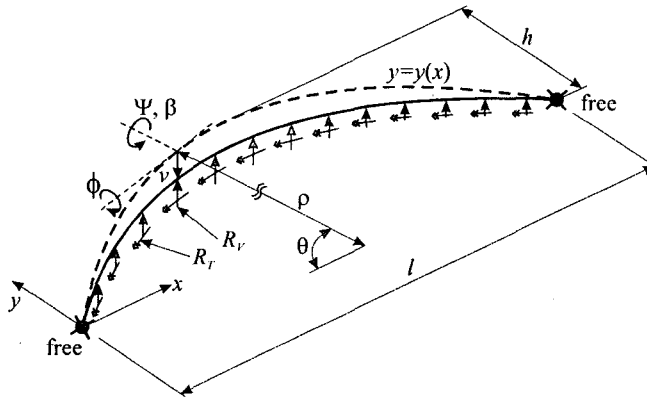


그림 1. 띠기초의 기하적 형상 및 제변수

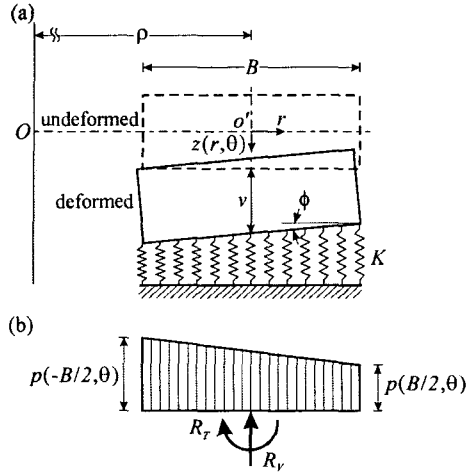


그림 2. 접촉면에 작용하는 지반반력

그림 2(b)는 위의 결과를 단면의 접촉면에 작용하는 압력분포로 나타낸 것이다. 지반의 수직반력 R_V 및 비틀림반력 R_T 는 각각 다음의 식 (2.2), (2.3)과 같이 산출된다.

$$R_V = KBv, \quad R_T = \frac{KB^3\phi}{12} \quad (2.2, 2.3)$$

2.3 지배미분방정식

그림 3은 자유진동하는 띠기초의 미소요소에 작용하는 힘들을 나타내고 있다. 띠기초의 미소요소에 작용하는 이들 합응력, 관성력 및 지반 반력들 사이의 동적 평형방정식을 세우면 식 (2.4)-(2.6)과 같다.

$$\frac{1}{\rho} \frac{dQ}{d\Theta} - F_v - R_V = 0 \quad (2.4)$$

$$\frac{1}{\rho} \frac{dM}{d\Theta} - Q + \frac{T}{\rho} + C_\psi = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{M}{\rho} - \frac{1}{\rho} \frac{dT}{d\Theta} + C_\phi + R_T = 0 \quad (2.6)$$

띠기초의 단면에 발생하는 합응력인 전단력 Q , 휨 모멘트 M 및 비틀림 모멘트 T 는 다음의 식들과 같이 구할 수 있다.⁽⁹⁾

$$Q = \alpha_s AG\beta = \alpha_s AG \left(\frac{1}{\rho} \frac{dv}{d\Theta} - \psi \right), \quad M = \frac{EI}{\rho} \left(\phi - \frac{d\psi}{d\Theta} \right), \quad T = \frac{GI}{\rho} \left(\psi + \frac{d\phi}{d\Theta} \right) \quad (2.7-2.9)$$

여기서 A , I , J 는 단면적, 단면2차모멘트 및 비틀림상수이고, E 와 G 는 탄성계수 및 전단탄성계수이다.

자유진동을 조화진동으로 가정하면 관성력 수직방향 관성력 F_v , 회전관성력 C_ψ 및 비틀림 관성력 C_ϕ 는 다음의 식 (2.10)-(2.12)와 같다.

$$F_v = -\gamma A \omega^2 v, \quad C_\Psi = -\gamma I \omega^2 \Psi, \quad C_\Phi = -\gamma I_p \omega^2 \Phi \quad (2.10-2.12)$$

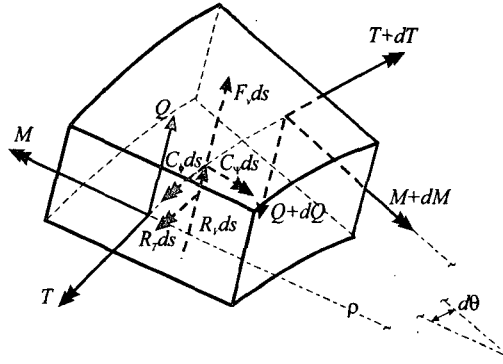


그림 3. 띠기초 미소요소에 작용하는 힘

여기서, γ 는 곡선보 재료의 질량밀도, I_p 는 단면극관성모멘트, ω 는 고유각진동수(rad/sec)이다.

본 연구에서는 지배미분방정식을 무차원식으로 유도하기 위하여 다음과 같은 무차원 변수들을 도입하였다. (ξ, δ)는 직교좌표계 (x, y)를 무차원화한 것이며, ζ, η, f, b 는 길이차원의 변수들인 ρ, v, h, B 를 지간길이 l 로 정규화한 것이다. s, s_p 는 세장비 관련변수이며, e, u 및 k 는 각각 강성변수, 전단변수 및 지반변수를 나타낸다.

$$\xi = x/l, \quad \delta = y/l, \quad \zeta = \rho/l, \quad \eta = v/l, \quad f = h/l, \quad b = B/l \quad (2.13-18)$$

$$s = l/\sqrt{I/A}, \quad s_p = l/\sqrt{I_p/A}, \quad e = GJ/(EI), \quad u = \alpha_s G/E, \quad k = Kl^5/(\pi^4 EI) \quad (2.19-23)$$

무차원 고유진동수 c_i 는 다음과 같이 무차원화한다.

$$c_i = \omega_i l^2 \sqrt{\gamma A/(EI)}, \quad i = 1, 2, 3, 4, \dots \quad (2.24)$$

이상에서 유도한 동적 평형방정식, 합응력, 지반반력, 관성력 및 무차원 변수들을 이용하면 변화곡를 띠기초의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 식 (2.25)-(2.27)과 같이 구할 수 있다.

$$\frac{d^2 \eta}{d\theta^2} = \frac{1}{\zeta} \frac{d\zeta}{d\theta} \frac{d\eta}{d\theta} + \frac{\pi^4 kb - c_i^2}{us^2} \zeta^2 \eta + \zeta \frac{d\Psi}{d\theta} \quad (2.25)$$

$$\frac{d^2 \Psi}{d\theta^2} = -us^2 \zeta \frac{d\eta}{d\theta} + \frac{1}{\zeta} \frac{d\zeta}{d\theta} \frac{d\Psi}{d\theta} + \left\{ e + \left(us^2 - \frac{c_i^2}{s^2} \right) \zeta^2 \right\} \Psi + (1+e) \frac{d\Phi}{d\theta} - \frac{1}{\zeta} \frac{d\zeta}{d\theta} \Phi \quad (2.26)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\theta^2} = -\left(1 + \frac{1}{e} \right) \frac{d\Psi}{d\theta} + \frac{1}{\zeta} \frac{d\zeta}{d\theta} \Psi + \frac{1}{\zeta} \frac{d\zeta}{d\theta} \frac{d\Phi}{d\theta} + \frac{1}{e} \left\{ 1 + \left(\frac{\pi^4 kb^3}{12} - \frac{c_i^2}{s_p^2} \right) \zeta^2 \right\} \Phi \quad (2.27)$$

2.4 경계조건

본 연구에서는 띠기초의 지점조건으로 실제 공학문제에서 주로 이용되어지는 자유-자유의 지점조건을 채택하였다. 자유지점에서는 합응력 Q, M, T 가 0이어야 하므로 다음의 경계조건을 얻을 수 있다.

$$\frac{d\eta}{d\theta} - \zeta \Psi = 0, \quad \Phi - \frac{d\Psi}{d\theta} = 0, \quad \Psi + \frac{d\Phi}{d\theta} = 0 \quad (2.28-30)$$

3. 형상함수

그림 3.4는 장축이 $(2\tau+1)l$ 인 타원상의 한 점을 원점으로 하는 (x, y) 직교좌표계 위에 놓인 지간길이 l 및 수평높이 h 를 갖는 타원의 기하적 형상을 나타내며 무차원 변수를 이용하여 선형식을 나타내면 식 (3.1)과 같고, 식 (3.1)에 포함된 b_1 과 b_2 는 식 (3.2), (3.3)에 나타내었다.

$$\delta = \frac{b_2}{b_1} [b_1^2 - (\xi - 0.5)^2]^{1/2} + f - b_2 \quad (3.1)$$

$$b_1 = \frac{1+2\tau}{2}, \quad b_2 = \frac{f}{1 - \frac{2(\tau + \tau^2)^{1/2}}{1+2\tau}} \quad (3.2, 3.3)$$

식 (3.1)을 이용하면 식 (3.4)-(3.6)과 같이 타원형 선형식의 θ 및 변화곡률 계수를 다음과 같이 ξ 의 함수로 구할 수 있다.

$$\theta = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \left\{ -\frac{b_2(\xi - 1/2)}{b_1[b_1^2 - (\xi - 0.5)^2]^{1/2}} \right\} \quad (3.4)$$

$$\zeta = \frac{[b_1^4 + (b_2^2 - b_1^2)(\xi - 0.5)^2]^{3/2}}{b_1^4 b_2} \quad (3.5)$$

$$\frac{d\zeta}{d\theta} = \frac{3(b_2^2 - b_1^2)}{b_1^7 b_2^2} (\xi - 0.5) [b_1^4 + (b_2^2 - b_1^2)(\xi - 0.5)^2]^{3/2} \times [b_1^2 - (\xi - 0.5)^2]^{1/2} \quad (3.6)$$

4. 수치해석 결과

이상에서 유도된 미분방정식을 수치해석하여 자유-자유의 지점조건을 갖는 띠기초의 무차원 고유진동수 c_i 를 산출하였다. 본 연구의 수치해석에서 미분방정식의 수치적분은 Runge-Kutta법을 이용하였고, 고유치인 무차원 고유진동수는 행렬값 탐사법을 결합한 Regula-Falsi법을 이용하여 산출하였다.

띠기초의 지반계수 K 가 0이면 지반으로 지지되어 있지 않은 수평 곡선보가 된다. 따라서 이 연구에서 유

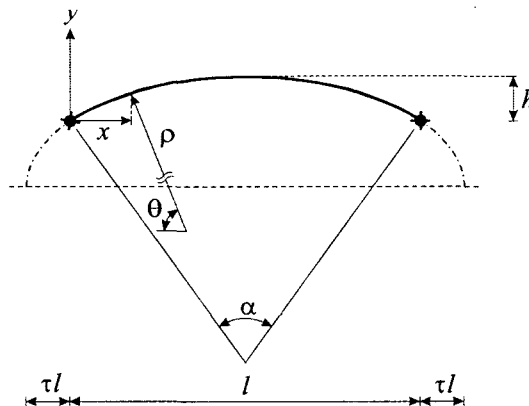


그림 4. 타원형 띠기초의 선형

도한 상미분방정식에서 지반변수 k 의 항을 생략하면 수평 곡선보의 무차원 고유진동수 c_i 를 산출할 수 있어야 한다.

표 1은 지반변수가 $k=0$ 일 때 이 연구와 문헌⁽¹⁰⁾의 수평 곡선보의 무차원 고유진동수를 비교한 표이다. 두 결과는 서로 우수하게 접근하여 이 연구에서 유도한 상미분방정식을 수평 곡선보에 대해서도 적용할 수 있음을 알 수 있다.

이 표의 결과는 지반변수와 관련된 항을 제외하는 상미분방정식의 이론적인 타당성의 검증뿐만 아니라 이 연구에서 채택한 Runge-Kutta method 및 Regula-Falsi method 등의 모든 수치해석 방법의 타당성을 동시에 검증해 준다.

표 2는 회전관성 및 비틀림관성이 무차원 고유진동수에 미치는 영향을 나타낸 것이다. 여기에서 회전관성과 비틀림관성의 고려여부를 나타내는 회전관성지표 E_R 과 비틀림관성지표 E_T 를 새로이 도입한다. 즉, 회전관성지표 $E_R=0$ 이면 회전관성을 무시하는 경우이고, $E_R=1$ 이면 고려하는 경우이다. 비틀림관성지표 E_T 도 마찬가지이다.

표 2에서 회전관성과 비틀림관성을 고려하면 c_i 값은 감소하는 것을 알 수 있다. 회전관성과 비틀림관성을 고려하면 변위가 증가하여 동일한 에너지로 자유진동하는 띠기초의 에너지를 보상하여야 하기 때문에 고유진동수는 감소하여야 한다. 표에서 굵은 글씨는 비틀림모드의 c_i 값을 나타낸 것으로 비틀림관성(E_T)을 고려하지 않는 경우에 특정 모드의 c_i 값이 계산되지 않는 것을 알 수 있다. 한편 회전관성(E_R)을 고려하지 않더라도 휨 진동은 생략되지 않는 것을 알 수 있다. 띠기초의 휨 진동은 단면회전각 ψ 에 의한 회전관성력보다는 수직변위 v 에 의한 수직관성력에 의하여 더 우세하게 지배되기 때문으로 사료된다.

표 1. 수평 곡선보($k=0$)의 무차원 고유진동수* 비교

지점조건	자료출처	무차원 고유진동수 c_i			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
회전-회전	본 연구	4.39	26.28	62.26	112.1
	문헌[65]	4.34	26.18	62.18	112.1
회전-고정	본 연구	9.02	34.40	73.81	127.0
	문헌[65]	9.29	34.24	73.73	127.0
고정-고정	본 연구	14.92	43.20	86.19	142.8
	문헌[65]	14.90	43.13	86.13	142.7

* $f=0.25, b=0.045, k=0, a=0.69, s=90.1, s_b=58.5, u=0.32, e=1.2$

표 2 회전관성 및 비틀림관성의 영향*

E_R	E_T	무차원 고유진동수, c_i			
		$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$
0	0	-	44.24	67.53	-
1	0	-	43.42	65.17	-
0	1	35.83**	45.12	60.60	69.48
1	1	35.75	44.40	59.95	67.78

* $f=0.1, b=0.2, k=80, a=0.2, s=14.6, s_b=15.5, u=0.35, e=1.15$

** 굵은 글씨: 비틀림 모드

그림 5는 무차원 고유진동수 c_i 와 접촉면폭비 b 의 관계를 나타낸 그림이다. b 가 증가함에 따라서 c_i 값은 증가하거나 또는 감소한다. b 가 증가하면 휨 강성과 비틀림 강성은 증가하여 c_i 값도 증가하지만, b 가 일정값 이상을 갖게되면 단면폭이 너무 커져서 띠기초는 비틀림에 대한 강성이 저하되며, c_i 값은 감소하게 된다. 이와 같은 현상은 휨과 비틀림 모드를 동시에 연계하여 지배미분방정식에 고려하였기 때문이다. 그림을 살펴보면 $b=0.054$ 에서 제 1 모드는 강성 모드가 된다. 따라서 $b_{\min}=0.054$ 이하에서 띠기초는 동하중에 대하여 불안정하여 지기 때문에 $b=0.054$ 이상을 확보하여야 띠기초는 동하중에 대하여 안정하다.

그림 6는 무차원 고유진동수 c_i 와 형상비 a 의 관계를 나타낸 그림이다. a 가 증가하면 c_i 는 증가하는 경우와 감소하는 경우가 동시에 발생한다. 이는 그림 5에서와 같이 휨과 비틀림 모드를 동시에 고려하여 나타난 결과로 a 가 증가하면 휨 강성과 비틀림 강성은 증가하여 c_i 값도 증가하지만, a 가 일정값 이상을 갖게되면 단면폭이 너무 커져서 띠기초는 비틀림에 대한 강성이 저하되며, c_i 값은 감소하게 되는 것으로 사료된다.

5. 결론

연구는 지반 위에 놓인 타원형 띠기초의 면외 자유진동에 관한 연구이다. 띠기초가 진동할 때 부재의 미소요소에 발생하는 합응력, 지반반력 및 관성력에 대한 동적 평형방정식을 유도하였다. 위의 기본식들을 이용하여 타원형 띠기초의 자유진동을 지배하는 상미분방정식을 유도하였으며, 자유-자유 지점조건에 따른 경계조건식을 유도하였다. 유도된 미분방정식을 수치해석하여 띠기초의 고유진동수를 산출할 수 있는 수치해석기법을 개발하였다. 수평곡선보의 무차원 고유진동수와 본 연구의 결과를 비교하여 본 연구방법 및 수치해석 과정의 타당성을 검증하였으며, 실제의 수치해석 예제에서는 회전관성 및 비틀림관성, 접촉면폭비, 형상비 등이 무차원 고유진동수에 미치는 영향을 고찰하고 이를 표 및 그림에 나타내었다. 이 연구의 결과들은 기초공학 설계분야에서 그 활용성이 기대된다.

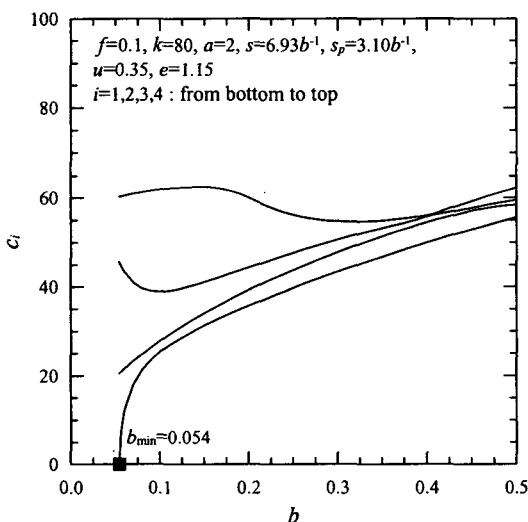


그림 5. c_i 와 b 의 관계

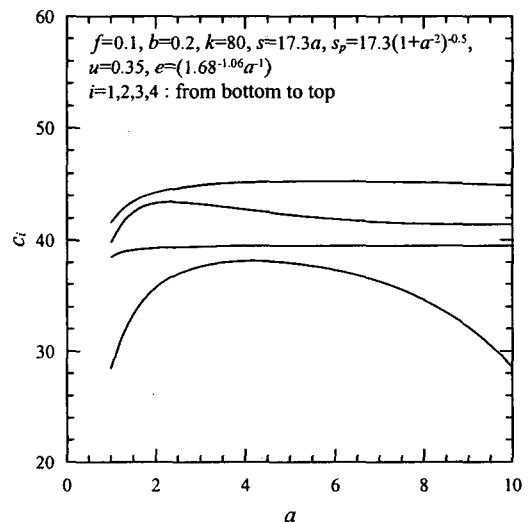


그림 6. c_i 와 a 의 관계

참고문헌

1. Issa, M.S., "Natural Frequencies of Continuous Curved Beams on Winkler-Type Foundation," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 127, No. 2, 1988, pp. 291-301.
2. Snyder, J.M. and Wilson, J.F., "Free Vibrations of Continuous Horizontally Curved Beams," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 157, No. 2, 1992, pp. 345-355.
3. Panayotounakos, D.E. and Theocaris, P.S., "The Dynamically Loaded Circular Beam on an Elastic Foundation." *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 47, 1980. pp. 139-144.
4. Wang, T.M. and Brannen, W.F., "Natural Frequencies for Out-of-Plane Vibrations of Curved Beams on Elastic Foundations," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 84, 1982, pp. 241-246.
5. 이병구, "전단층을 갖는 탄성지반 위에 놓인 보의 자유진동 해석", 한국강구조학회논문집, 제 6권, 제 3호, 1994, pp. 107-115.
6. Lee, B.K., Oh, S.J. and Park, K.K., "Free Vibrations of Shear Deformable Circular Curved Beams Resting on Elastic Foundations", *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, Vol. 2, No. 1, 2002, pp. 77-97.
7. Laura, P.A.A. and Maurizi, M.J., "Recent Research on Vibrations of Arch-Type Structures", *The Shock and Vibration Digest*, Vol. 19, 1987, pp. 6-9.
8. Selvadurai, A.P.A., *Elastic Analysis of Soil-Foundation Interaction*, Elsevier, 1979.
9. Volterra, E. and Gaines, J.H., *Advanced Strength of Materials*, Prentice-Hall, 1971, pp. 356-358.
10. 모정만, 변화곡률을 갖는 수평 곡선보의 자유진동 해석, 원광대학교 대학원 박사학위논문, 1997.