

탄성 현수선 요소를 이용한 케이블 구조물의 비선형 동적해석

Non-linear Dynamic Analysis of Cable Structures Using Elastic Catenary

황진홍* 이상주** 한상을***
Hwang, Jin-Hong Lee, Sang-Ju Han, Sang-Eul

ABSTRACT

Geometrical non-linearity due to the flexibility of cables must be considered efficiently in the dynamic analysis of cable structures. In this paper, formulation of tangent stiffness matrix of elastic catenary cable is derived by using relative nodal displacements, self-weight and unstressed cable length. Free vibration analysis of simply supported cable using elastic catenary cable elements is conducted and compared with that using truss elements. The result shows that elastic catenary cable elements are more compatible than truss elements in the case of analysis of cable structures. Furthermore, the characteristic of dynamic behaviors of cable structures by temporary instability phenomenon is confirmed.

1. 서 론

케이블은 인장재로서 유연성, 인장강도, 가벼운 단위중량 등의 고유의 특성을 가지고 있어, 대공간 구조물의 지붕 구조, 현수교 등의 구조재로써 널리 사용되고 있다. 특히, 긴 스패를 갖는 운동경기장, 전시관 등의 지붕구조물에 있어서 다른 구조재와 함께 사용되어 구조적 성능이 우수한 복합 대공간 구조물의 주요 부재로 각광받고 있다.

케이블을 사용한 구조물의 정적 및 동적해석시, 케이블의 유연성으로인한 대변형을 고려한 기하학적 비선형 해석이 수행되어야 한다. 이와 관련하여, O'Brien¹⁾은 단부 절점의 위치가 주어지는 케이블의 절점력을 결정하는데 이용되는 알고리즘을 개발하였고, Argyris와 Sharp²⁾는 프리스트레스 케이블 네트워크의 해석을 위해서 3차원 선요소를 도입하였다. Irvin³⁾은 라그랑주 좌표를 이용하여 집중하중을 받는 케이블 부재의 자유진동해석을 수행하였고, Henghold와 Russell⁴⁾은 다절점 곡선요소를 이용하였다. Jayaraman과 Knudson⁵⁾은 탄성 현수선 케이블 요소를 이용한 케이블구조의 정적 비선형 해석을 수행하고, 동적해석시 집중질량행렬을 사용하였다.

본 연구의 목적은 기하학적 비선형성을 고려해야하는 케이블 구조물의 해석에 있어서 동적해석 수행시 탄성 현수선 케이블 요소의 적합성을 검토하고, 케이블 구조물에서 외부의 동적하중에 대한 케이블의 일시적인 불안정상태에서의 거동특성 규명에 있다.

* 인하대학교 건축공학과 석사 과정
** 정회원·(주)Plus구조 기술사 사무소 선임연구원
*** 정회원·인하대학교 건축학부 교수

예제 모델해석 순서는 다음과 같다.

먼저 탄성 현수선 케이블요소를 이용하여 케이블 자중에 의한 정적평형상태에서 초기변위를 주어 케이블의 자유진동해석을 수행하고 트러스 요소를 이용한 해석결과와 비교하여 탄성 현수선 케이블요소의 적합성을 검토한다. 다음으로 Aden Air-Network 모델의 가정한 동적하중에 대한 비선형 동적해석을 수행하고 각 절점의 변위와 부재력을 검토한다. 또한 일반화- α 법을 이용하여 강성이 큰 포스트에 케이블로 지지하고 있는 단순 모델에 케이블 중간지점에 초기변위를 주어 해석하고, 가상의 진동에 대한 효과적인 수치적 감쇠를 확인한다.

2. 케이블 요소의 정식화

두 절점을 갖는 케이블 요소 A_0 점에서 변위 (u_1, u_2, u_3) 와 B_0 점에서 변위 (u_4, u_5, u_6) 가 발생하여, 각 절점의 변위에 대한 평형조건을 만족하는 절점력은 각각 $(N_1, N_2, N_3), (N_4, N_5, N_6)$ 가 되었다고 가정한다. 케이블 요소 내의 임의의 점 $P(x, y, z)$ 는 라그랑즈 좌표계로는 변형전 미소길이에 대해 p , 변형후 늘어난 미소길이에 대해 s 이다.

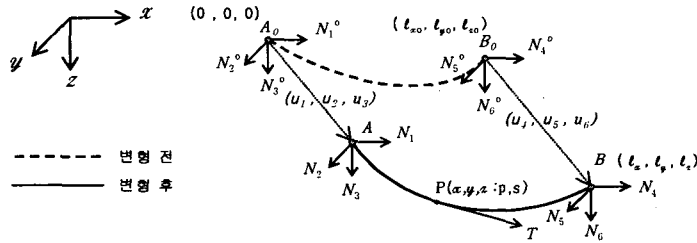


그림 1. 탄성 현수선 케이블 요소의 정식화

양단에서의 경계조건을 적용하면,

$$\begin{aligned}
 x(s) &= -\frac{N_1}{EA_0} s - \frac{N_1}{w} \ln \left[\frac{N_3 + ws + \{N_1^2 + N_2^2 + (N_3 + ws)^2\}^{1/2}}{(N_1^2 + N_2^2 + N_3^2)^{1/2}} \right] \\
 y(s) &= -\frac{N_2}{EA_0} s - \frac{N_2}{w} \ln \left[\frac{N_3 + ws + \{N_1^2 + N_2^2 + (N_3 + ws)^2\}^{1/2}}{(N_1^2 + N_2^2 + N_3^2)^{1/2}} \right] \\
 z(s) &= -\frac{N_3}{EA_0} s - \frac{wL_0^2}{2EA_0} - \frac{1}{w} \left[\{N_1^2 + N_2^2 + (N_3 + ws)^2\}^{1/2} - (N_1^2 + N_2^2 + N_3^2)^{1/2} \right]
 \end{aligned} \tag{1}$$

그리고,

$$\begin{aligned}
 l_x &= -\frac{N_1 L_0}{EA_0} s - \frac{N_1}{w} \ln \left[\frac{N_3 + wL_0 + \{N_1^2 + N_2^2 + (N_3 + wL_0)^2\}^{1/2}}{(N_1^2 + N_2^2 + N_3^2)^{1/2}} \right] \\
 l_y &= -\frac{N_2 L_0}{EA_0} s - \frac{N_2}{w} \ln \left[\frac{N_3 + wL_0 + \{N_1^2 + N_2^2 + (N_3 + wL_0)^2\}^{1/2}}{(N_1^2 + N_2^2 + N_3^2)^{1/2}} \right] \\
 l_z &= -\frac{N_3 L_0}{EA_0} s - \frac{wL_0^2}{2EA_0} - \frac{1}{w} \left[\{N_1^2 + N_2^2 + (N_3 + wL_0)^2\}^{1/2} - (N_1^2 + N_2^2 + N_3^2)^{1/2} \right]
 \end{aligned} \tag{2}$$

양 단부 절점에서의 힘의 평형과 변위의 적합조건을 이용하여 계산된 절점력과 길이 변화의 관계식을 행렬식으로 간단히 표현하면 다음과 같고, 이를 이용해 강성행렬을 구할 수 있다.

$$\begin{Bmatrix} dl_x \\ dl_y \\ dl_z \end{Bmatrix} = \mathbf{F} \begin{Bmatrix} dN_1 \\ dN_2 \\ dN_3 \end{Bmatrix} \quad \text{여기서, } \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial N_1} & \frac{\partial f}{\partial N_2} & \frac{\partial f}{\partial N_3} \\ \frac{\partial g}{\partial N_1} & \frac{\partial g}{\partial N_2} & \frac{\partial g}{\partial N_3} \\ \frac{\partial h}{\partial N_1} & \frac{\partial h}{\partial N_2} & \frac{\partial h}{\partial N_3} \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\begin{Bmatrix} dN_1 \\ dN_2 \\ dN_3 \end{Bmatrix} = \mathbf{K} \begin{Bmatrix} dl_x \\ dl_y \\ dl_z \end{Bmatrix} \quad \text{여기서, } \mathbf{K} = \mathbf{F}^{-1} \quad (4)$$

3. 수치해석 알고리즘

비선형 동적해석을 위한 전 단계로써 우선, 케이블의 자중에 의한 구조물의 정적평형상태를 찾아야 한다. 정적해석은 수정 뉴튼랩슨법을 이용하여 비선형 정적해석을 수행하였으며, 동적해석은 증분 평형방정식을 이용한 뉴마크법과 일반화- α 법을 이용하여 수행하였다. 단, 동적해석시 감쇠항은 고려하지 않았다.

3.1 뉴마크법

가장 많이 사용하는 방법으로 기본 동적 평형방정식은 다음과 같다.

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_{n+1} + \mathbf{C}\mathbf{v}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{d}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1} \quad (5)$$

여기서, \mathbf{M} , \mathbf{C} , \mathbf{K} 는 각각 질량, 감쇠, 강성행렬, \mathbf{a}_{n+1} , \mathbf{v}_{n+1} , \mathbf{d}_{n+1} , \mathbf{f}_{n+1} 는 각각 $n+1$ 시간스텝에서의 가속도, 속도, 변위, 외부하중벡터를 나타낸다.

제안된 예측자 및 수정자 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \text{예측자 ; } \quad \tilde{\mathbf{d}}_{n+1} &= \mathbf{d}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \frac{\Delta t^2}{2} (1 - 2\beta) \mathbf{a}_n \\ \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} &= \mathbf{v}_n + (1 - \gamma) \Delta t \mathbf{a}_n \\ \text{수정자 ; } \quad \mathbf{d}_{n+1} &= \tilde{\mathbf{d}}_{n+1} + \beta \Delta t^2 \mathbf{a}_{n+1} \\ \mathbf{v}_{n+1} &= \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} + \gamma \Delta t \mathbf{a}_{n+1} \end{aligned} \quad (6)$$

주어진 초기값 $\mathbf{v}_0, \mathbf{d}_0$ 로부터 아래 식을 통해 \mathbf{a}_0 를 구할 수 있다.

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_0 = \mathbf{f}_0 - \mathbf{C}\mathbf{v}_0 - \mathbf{K}\mathbf{d}_0 \quad (7)$$

위의 초기값을 이용해서 매 시간스텝별로 아래의 과정을 반복해서 각 시간스텝별 가속도, 속도, 변위를 계산할 수 있다.

$$(M + \gamma \Delta t C + \beta \Delta t^2 K) \mathbf{a}_{n+1} = \mathbf{f}_{n+1} - C \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} - K \tilde{\mathbf{d}}_{n+1} \quad (8)$$

3.2. 일반화- α 법

이 방법은 Hilber, Hughes, Taylor⁸⁾에 의해 제안된 HHT- α 법을 개선한 시간적분법으로 파의 전달문제를 풀 때 나타나는 가상의 진동을 감소시키는 수치감쇠를 가지고 있기 때문에 선형 또는 비선형의 동적해석 문제에 효과적으로 이용될 수 있다.

동적 평형방정식은 다음과 같다.

$$M \mathbf{a}_{n+1-\alpha_m} + C \mathbf{v}_{n+1-\alpha_f} + K \mathbf{d}_{n+1-\alpha_f} = \mathbf{f}(t_{n+1-\alpha_f}) \quad (9)$$

여기서,

$$\mathbf{a}_{n+1-\alpha_m} = (1 - \alpha_m) \mathbf{a}_{n+1} + \alpha_m \mathbf{a}_n$$

$$t_{n+1-\alpha_f} = (1 - \alpha_f) t_{n+1} + \alpha_f t_n$$

$$\alpha_m = \frac{2\rho - 1}{\rho + 1}, \quad \alpha_f = \frac{\rho}{\rho + 1}, \quad \gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f, \quad \beta = \frac{1}{4} (1 - \alpha_m + \alpha_f)^2$$

이고 ρ 는 높은 차수의 수치적 감쇠를 결정하는 상수이며 0부터 1까지의 값을 가진다.

예측자 및 수정자 방정식은 다음과 같다.

$$\text{예측자 : } \tilde{\mathbf{d}}_{n+1} = \mathbf{d}_n + \Delta t \mathbf{v}_n + \Delta t^2 \left\{ \left(\frac{1}{2} - \frac{\beta}{1 - \alpha_m} \right) \mathbf{a}_n + \frac{\beta \alpha_f}{1 - \alpha_m} \mathbf{a}_{n+1} \right\} \quad (10)$$

$$\tilde{\mathbf{v}}_{n+1} = \mathbf{v}_n + \Delta t \left\{ \left(1 - \frac{\gamma}{1 - \alpha_m} \right) \mathbf{a}_n + \frac{\gamma \alpha_f}{1 - \alpha_m} \mathbf{a}_{n+1} \right\}$$

$$\text{수정자 : } \mathbf{d}_{n+1} = \tilde{\mathbf{d}}_{n+1} + \beta \Delta t^2 \frac{1 - \alpha_f}{1 - \alpha_m} \mathbf{a}_{n+1}$$

$$\mathbf{v}_{n+1} = \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} + \gamma \Delta t \frac{1 - \alpha_f}{1 - \alpha_m} \mathbf{a}_{n+1}$$

비선형을 고려한 계산과정을 간단히 정리하면 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} &= \tilde{\mathbf{d}}_{n+1} \\ \mathbf{v}_{n+1}^{(i)} &= \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} \\ \mathbf{a}_{n+1}^{(i)} &= \mathbf{0} \\ \Delta \mathbf{f}_{n+1}^{(i)} &= \mathbf{f}_{n+1} - M \mathbf{a}_{n+1}^{(i)} - C \mathbf{v}_{n+1}^{(i)} - K_T \mathbf{d}_{n+1}^{(i)} \\ (M + \gamma \Delta t C + \beta \Delta t^2 K) \Delta \mathbf{a} &= \Delta \mathbf{f}_{n+1}^{(i)} \\ \mathbf{a}_{n+1}^{(i+1)} &= \mathbf{a}_{n+1}^{(i)} + \Delta \mathbf{a} \\ \mathbf{v}_{n+1}^{(i+1)} &= \tilde{\mathbf{v}}_{n+1} + \Delta t \gamma \mathbf{a}_{n+1}^{(i+1)} \\ \mathbf{d}_{n+1}^{(i+1)} &= \tilde{\mathbf{d}}_{n+1} + \Delta t^2 \beta \mathbf{a}_{n+1}^{(i+1)} \end{aligned}$$

4. 해석모델 및 결과분석

4.1. 해석모델1

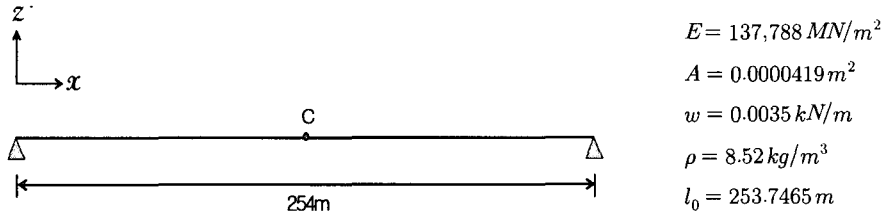


그림 2. 해석모델1

그림 2과 같은 단순지지 케이블의 중앙부 점C에 수직방향으로 -3m의 초기변위를 주고 자유진동해석을 수행하였다. 케이블의 정확한 정적평형상태를 구하기 위하여 21절점 20부재의 트러스요소를 사용하였고, 현수선 요소는 3절점 2부재를 사용하였다. 동적해석은 평균가속도법을 이용하였으며 $\Delta t = 0.05$ 초로하여 수행하였다. 각각의 모델의 중앙부 C점의 수직변위(그림 3)와 부재력(그림 4)을 비교 검토하였다.

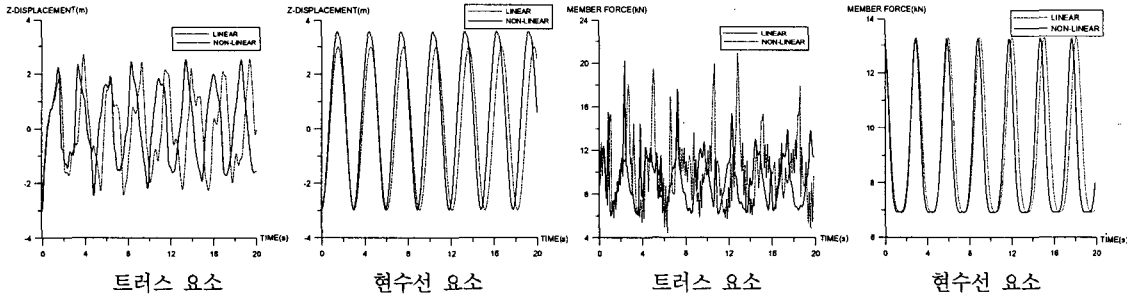


그림 3. 요소별 Z방향 변위(m)

그림 4. 요소별 부재력(kN)

변위 형태는 현수선 요소와 트러스 요소가 서로 차이를 보인다. 이 결과를 통해 트러스 요소가 직선요소로 정식화되어 완전한 케이블의 모델로서 적합하지 못함을 알 수 있다. 현수선 요소의 경우 선형해석결과와 비선형해석결과 비교시 진폭에 있어서 0.6m 정도 차이를 보인다. 이는 처진 상태의 케이블의 장력이 상향진동을 하면서 영향을 주었기 때문이다.

현수선을 이용한 부재력의 해석결과를 보면, 상향으로 진동하는 케이블의 부재력 감소를 알 수 있다. 이는 케이블이 하향으로 진동시 처짐으로 인해 케이블의 부재력이 증가하는 반면 상향 진동시에는 부재력이 감소한다는 것을 잘 보여주고 있다.

4.2. 해석모델2

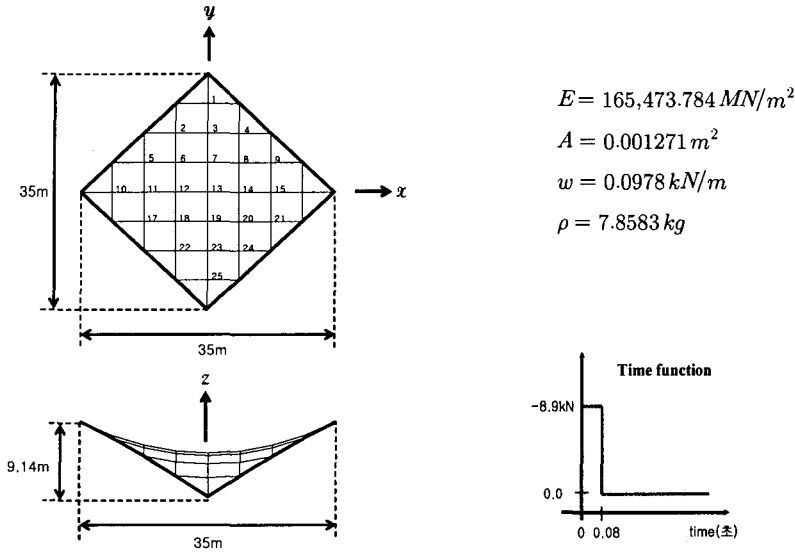


그림 5. Aden Air-Network

다음으로 그림 5와 같은 형태와 부재정보를 가지는 Aden Air-Network모델에 각 절점마다 -8.9kN씩의 하중을 0~0.08초 사이에 일정하게 가하고 $\Delta t = 0.001$ 초로 하여 해석을 수행하였고 그 결과는 그림 6, 그림 7과 같다.

트러스 요소를 이용한 해석한 결과 선형해석과 비선형 해석시 차이가 거의 없었다. 원인은 부재력의 결과(그림 7)를 보면 알 수 있듯이 부재에 압축력이 작용하고 있는 시간이 상당 시간되고 트러스 요소로 해석을 했기 때문에 압축력을 받는 부재들이 그 부재력을 그대로 전체 구조물의 거동에 영향을 미쳤기 때문이다. 하지만 케이블은 압축력을 전달할 수 없으므로 해석결과에 상당부분 문제가 있다.

하지만 그림 6.b의 결과를 보면 현수선 요소를 이용한 해석시에는 선형해석과 비선형 해석시 변위형태, 진폭에 있어서 상당한 차이를 보였다. 또한 부재력의 결과를 통해서 상하진동이 진행됨에 따라 X방향의 케이블과 Y방향 케이블이 하향시, 상향시 각각 번갈아가며 인장력을 전달하는 역할을 하는 것을 알 수 있다. 이는 케이블네트의 상하진동시 Y방향 케이블이 X방향 케이블의 떠오르는 것을 잡아주고, 반대로 하향진동시는 X방향 케이블이 처짐으로 인한 인장력 증가 현상을 잘 보여주고 있다.

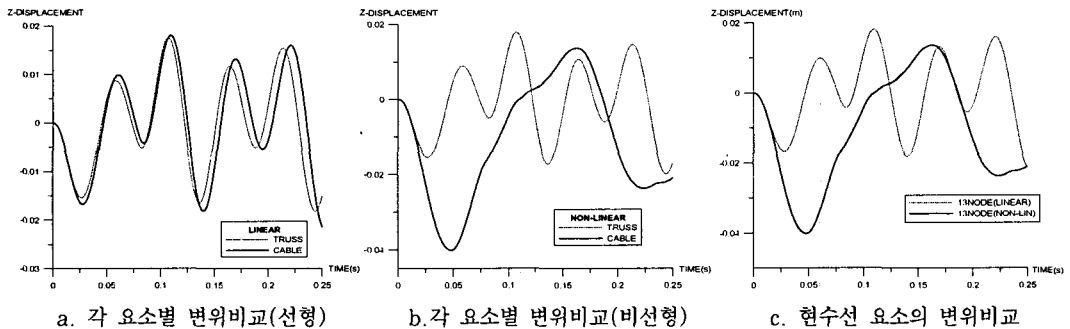


그림 6. 13번 절점의 Z방향 수직변위(m)

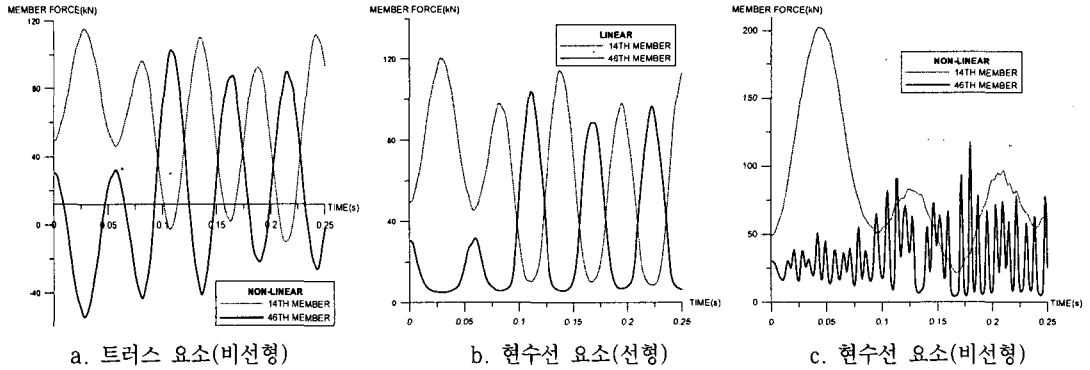
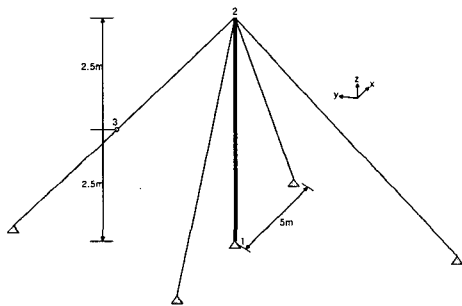


그림 7. 각 요소별 X방향 케이블부재(14번), Y방향 케이블부재(46번)의 부재력(kN)

4.3. 해석모델3



Post ;

$$E = 205,800 \text{ MN/m}^2$$

$$A = 0.01 \text{ m}^2$$

$$w = 0.77 \text{ kN/m}$$

$$\rho = 7.86 \text{ kg/m}^3$$

Cable ;

$$E = 137,200 \text{ MN/m}^2$$

$$A = 0.001 \text{ m}^2$$

$$w = 0.08154 \text{ kN/m}$$

$$\rho = 8.32 \text{ kg/m}^3$$

$$l_0 = 7.071 \text{ m}$$

그림 8. 해석모델3

일반화- α 법을 이용하여 그림 8과 같은 모델을 절점 3의 위치에 Y방향으로 초기변위 10cm를 가하고, $\rho = 0.5$, $\Delta t = 0.001$ 초로 하여 해석을 수행하였다. 그림 9-a에서의 결과는 트러스 요소를 사용한 비선형 해석결과이다. 높은 주파수를 가지는 가상의 진동을 제거하는데 일반화- α 법이 상당히 효과적이라는 것을 잘 보여주고 있다. 케이블의 일시적 불안정 현상을 고려해서 현수선 요소를 사용하여 해석한 결과는 그림 9-b에 나타내었다.

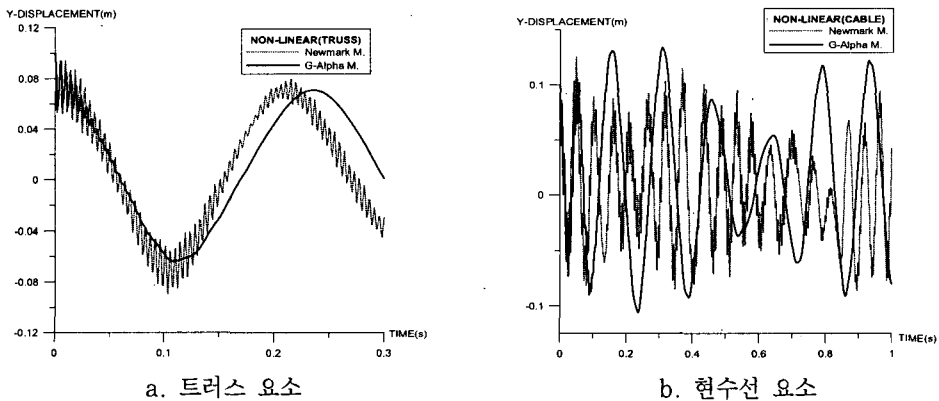


그림 9. 각 시간적분법별 해석결과

5. 결 론

본 연구에서는 현수선 요소를 이용하여 기하학적 비선형성을 고려한 케이블 구조물의 기하학적 비선형 동적해석을 수행하였다. 수치해석기법으로는 케이블의 자중을 고려한 정적평형상태의 좌표 및 부재력을 계산하는데 뉴튼랩슨법이 이용되었고, 동적해석에서는 감쇠를 고려하지 않은 뉴마크법을 이용하여 시간응답 및 부재력을 계산하였다. 또한 가상의 진동을 감소시키는 수치감쇠를 가진 시간적분법인 일반화- α 법을 이용하여 효과적으로 시간응답을 계산하였다.

연구의 결과를 정리하면 다음과 같다.

1. 정적해석의 결과를 통해 많은 요소로 분할함으로써 비교적 정확한 해를 찾을 수 있었던 트리스요소는 정적해석시와는 달리 동적해석시에는 직선으로 이루어진 케이블 곡선의 변위와 변위에 따른 부재력의 계산의 적절하지 못함이 해석모델1의 결과를 통해 알 수 있다.
2. 외부 동적하중에 대한 동적해석시, 케이블의 일시적 불안정 상태의 문제에 대한 처리 문제에 있어서 현수선 요소는 강성행렬 구성과정에서 자중과 변화된 케이블의 길이를 이용해 평형상태를 찾기 때문에 불안정 케이블의 동적해석에도 그 적용성이 우수함을 알 수 있다.
3. 동적해석문제에 있어서 비선형성이 강한 예제의 높은 주파수 응답을 제거하는 방법인 일반화- α 법을 이용하여 강성이 강한 구조물의 높은 주파수에 의한 가상의 진동을 감소시키는 효과를 얻을 수 있다.

참고문헌

1. O'Brien, W. T. and Francis, A. J. "Cable movements under two dimensional loads" J. Struct. Div. ASCE 90 ST3, pp.89~123(1964)
2. Argyris, J. H. and Scharpf, D. W. "Large deformation analysis of prestressed networks" J. Struct. Div. ASCE 48, pp.633~653(1972)
3. Irvin, H. M. *Cable structures*, MIT Press(1981)
4. Henghold, W. H. and Russell, J. J "Equilibrium and natural frequencies of cable structures" Comput. Struc. 6, pp.267~271(1976)
5. Peyrot, A. H. and Goulois, A. M. "Analysis of cable structures" Comput. Struc. 10(5), pp.805~813(1979)
6. Jayaraman, H. B., Knudson, W. C., Schneider, S. and Hermann, P. "A small strain curved element for the analysis of cable structures" ISD Report No.276, University of Stuttgart(May 1980)
7. 한상을, 이주선, 정명채, 이진섭, '동적감쇠를 고려한 탄성 현수선 케이블의 비선형 해석에 관한 연구', 전산구조공학회, pp.331~338(2000 가을)
8. Hilber, H. M., Hughes, T.J.R. and Taylor, R. L., "Improved Numerical Dissipation for Time Integration Algorithms in Structural Dynamics", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol.5, pp.283~292
9. Hulbert, Gregory M., Chung, Jintai "Explicit time integration algorithms for structural dynamics with optimal numerical dissipation", Comput. Struc. 137 pp175~188(1996)