

열전도 문제에 대한 3 차원 구조물의 위상 최적설계

Topology Design Optimization of Three Dimensional Structures for Heat Conduction Problems

문 세 준* 조 선 호**
Moon, Sejoon and Cho, Seonho

ABSTRACT

In this paper, using an adjoint variable method, we develop a design sensitivity analysis (DSA) method applicable to 3-Dimensional heat conduction problems in steady state. Also, a topology design optimization method is developed using the developed DSA method. Design sensitivity expressions with respect to the thermal conductivity are derived. Since the already factorized system matrix is utilized to obtain the adjoint solution, the cost for the sensitivity computation is trivial. For the topology design optimization, the design variables are parameterized into normalized bulk material densities. The objective function and constraint are the thermal compliance of structures and allowable material volume, respectively. Through several numerical examples, the developed DSA method is verified to yield efficiency and accurate sensitivity results compared with finite difference ones. Also, the topology optimization yields physical meaningful results.

1. 서론

위상 최적설계의 목적은 구조물에서 요구되는 성능에 대하여 최적의 레이아웃을 결정하는 것이다. Bendsøe와 Kikuchi[1]의 균질화 방법(Homogenization Method)을 이용한 위상 최적설계 이후에 수많은 위상 최적설계 기법이 선형과 비선형 구조물에 대해서 발전되어 왔다[2]. 위상 최적설계는 많은 수의 설계변수를 포함하고 있기 때문에 주로 설계 구배, 즉 성능함수의 설계 민감도에 기초한 최적화 방법을 이용하여 해를 구한다. 많은 설계민감도 해석방법 중 연속체 기반의 에조인 변수법(Adjoint Variable Method)[3]이 가장 효율적이고 정확하게 설계민감도를 구하는 방법으로 알려져 있어 위상 최적설계에서 폭넓게 이용되고 있다. 이는 연속체를 기반으로 하는 변분 방정식에 설계변수에 대한 1차 변분을 취함으로써 얻을 수 있다. 본 논문에서는 재료 물성치와 같은 비형상 설계변수에 대한 연속체 기반 설계민감도 해석법을 사용하여 정상 상태에서 3차원 열전도 문제에 대한 효율적인 설계민감도 해석법을 제시하였다. 제시한 설계민감도 해석법은 매우 효율적이며 기존의 방법과 비교하여 정확한 값을 갖는 것을 확인하였으며 위상 최적화에 관한 몇 가지 예제를 통하여 얻은 결과가 물리적인 관점에서 타당함을 확인하였다.

* 학생회원, 서울대학교 조선해양공학과 석사과정

**정회원, 서울대학교 조선해양공학과 부교수

2. 열전도 문제의 지배 방정식 및 변분식

그림 1에서, 경계면 Γ 를 가지며 열린 영역 Ω 로 이루어진 3차원 물체를 생각하자. 주어진 경계 조건은 온도 경계(Temperature Boundary)인 Γ_T^0 , 열속 경계(Flux Boundary) Γ_T^1 , 그리고 대류 경계(Convection Boundary) Γ_T^2 가 있고, 또한 $\Gamma_T^0 \cup \Gamma_T^1 \cup \Gamma_T^2 = \Gamma$ 인 관계가 있다고 하자. 주어진 물체는 내부 발열율(Rate of Internal Heat Generation) Q 와 주어진 경계조건의 영향을 받는다. 온도 경계 Γ_T^0 에서의 온도를 T_0 라 하고, 열속 경계 Γ_T^1 에서 열속 q 는 경계면에 수직하게 물체 내부로 유입된다고 정한다. 그리고 대류 경계 Γ_T^2 에서의 주위 온도(Ambient Temperature)를 T_∞ 라 하자. 경계에서의 수직 단위 벡터 \mathbf{n} 은 경계에 수직하게 물체 외부로 나가는 방향으로 정한다.

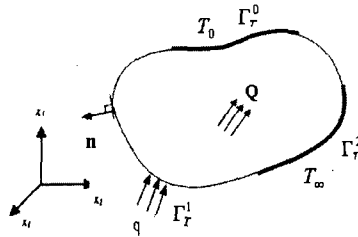


그림 1 3차원 열전도 탄성체

온도장(Temperature Field) T 에서 정상 상태에서의 열전도 방정식은 다음과 같다.

$$-\kappa T_{,ii} = Q \quad (i=1,2,3), \quad (1)$$

여기서, κ 는 등방성(Isotropic) 물체의 열전도 계수이고, 온도의 영향을 받지 않는다고 가정한다. 앞에서 언급한 물체에 적용되는 경계 조건은 다음과 같다.

$$T = T_0 \quad \text{on } \Gamma_T^0, \quad (2)$$

$$\kappa T_{,i} n_i = q \quad \text{on } \Gamma_T^1, \quad (3)$$

$$\kappa T_{,i} n_i + h(T - T_\infty) = 0 \quad \text{on } \Gamma_T^2, \quad (4)$$

여기서 h 는 대류 계수(Convection Coefficient)이고 양의 값을 갖는다. 변분 공간 \bar{Y} 에 속하는 가상의 온도 \bar{T} 를 이용하여 식 (1)는 다음과 같이 약 형식(Weak Form)으로 표현된다.

$$\int_{\Omega} (-\kappa T_{,ii} - Q) \bar{T} d\Omega = 0 \quad \text{for all } \bar{T} \in \bar{Y}, \quad (5)$$

여기서 식(5)는 “가상 일률의 원리(Principle of Virtual Power)”를 뜻하나 단위 시간에 대해서 적분을 하면, “가상 일의 원리(Principle of Virtual Work)”라고 볼 수 있다. 경계 조건인 식(2)-(4)를 이용하면, 식(5)를 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\int_{\Omega} \kappa \delta_{ij} T_{,i} \bar{T}_{,j} d\Omega - \int_{\Omega} Q \bar{T} d\Omega - \int_{\Gamma_T^1} q \bar{T} d\Gamma + \int_{\Gamma_T^2} h(T - T_\infty) \bar{T} d\Gamma = 0, \quad \text{for all } \bar{T} \in \bar{Y} \quad (6)$$

온도에 대해서 선형적인 열 에너지 형식(Thermal Energy Form)을 다음과 같이 정의한다.

$$A(T, \bar{T}) \equiv \int_{\Omega} T_{,i} \kappa \delta_{ij} \bar{T}_{,j} d\Omega + \int_{\Gamma_T^2} h T \bar{T} d\Gamma. \quad (7)$$

또한 온도에 대해 선형적인 하중 형식(Load Form)을 다음과 같이 정의한다.

$$L(\bar{T}) = \int_{\Omega} Q\bar{T}d\Omega + \int_{\Gamma_1} q\bar{T}d\Gamma + \int_{\Gamma_2} hT_{\infty}\bar{T}d\Gamma. \quad (8)$$

그러면, 식(6)을 다음과 같이 간략히 쓸 수 있다.

$$\text{Find } T \in Y \text{ such that } A(T, \bar{T}) = L(\bar{T}) \text{ for all } \bar{T} \in \bar{Y}. \quad (9)$$

3. 연속체 기반의 설계 민감도 해석

3.1 직접미분법(Direct differentiation method)

각 요소의 열전도 계수로 이루어진 비형상 설계변수 \mathbf{u} 를 고려 할 때, 주어진 설계 변수 \mathbf{u} 에 대해서, 식 (9)는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$\text{Find } T \in Y \text{ such that } A_{\mathbf{u}}(T, \bar{T}) = L_{\mathbf{u}}(\bar{T}) \text{ for all } \bar{T} \in \bar{Y}, \quad (10)$$

여기서 밑 첨자 \mathbf{u} 는 식(10)을 설계 변수에 대해 변분을 취할 때, 각 형식이 설계변수에 영향을 받는다는 의미이다. 식(10)을 설계 변수 \mathbf{u} 에 대해 1차 변분을 취하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$A_{\mathbf{u}}(T', \bar{T}) = L'_{\mathbf{u}}(\bar{T}) - A'_{\mathbf{u}}(T, \bar{T}) \text{ for all } \bar{T} \in \bar{Y}. \quad (11)$$

다음으로 열전도 문제에서 사용하게 될 목적함수를 적분 형태로 나타내면 다음과 같다.

$$\psi = \int_{\Omega} g_1(\mathbf{u}, T, \nabla T)d\Omega + \int_{\Gamma} g_2(\mathbf{u}, T, \nabla T)d\Gamma. \quad (12)$$

식(12)에 대해서 설계변수에 대한 1차 변분을 취하면 다음 식을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} \psi' &= \frac{d}{d\tau} \left[\int_{\Omega} g_1(\mathbf{u} + \tau\delta\mathbf{u}, T(\mathbf{u} + \tau\delta\mathbf{u}), \nabla T(\mathbf{u} + \tau\delta\mathbf{u}))d\Omega + \int_{\Gamma} g_2(\mathbf{u} + \tau\delta\mathbf{u}, T(\mathbf{u} + \tau\delta\mathbf{u}), \nabla T(\mathbf{u} + \tau\delta\mathbf{u}))d\Gamma \right]_{\tau=0}. \quad (13) \\ &= \int_{\Omega} (g_{1,\mathbf{u}}\delta\mathbf{u} + g_{1,T}T' + g_{1,\nabla T}\nabla T')d\Omega + \int_{\Gamma} (g_{2,\mathbf{u}}\delta\mathbf{u} + g_{2,T}T' + g_{2,\nabla T}\nabla T')d\Gamma \end{aligned}$$

식(11)에서 얻은 T' 를 이용하여 식(13)의 목적함수에 대한 설계 민감도를 쉽게 구할 수 있다.

3.2 예조인 변수법(Adjoint variable method)

식(13)의 설계변수에 대한 암시적 종속항을 이용하여 열전도 문제에 대한 예조인 식을 다음과 같이 구성한다

$$A_{\mathbf{u}}(\lambda, \bar{\lambda}) = \int_{\Omega} (g_{1,T}\bar{\lambda} + g_{1,\nabla T}\nabla\bar{\lambda})d\Omega + \int_{\Gamma} (g_{2,T}\bar{\lambda} + g_{2,\nabla T}\nabla\bar{\lambda})d\Gamma \text{ for all } \bar{\lambda} \in \bar{Y}, \quad (14)$$

여기서 λ 는 균일(Homogeneous) 경계조건을 만족하는 예조인 응답이다. $\bar{T} \in \bar{Y}$ 이고, $\lambda \in \bar{Y}$ 이므로, 식(11)은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$A_{\mathbf{u}}(T', \lambda) = L'_{\mathbf{u}}(\lambda) - A'_{\mathbf{u}}(T, \lambda) \text{ for all } \lambda \in \bar{Y} \quad (15)$$

또한 $T' \in \bar{Y}$ 과 $\bar{\lambda} \in \bar{Y}$ 이므로, 식(14)는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$A_{\mathbf{u}}(\lambda, T') = \int_{\Omega} (g_{1,T} T' + g_{1,\nabla T} \nabla T') d\Omega + \int_{\Gamma} (g_{2,T} T' + g_{2,\nabla T} \nabla T') d\Gamma \text{ for all } T' \in \bar{Y}. \quad (16)$$

$A_{\mathbf{u}}(\bullet, \bullet)$ 은 대칭 연산자(Symmetric Operator)이므로 다음 식이 성립한다.

$$A_{\mathbf{u}}(T', \lambda) = A_{\mathbf{u}}(\lambda, T'). \quad (17)$$

식(15)와 식(16)은 서로 같으므로, 다음과 같은 식을 쓸 수 있다.

$$\int_{\Omega} (g_{1,T} T' + g_{1,\nabla T} \nabla T') d\Omega + \int_{\Gamma} (g_{2,T} T' + g_{2,\nabla T} \nabla T') d\Gamma = L'_{\delta \mathbf{u}}(\lambda) - A'_{\delta \mathbf{u}}(T, \lambda). \quad (18)$$

식(18)을 식(13)에 대입하면 다음 식이 얻어진다.

$$\psi' = \int_{\Omega} g_{1,\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma} g_{2,\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} d\Gamma + L'_{\delta \mathbf{u}}(\lambda) - A'_{\delta \mathbf{u}}(T, \lambda). \quad (19)$$

식(19)를 살펴보면, 예조인 설계민감도를 구하기 위해서는 이미 얻은 응답 T 와 예조인 응답인 λ 만을 필요로 하는 것을 알 수 있다. λ 값은 이미 구해진 탄젠트 매트릭스를 이용하기 때문에 빠른 시간 내에 구할 수 있다. 식(19)의 효율성과 정확성은 5장에서 살펴본다.

4. 위상 최적 설계의 정식화

위상 최적설계를 위해서 재료 분포는 '0'에서 '1' 사이의 연속적인 값을 갖는 정규 재료밀도(Normalized Bulk Material Density) 함수 \mathbf{u} 를 도입하였다. 유한요소법을 이용하기 위해서 영역을 NE 개의 요소로 이산화했고, 재료밀도는 각 요소마다 일정하다고 두면 재료분포는 다음과 같이 정식화 할 수 있다.

$$\kappa_i = u_i^P \kappa_0, \quad (i = 1, 2, \dots, \text{NE}), \quad (20)$$

$$0 < u_{\min} \leq u_i \leq 1, \quad (21)$$

κ_0 는 재료의 초기 열전도 계수이고 P 는 집중된 재료 분포를 위한 벌칙인자(Penalty Parameter)이다. 수치적 특이점(Singularity)을 피하기 위해 최소점 u_{\min} 을 부여하였다. 위상 최적설계 문제는 다음과 같이 정식화할 수 있다.

$$\text{Minimize } \Pi = \int_{\Omega} Q T d\Omega + \int_{\Gamma} q T d\Gamma + \int_{\Gamma} h T_{\infty} T d\Gamma, \quad (22)$$

$$\text{Subject to } \int_{\Omega} \mathbf{u} d\Omega \leq V_{\text{allowable}}, \quad (23)$$

여기서 $V_{\text{allowable}}$ 은 허용 재료량(Allowable Volume)을 의미한다. 위상 최적설계를 위하여 다음 식과 같이 열 컴플라이언스(Thermal Compliance)를 정의하자.

$$\psi = \int_{\Omega} g_1(\mathbf{u}, T, \nabla T) d\Omega + \int_{\Gamma} g_2(\mathbf{u}, T, \nabla T) d\Gamma = L_{\mathbf{u}}(T). \quad (24)$$

식(24)를 설계 변수 \mathbf{u} 에 대해 1차 변분을 취하면 다음 식을 유도 할 수 있다.

$$\psi' = \int_{\Omega} (g_{1,\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + g_{1,T} T' + g_{1,\nabla T} \nabla T') d\Omega + \int_{\Gamma} (g_{2,\mathbf{u}} \delta \mathbf{u} + g_{2,T} T' + g_{2,\nabla T} \nabla T') d\Gamma \quad (25)$$

예조인 식은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$A_u(\lambda, \bar{\lambda}) = \int_{\Omega} (g_{1,r} \bar{\lambda} + g_{1,vr} \nabla \bar{\lambda}) d\Omega + \int_{\Gamma} (g_{2,r} \bar{\lambda} + g_{2,vr} \nabla \bar{\lambda}) d\Gamma = \int_{\Omega} Q \bar{\lambda} d\Omega + \int_{\Gamma} q \bar{\lambda} d\Gamma + \int_{\Gamma} h T_{\infty} \bar{\lambda} d\Gamma \quad (26)$$

식(9)과 식(26)을 비교해보면 $\lambda = T$ 이므로, 열 컴플라이언스에 대한 설계 민감도 식은 다음과 같이 얻을 수 있다.

$$\psi' = \int_{\Omega} g_{1,u} \delta u d\Omega + \int_{\Gamma} g_{2,u} \delta u d\Gamma + L'_{\delta u}(T) - A'_{\delta u}(T, T) \quad (27)$$

또한, 식(27)은 다음과 같이 간단하게 정리할 수 있다.

$$\psi' = -A'_{\delta u}(T, T) = - \int_{\Omega} T_{,i} \kappa' \delta_{ij} T_{,j} d\Omega. \quad (28)$$

5. 수치적 예제

5.1 열전달 계수에 대한 온도의 설계 민감도

온도장에 대해서 앞서 유도한 설계 민감도 기법의 정확성과 효율성을 확인하기 위해 그림 2와 같은 간단한 3차원 모델을 생각하자. 주위 온도 $T_{\infty} = 20^{\circ}\text{C}$ 라 하고, 대류 조건은 평판의 오른쪽 면에 작용하고 있고, 그림에서와 같이 2개의 요소에서 $Q = 1000.0(\text{W}/\text{m}^3)$ 로 발열이 되고 있다고 가정하자. 열전도 계수와 대류 계수는 각각 $\kappa = 15.0(\text{W}/\text{m} \cdot ^{\circ}\text{C})$, $h = 12.0(\text{W}/\text{m}^2 \cdot ^{\circ}\text{C})$ 라 두었다. 설계 변수는 모든 요소의 열전도 계수이고 목적 함수는 225번 절점의 온도이다. 그림 3은 225번 절점에서 온도의 열전도 계수에 대한 설계민감도 값을 도시한 결과이다.

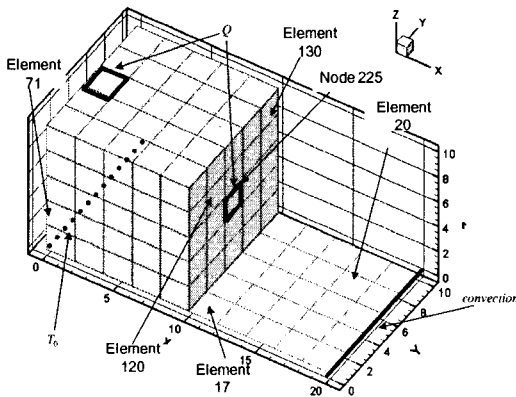


그림 2 3차원 열전도 모델

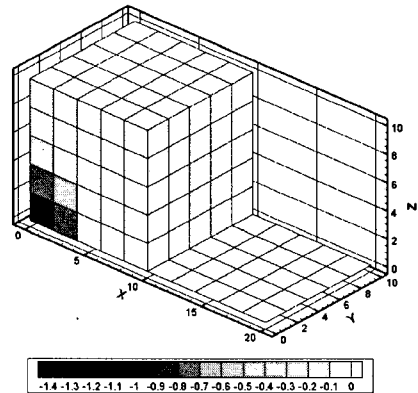


그림 3 열전도계수에 관한 온도의 민감도 결과

열이 발생하는 부분에서 민감도가 높은 값을 갖는다는 것을 확인할 수 있다. 아래의 표는 유한차분법과의 비교한 결과이다. 예조인 변수법으로 계산한 결과는 유한차분법과 매우 정확하게 일치함을 알 수 있다. 계산시간 측면에서도 유한차분법은 모든 요소에 대해서 계산을 필요로 하므로 22.55초가 걸린 반면에, 직접미분법은 9.75초, 예조인 변수법은 0.1초 밖에 걸리지 않았다. 앞서 언급했듯이, 설계민감도를 구할 때 예조인 변수법은 상당히 효율성이 좋고 정확하다는 사실을 확인할 수 있다.

표 1 설계 민감도의 비교

Element	$\frac{\Delta T_{225}}{\Delta \kappa_i}$ (유한차분)	$\frac{dT_{225}}{d\kappa_i}$ (에조인 법)	$\frac{dT}{d\kappa_i} / \frac{\Delta T}{\Delta \kappa_i} \times 100\%$
17	-7.26322E-02	-7.26298E-02	99.9966%
20	-7.70416E-02	-7.70389E-02	99.9964%
71	-1.41957E-01	-1.41954E-01	99.9979%
120	-1.55234E-02	-1.55232E-02	99.9990%
130	-3.35701E-02	-3.35698E-02	99.9990%

5.2 위상 최적설계 예제

(1) 3차원 평판 모델

그림 4는 432개의 요소를 갖는 평판으로 이루어진 모델이다. 내부 발열을 Q 를 증가시켜가면서 위상 최적설계를 수행했다. 가용 재료량은 30%로 하였으며, 벌칙인자 P 는 3으로 정하였다. 열전도 계수, 열속, 온도경계 조건은 각각 $\kappa=15.0 (W/m \cdot ^\circ C)$, $q=1000.0 (W/m^2)$, $T_0=0 (^\circ C)$ 으로 두었다.

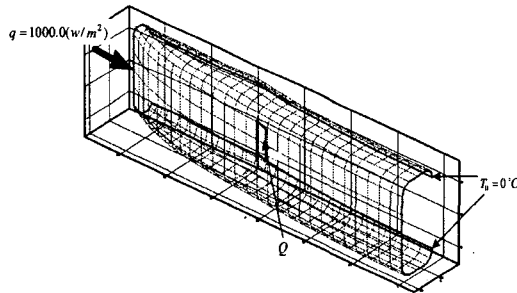


그림 4 3차원 평판 모델

평판 모델에 관해서 위상 최적설계를 수행한 결과는 그림5와 같다. 내부 발열율이 증가함에 따라서 재료들은 구조물의 온도를 낮추는 쪽으로 분포하려는 경향을 보이고 있음을 확인할 수 있다. 유입된 열이 빠르게 빠져나가야 구조물의 온도가 쉽게 올라가지 않는다. 그런 관점에서 볼 때, 위상 최적설계의 결과는 물리적으로 타당함을 알 수 있다.

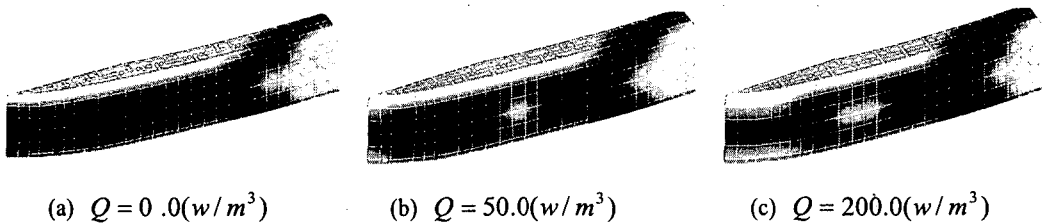


그림 5 3차원 평판 모델의 위상 최적설계 결과

(2) 3차원 솔리드 모델

그림 6은 2,400개의 요소를 갖는 솔리드 모델이다. 가용 재료량은 50%로 하였으며, 벌칙인자 P 는 3으로 하였다. 열전도 계수, 온도경계 조건, 대류계수, 대기온도는 각각 $\kappa=237.0(W/m \cdot ^\circ C)$, $T_0=0(^{\circ}C)$, $h=20.0(w/m \cdot ^\circ C)$, $T_\infty=20.0^{\circ}C$ 으로 두었다. 경계조건은 맨 아래의 4개의 꼭지점에 온도 경계조건을 주었고, 맨 아래의 요소 전체에 내부 발열을 Q 가 가해지는 것으로 가정하였다. 또한 대류경계는 맨 윗부분 전체와 가운데 5군데에 작용하는 것으로 가정하였다. 그림 7은 내부 발열율을 변화시켜가며 위상 최적설계를 수행한 결과이다.

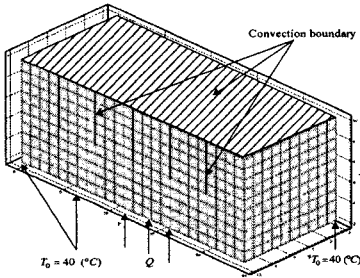
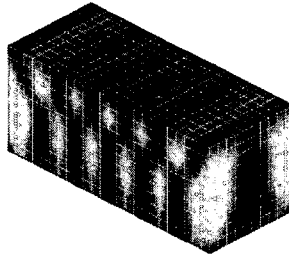
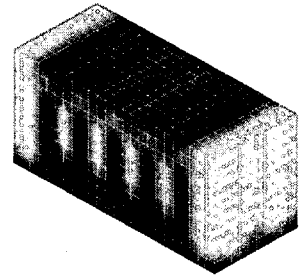


그림 6 3차원 솔리드 모델



$Q=100(w/m^3)$



$Q=200(w/m^3)$

그림 7 솔리드 모델의 위상 최적설계 결과

그림 8의 오른쪽 그림은 $Q=500(w/m^3)$ 일 때 얻은 결과의 재료분포의 등위면(Iso-Surface)를 그린 결과이다.

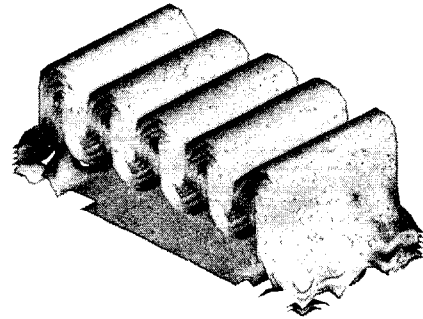
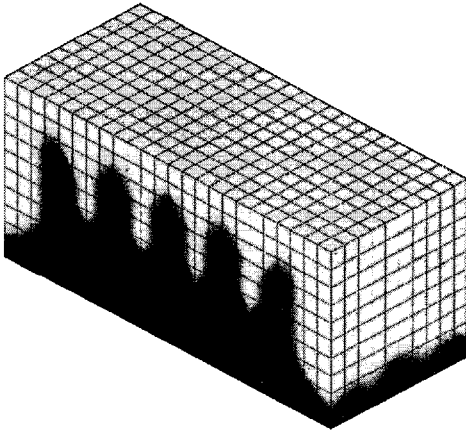


그림 8 위상 최적설계 결과 및 등위면

내부 발열율이 증가함에 따라서 위쪽에 분포되어있던 재료는 점점 아래쪽으로 분포하는 경향을 보이고 있음을 알 수 있다. 내부 발열율이 적을 때는 아래쪽과 위쪽 부분의 온도가 많이 차이가 나지 않는다. 이때는 중간 부분에 있는 대류 경계부분에서 열이 많이 빠져나가지 않기 때문에, 위쪽에 있는 대류경계 부분에서도 열이 빠져나가게 되고 그렇기 때문에 재료가 위쪽까지 골고루 분포하게 된다. 그러나 내부 발열율이 커지게 되면 아래쪽과 위쪽의 온도차이가 심하게 나타난다 온도를 낮추기 위해서는 발열 부분에서 가까운 대류 경계 부분에 재료가 집중될 수 밖에 없으며

로 그림 8과 같은 결과를 얻었다. 이는 실생활에서 많이 볼 수 있는 방열판 모양과 비슷하고, 따라서 최적설계의 결과는 물리적으로 타당하다는 것을 알 수 있다. 또한 그림 9에서 볼 수 있듯이 최적설계를 수행하기 전의 구조물의 온도(30-130℃)와 최적화 후의 구조물의 온도(20-70℃)를 비교하였을 때 전체적으로 온도가 매우 감소했음을 알 수 있다.

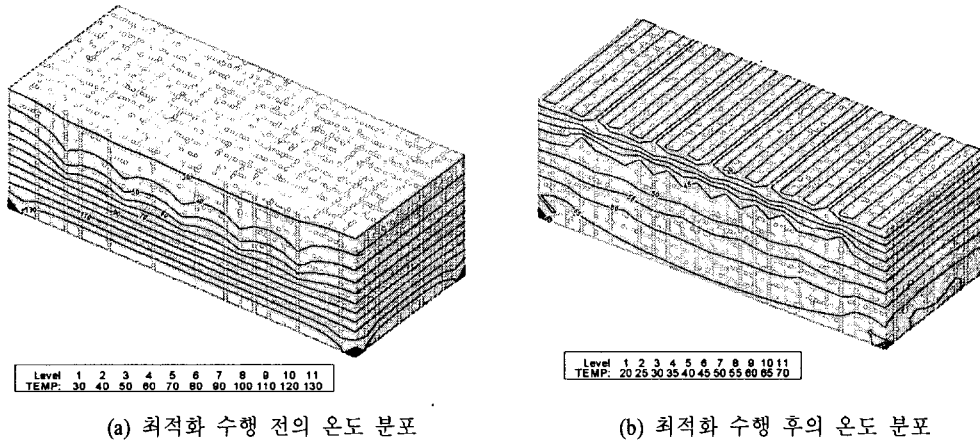


그림 9 최적화 전 후의 온도 분포 비교

6. 결론

본 논문에서는 정상 상태에서의 3차원 열전도 문제의 변분식을 유도하여, 직접미분법과 에조인 변수법을 이용하여 연속체 기반의 설계 민감도 식을 구하였다. 또한 열전도 문제에 대해서 에조인 변수법을 이용하여, 위상최적설계 기법을 개발하였다. 에조인 변수법은 이미 구하여진 시스템 매트릭스를 사용하기 때문에, 계산비용 면에서의 절감 효과가 큰 것을 확인하였다. 위상 최적설계를 위하여 설계 변수들은 재료밀도로 인수화하여 사용하였다. 그리고 여러 가지 수치적 예제를 통하여, 유한 차분법과 비교하여 유도된 식으로 구한 설계 민감도 값이 매우 정확함을 보였다. 또한 수행된 위상 최적화가 물리적으로 타당함을 알 수 있었고 경계면에 가해진 내부 발열율의 비율에 따라 다른 위상이 나올 수 있음을 확인하였다. 위상 최적화가 수행되기 전의 온도 분포와 수행된 후의 온도 분포를 비교하여 평균적인 온도 분포 면에서 크게 개선되었음을 확인할 수 있었다.

참고 문헌

1. M.P. Bendsøe, N. Kikuchi, Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 1988; **71**:197-224.
2. S. Cho, H. Jung, Design sensitivity analysis and topology optimization of displacement-loaded nonlinear structures, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2003; **192**: 2539-2553.
3. E.J. Haug, K.K. Choi, and V. Komkov, *Design sensitivity analysis of structural systems* 1986, Academic Press, New York.