

## 동적이완법을 이용한 공간구조의 후좌굴 해석에 관한 연구

### A Study on the Post-Buckling Analysis of Spatial Structures by using Dynamic Relaxation Method

이 경 수\*      이 상 주\*\*      이 형 훈\*\*\*      한 상 을\*\*\*\*  
Lee, Kyong-Soo      Lee, Sang-Ju      Lee, Hyong-Hoon      Han, Sang-Eul

#### ABSTRACT

The present study is concerned with the application of dynamic relaxation method in the investigation of the large deflection behavior of spatial structures. This numerical algorithm do not require the computation or formulation of any tangent stiffness matrix. The convergence to the solution is achieved by using only vectorial quantities and no stiffness matrix is required in its overall assembled form. In an effort to evaluate the merits of the methods, extensive numerical studies were carried out on a number of selected structural systems. The advantages of using dynamic relaxation methods, in tracing the post-buckling behavior of spatial structures, are demonstrated.

#### 1. 서      론

공간구조는 넓은 공간을 덮을 수 있는 구조시스템으로 좌굴하중 및 좌굴형상에 대한 검토가 필요하게 된다. 좌굴해석 및 그에 관한 이론에 관해서 그동안 수많은 연구가 수행되어왔으며, 현재도 진행 중에 있다. 이러한 연구에 사용된 해석법은 일반적인 뉴튼랩슨법이나 호장법 등이다. 위 방법들은 공통적으로 전체 구조물의 요소강성매트릭스를 조합하여 전체강성매트릭스를 만든다. 만들어진 전체강성매트릭스를 이용하여 변위, 부재응력 등을 계산하고, 필요에 따라서 고유치해석, 경로변경(path switch)계산을 수행하여 선형 좌굴하중이나 비선형 좌굴하중 및 좌굴모드 등을 계산한다. 위의 계산은 모두 강성매트릭스를 통해서 구조물의 특성을 파악하는 방법으로, 가장 일반적이고, 비교적 효과적으로 구조물의 비선형거동 특성을 파악할 수 있는 장점이 있다. 그러나 이러한 강성도법에 의한 비선형 해석은 구조물의 자유도가 커짐에 따라 여러 가지 면에서 해석적 제약이 따른다. 우선 하드웨어적인 문제가 있을 수 있다. 이 문제는 컴퓨터의 성능이 향상됨에 따라 점차적으로 해결되고 있다고 볼 수 있다. 또 하나의 제약은 해석방법상 따르는 피할 수 없는 문제로서, 구조물이 복잡하고 과대한 하중상태에 놓이게 되면, 강성매트릭스가 점차적으로 불안전해짐에 따라 특이현상이 발생하게 되어 더 이상 해석 할 수 없는 상태가 된다.

좌굴해석에 관한 연구를 살펴보면, Papadrakakis는 Explicit-Vector iteration method로 공간구조에 대한 기

\*      정희원 · (주)케이돔엔지니어링, 과장  
\*\*     정희원 · (주)플러스구조기술사사무소, 선임연구원  
\*\*\*    정희원 · (주)마이다스아이티 기술연구소, 과장  
\*\*\*\*   정희원 · 인하대학교 건축학부 교수

하학적 비선형 후좌굴 해석을 수행하여 해석법의 정확성을 검증하였다. Meek은 Crisfield의 호장법을 이용하여 트러스 및 보요소의 기하학적 비선형해석을 수행하여 여러 검증문제에 대한 비교적 정확한 결과를 보여 주었다. Chan은 이전의 연구자와 달리 하나의 부재를 2개의 요소로 모델링하여 기하학적, 재료적 비선형 해석을 수행하여 해석상 정확성 및 효율성을 검증하였다. 근래 들어 국내에서는 저자 등에 의해 래티스돔에 대한 향상된 다분기 해석법이 발표되었다.

본 논문은 Papadrakakis가 사용한 Vector iteration method 중의 하나로서 Barnes, Topping 등이 제안한 DRM(Dynamic Relaxation Method)를 사용하였고, 검증예제에 대한 기하학적 비선형 해석을 수행하여, Snap-through 형 후좌굴 해석을 수행하였다.

## 2. 전체 포텐셜에너지

구조물의 전체 포텐셜에너지  $\Phi$  는 변형에너지(strain energy)  $U$ 와 외부하중에 의한 일인  $V$ 의 합으로 나타낼 수 있다.

$$\Phi = U + V \quad (1)$$

위 식을  $m$ 요소의 변형에너지  $U_m$ , 하중벡터  $\mathbf{p}$ , 변위벡터  $\mathbf{d}$  로 다시 표현하면 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Phi = \sum_{m=1}^M U_m - \mathbf{p}^T \mathbf{d} \quad (2)$$

위 식을 모든 절점변위  $d_i^j$  에 대해 미분하면 다음과 같으며, 이 경우  $i$ 는 절점,  $j$ 는  $x, y, z$ 의 방향을 나타내며,  $M$ 은 구조물의 모든 부재수이다.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial d_i^j} = \sum_{m=1}^M \frac{\partial U_m}{\partial d_i^j} - p_i^j \quad (3)$$

구조물의 내력과 외력의 차인 불평형력(residual)은 식(3)으로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$r_i^j = - \frac{\partial \Phi}{\partial d_i^j} \quad (4)$$

구조물의 전체 포텐셜에너지가 최소인 상태를 정적하중 상태에서의 정적 평형상태(static equilibrium state)로 보기 때문에, 정적 평형상태를 위한 조건식은 식(4)로부터 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\frac{\partial \Phi}{\partial d_i^j} = 0 \quad (5)$$

일반적으로 식(5)의 값이 정확히 영(zero)을 만족시킬 수 없기 때문에, 식(4)의 불평형력이 영에 충분히 접근하여 수렴한계(convergence criteria)를 만족시킬 때 이 상태를 정적평형상태로 간주한다.

## 3. 동적이완법의 정식화

동적이완법은 구조물의 전체 포텐셜에너지를 최소화시키는 수치해석과정을 통해 구조물의 정적 평형상태를 찾는 반복적 비선형 해석기법이다. 시간증분  $\Delta t$ 마다 구조물의 운동 상태를 추적해 나가면서 구조물의 감쇠작용에 의해, 구조물이 정적 평형상태에 도달한다는 원리에서 출발한다.

$$\mathbf{p}' = M \mathbf{a}' + C \mathbf{v}' + K \mathbf{d}' \quad (6)$$

구조물의 동적 평형방정식은 위 식과 같다. 위 식에서 동적하중  $\mathbf{p}'$ 를 정적하중  $\mathbf{p}$ 로 적용하고, 식을 고쳐 다시 표현하면 다음 식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{p} - K \mathbf{d}' = M \mathbf{a}' + C \mathbf{v}' \quad (7)$$

위 식의 왼쪽항을  $t$ -시간스텝에서 식(4)에 의한 불평형력으로 보고 다시 정리하면 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{r}' = M \mathbf{a}' + C \mathbf{v}' \quad (8)$$

위 식에서  $M, C$  는 각각 구조물의 가상질량(fictitious mass)과 점성감쇠(viscous damping)이고,  $\mathbf{a}', \mathbf{v}'$  는  $t$ -시간스텝에서 구조물의 가속도와 속도이다. 절점속도가 시간증분  $\Delta t$ 에 대해 선형으로 변화한다는 유한차분적 기법을 도입하면 절점속도는 아래식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{v}' = \frac{\mathbf{v}^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \mathbf{v}^{t-\frac{\Delta t}{2}}}{2} \quad (9)$$

따라서, 가속도벡터는 속도벡터를 시간증분  $\Delta t$ 에 대해 선형 보간하여 아래식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{a}' = \frac{\mathbf{v}^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \mathbf{v}^{t-\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta t} \quad (10)$$

속도와 가속도에 관한 위식을 식(8)에 대입하면 각 절점의 불평형력은 아래식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{r}' = M \left( \frac{\mathbf{v}^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \mathbf{v}^{t-\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta t} \right) + C \left( \frac{\mathbf{v}^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \mathbf{v}^{t-\frac{\Delta t}{2}}}{2} \right) \quad (11)$$

따라서 식(11)를  $t+\Delta t/2$  와  $t-\Delta t/2$  의 속도로 다시 정리하면 아래식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{v}^{t+\frac{\Delta t}{2}} = \mathbf{v}^{t-\frac{\Delta t}{2}} \left( \frac{\frac{M}{\Delta t} - \frac{C}{2}}{\frac{M}{\Delta t} + \frac{C}{2}} \right) - \left( \frac{\mathbf{r}'}{\frac{M}{\Delta t} + \frac{C}{2}} \right) \quad (12)$$

구조물의 점성감쇠(viscous damping)가 질량에만 비례한다고 생각하고 점성감쇠를 질량에 대해 다시 표현하면 아래식과 같이 나타낼 수 있다.

$$C = c' \frac{M_i}{\Delta t} \quad (13)$$

위식에서  $c'$  은 단위질량에 대한 점성감쇠계수(damping coefficient per unit mass)이고, 전체구조물에 대해 일정한 값을 가진다. 식(13)를 식(12)에 대입하고 정리하면 아래식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{v}^{t+\frac{\Delta t}{2}} = A \mathbf{v}^{t-\frac{\Delta t}{2}} + B \mathbf{r}' \quad (14)$$

위식에서 상수  $A, B$ 는 아래와 같다.

$$A = \frac{(1 - \frac{c'}{2})}{(1 + \frac{c'}{2})}, \quad B = \frac{\Delta t}{2M} (1 + A) \quad (15)$$

구조물의  $t+\Delta t$  에서의 증분변위는 식(14)의 속도에 관한 식에 시간증분  $\Delta t$ 를 선형 보간하여 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\Delta \mathbf{d}^{t+\Delta t} = \Delta t \mathbf{v}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \quad (16)$$

따라서 구조물의 새로운 좌표계는 식(16)의 증분변위를 이용해 다음식과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{X}^{t+\Delta t} = \mathbf{X}^t + \Delta t \mathbf{v}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \quad (17)$$

#### 4. 보요소의 정식화

보요소의 절점변위와 부재력의 관계식은 아래와 같다.

$$\begin{aligned} M_{iz} &= \left( \frac{4EI_z}{l} + \frac{2Pl}{15} \right) \theta_{iz} + \left( \frac{2EI_z}{l} - \frac{Pl}{30} \right) \theta_{jz} \\ M_{jz} &= \left( \frac{2EI_z}{l} - \frac{Pl}{30} \right) \theta_{iz} + \left( \frac{4EI_z}{l} + \frac{2Pl}{15} \right) \theta_{jz} \\ M_{iy} &= \left( \frac{4EI_y}{l} + \frac{2Pl}{15} \right) \theta_{iy} + \left( \frac{2EI_y}{l} - \frac{Pl}{30} \right) \theta_{jy} \\ M_{jy} &= \left( \frac{2EI_y}{l} - \frac{Pl}{30} \right) \theta_{iy} + \left( \frac{4EI_y}{l} + \frac{2Pl}{15} \right) \theta_{jy} \\ M_t &= (GJ/l)\theta_t \end{aligned} \quad (18)$$

$$P = EA \left[ (e/l) + \frac{1}{30} (2\theta_{iz}^2 - \theta_{iz}\theta_{jz} + 2\theta_{jz}^2) + \frac{1}{30} (2\theta_{iy}^2 - \theta_{iy}\theta_{jy} + 2\theta_{jy}^2) \right]$$

$EI_y$ 와  $EI_z$ 는 각각  $y$ 축과  $z$ 축에 대한 휨강성이며,  $EA$ 는 축강성이고,  $GJ$ 는 비틀림 강성이다. 국부좌표계에서의 요소의 변형은  $(\theta_{iz}, \theta_{jz}, \theta_{iy}, \theta_{jy}, \theta_t)$ 은 요소의 양단 강체회전(rigid body rotation)을 고려하여 계산한다.

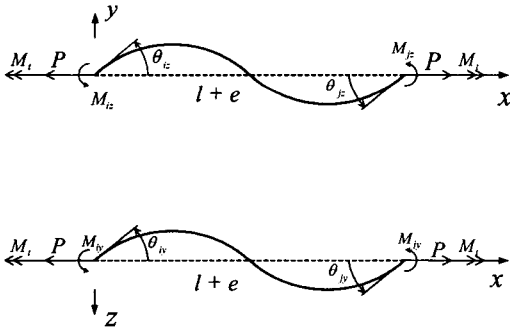


그림 1. 좌표계에 따른 보요소의 부재 변위 및 절점력

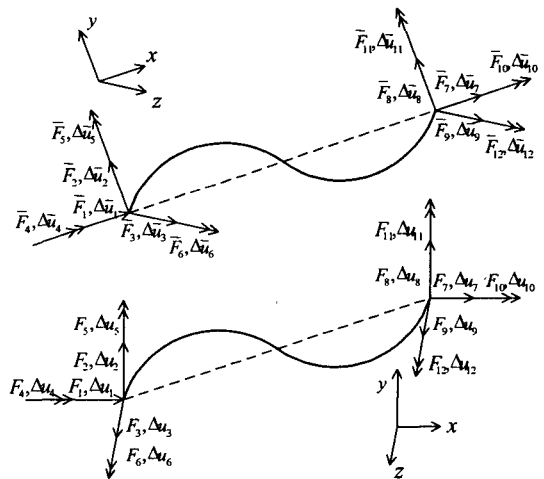


그림 2. 국부 및 전체 좌표계에 따른 보요소의 변위 및 절점력

위 식을 정리하여 다시 나타내면 아래와 같다.  $\{S\}$ 와  $\{V\}$ 는 각각 요소 좌표계에서의 절점력과 변형을 나타낸다.

$$\{S\}^T = \{M_{iz}, M_{jz}, M_{iy}, M_{jy}, M_t, P\} \quad (19)$$

$$\{V\}^T = \{\theta_{iz}, \theta_{jz}, \theta_{iy}, \theta_{jy}, \theta_t, e\} \quad (20)$$

보요소의 부재내력에 의한 절점력은  $\{\bar{F}\}$ 는 변환매트릭스  $[A]$ 에 의해 아래와 같이 나타낸다.

$$\{\bar{F}\} = [A]\{S\} \quad (21)$$

$$\{V\} = [A]^T\{d\} \quad (22)$$

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1/l & 1/l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/l & 1/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1/l & -1/l & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/l & 1/l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (23)$$

국부좌표계의 변위  $\{d\}$ 는 좌표변환매트릭스  $\{T\}$ 에 의해 전체좌표계의 변위  $\{u\}$ 로 나타낼 수 있다.

$$\{d\} = [T]\{u\} \quad (24)$$

여기서,  $\{u\}^T = \{u_1, u_2, \dots, u_{12}, \}$  이고, 국부좌표계의 내력  $\{\bar{F}\}$ 는 좌표변환행렬에 의해 전체좌표계의 내력  $\{F\}$ 로 나타낼 수 있다.

$$\{F\} = [T]^T\{\bar{F}\} \quad (25)$$

## 5. 검증예제

트러스요소와 보요소에 의한 대표적인 검증예제를 통해 DRM(Dynamic Relaxation Method)에 의한 후좌굴 해석을 수행하였으며, 변위증분형 해석방법을 사용하였다.

### 5.1 24 member hexagonal shallow dome(star-dome)

스타돔으로 알려진 이 예제는 대변형 해석의 검증예제로 사용되는 대표적인 예제이다. 부재는 트러스로 구성되며 지점은 고정이고 중앙부에 절점1번에 집중하중  $P$ 가 작용한다.

DRM에 의한 해석결과의 검증을 위해 본 논문에서는 절점 1번에 Z축으로 변위증분을 적용하여 해석을 수행하였으며, 해석결과를 그림4, 그림5에 나타내었다. 기존의 연구결과와 해석결과가 유사함을 알 수 있다.

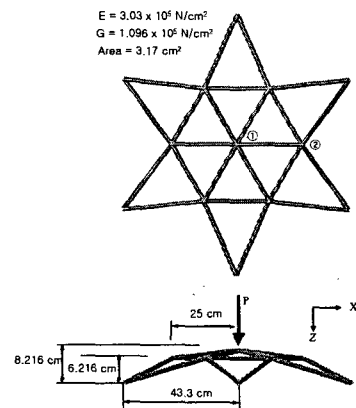


그림 3. 스타돔의 형상 및 재료상수

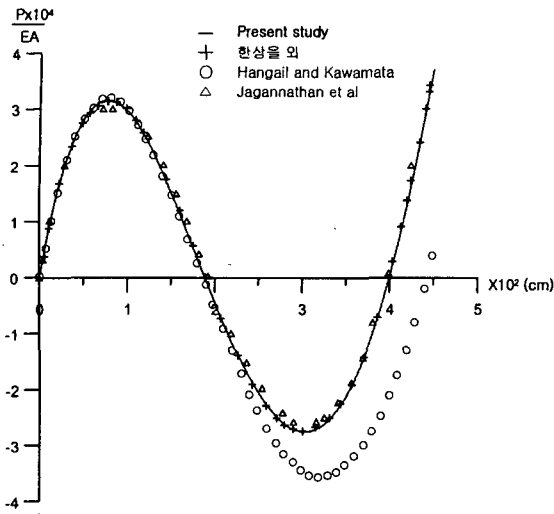


그림 4. 1번절점의 변위 및 결과비교

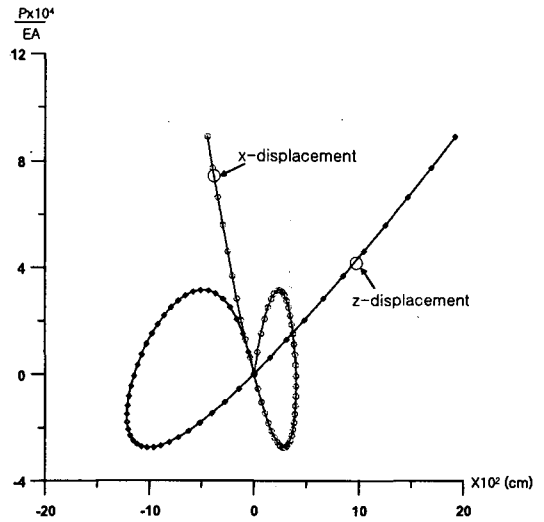


그림 5. 2번절점의 변위

### 5.2 12 member hexagonal frame

12개의 보요소로 이루어진 본 예제도 보요소에 의한 대변형 해석의 검증예제로 사용되는 대표적인 예제이다. 지점의 지지방식은 수평방향으로 움직일 수 있는 롤러지지이고, 중앙부에 집중하중이 작용한다.

Meek과 Chan는 각각 1개의 부재를 1개, 2개의 요소로 모델링하여 해석을 수행하였다. 따라서 기존의 연구결과와 비료를 위해 본 해석에서도 부재를 1개와 2개로 각각 모델링하여 해석을 수행하였다. 그림7은 기존의 연구결과와 비교한 것이고, 그림8은 지지조건을 달리하였을 때의 거동특성을 비교한 것이다. 그림9는 본 논문의 DRM으로 하중증분형 대변형 해석을 수행하였을 경우와 변위증분형 해석을 수행했을 때를 비교한

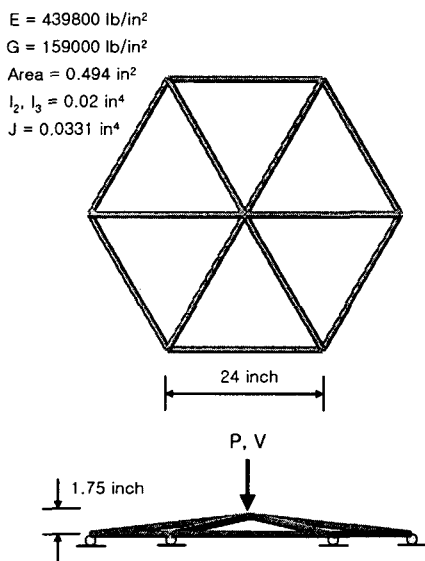


그림 6. Hexagonal frame의 형상 및 재료상수

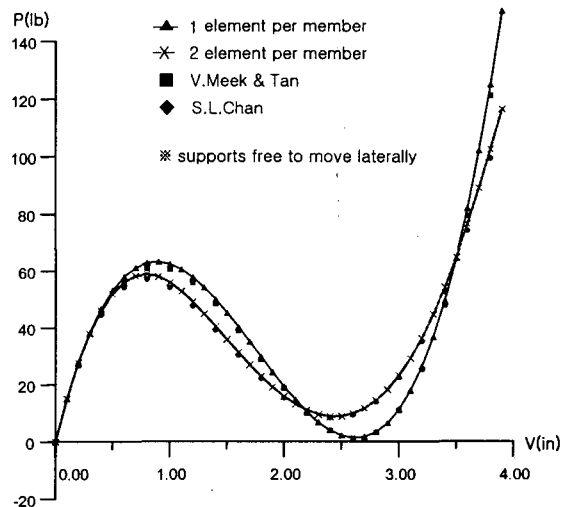


그림 7. 해석 결과비교

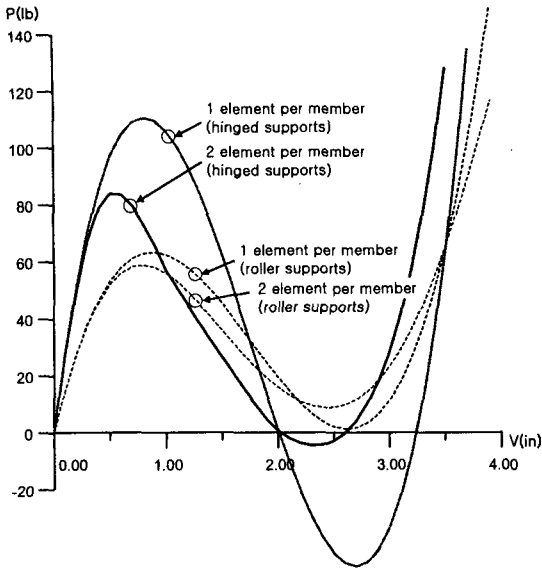


그림 8. 지지조건에 따른 해석결과

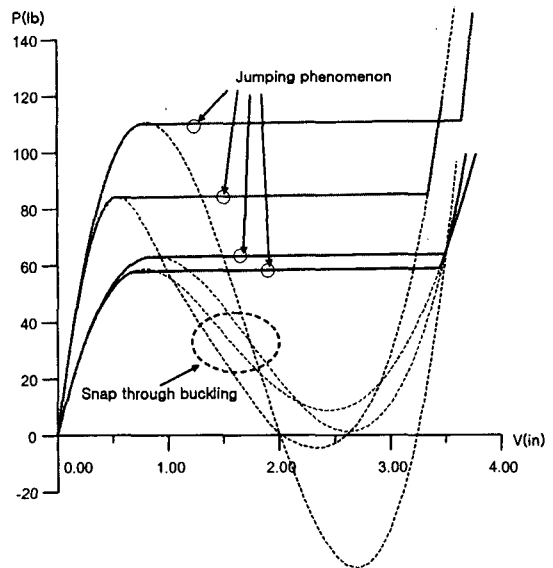


그림 9. DRM에 의한 Jumping 현상

그래프로, 하중중분형 해석을 수행하면 비교적 정확히 Jumping 현상 규명할 수 있음을 알 수 있었다. 뉴튼랩슨형 해석법에서는 강성매트릭스의 특이현상으로 그림 9와 같은 Jumping 현상을 해석하기가 매우 어렵다고 알려져 있다.

## 6. 결론

DRM에 의해 트러스 및 보요소로 이루어진 공간구조의 대변형 해석을 수행함으로써 후좌굴 해석을 수행하였다. 검증예제 해석결과 기존의 연구결과와 비교적 정확히 일치하였고, 돔형 구조물의 Jumping 현상도 파악할 수 있었다.

뉴튼랩슨형 해석법과 달리 DRM은 강성매트릭스를 만들지 않고도 정확한 비선형 해석을 수행할 수 있었으며, DRM이 주로 인장구조의 해석에 사용되었지만, 본 연구의 검증을 통해 강성구조물의 대변형 해석 및 좌굴, 후좌굴 해석에도 효과적으로 적용가능 함을 알 수 있었다.

향후 본 연구의 성과를 바탕으로 본 연구에서는 적용하지 않은 셸구조의 후좌굴 해석 및 실제 대형구조물에의 적용성 검토에 관한 연구가 추가로 수행될 것이다.

## 참고문헌

1. Day, A. S., "An Introduction to Dynamic Relaxation", The Engineer, London, vol.219, pp.8-221, 1960.
2. K.H.Chu, R.H.Rampetsreiter, "Large deflection buckling of space frames", J. Sttuct. Div., ASCE, vol 98, pp.2701-2722, 1972.
3. M. Papadrakakis, "Post buckling anlysis of spatial structures by vector iteration methods", Computer & Structure, vol 14, pp.393-402, 1981.

4. J. L. Meek, H. S. Tan, "Geometrically nonlinear analysis of space frames by an incremental iterative technique", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol.47, pp.261-282, 1984.
5. S. L. Chan, "Geometric and material nonlinear analysis of beam-columns and frames using the minimum residual displacement method", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol 26, pp.2657-2669, 1988.
6. Barnes, M. R., "Form-finding and Analysis of Prestressed Nets and Membranes", *Computers & Structures*, vol. 30, 1988, pp.685-695.
7. Topping, B. H. V., Khan, A. I. and Wilson, J. K., "Parallel Dynamic Relaxation and Domain Decomposition" in *Advances in Parallel and Vector Processing for Structural Mechanics*, edited by B. H. V. Topping and M. Papadrakakis, Civil-Comp Press. pp.215-232, 1994.
8. 한상을, 이경수, "동적이완법에 의한 막구조의 등장력곡면 형태해석에 관한 연구", *한국전산구조공학회*, 제11권 4호, pp.321~330, 1998. 12.
9. 한상을, 이경수, "동적이완법에 의한 불안정 구조물의 안정화이행과정 해석에 관한 연구", *한국강구조공학회*, 11권 6호, 1999.
10. 한상을, 윤한흠, "래티스 돔의 다분기 해석을 위한 알고리즘에 관한 연구", *대한건축학회*, 제16권 9호, 2000.
11. Han S.E, Lee K.S "A Study of the Stabilizing Process of Unstable Structures", *Computer & Structure* , vol 81, pp. 1677-1688, 2003.